Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, А. С. Капустин, А. В. Малышев, Влияние турбулентного переноса на критическое поведение, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 1, 124–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6714>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:37:42

© 2011 г. Н. В. Антонов*, А. С. Капустин*, А. В. Малышев*

ВЛИЯНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА НА КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

С помощью теоретико-полевой ренормгруппы изучается критическое поведение двух систем, подверженных турбулентному перемешиванию. Первая система, описываемая равновесной моделью А, соответствует релаксационной динамике несохраняющегося параметра порядка. Вторая система – сильно неравновесная реакционно-диффузионная система, известная как процесс Грибова или направленный процесс протекания. Турбулентное перемешивание моделируется стохастическим уравнением Навье–Стокса со случайной возбуждающей силой с коррелятором $\propto \delta(t - t')p^{4-d-y}$, где p – волновое число, d – размерность пространства, y – произвольный показатель. Показано, что в зависимости от соотношения между y и d эти системы демонстрируют различные типы критического поведения. Помимо известных режимов (исходные системы без перемешивания и пассивно переносимое скалярное поле) установлено существование новых сильно неравновесных классов универсальности, а соответствующие критические размерности вычислены в первом порядке двойного разложения по y и $\varepsilon = 4 - d$ (однопетлевое приближение).

Ключевые слова: ренормализационная группа, критическое поведение, турбулентный перенос.

1. ВВЕДЕНИЕ

Разнообразные системы весьма различной физической природы обнаруживают интересное сингулярное поведение в окрестности своих критических точек. Их корреляционные функции приобретают автомодельную форму с универсальными критическими размерностями: они зависят лишь от немногих глобальных характеристик системы (таких как симметрия или размерность пространства). Количественное описание критического поведения дается теоретико-полевой ренормализационной группой (РГ). В РГ-подходе возможные типы критического поведения (классы универсальности) связываются с инфракрасно (ИК) притягивающими неподвижными точками ренормируемых моделей теории поля. Наиболее типичные равновесные фазовые переходы принадлежат классу универсальности O_n -симметричной модели

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: nikolai.antonov@pobox.spbu.ru, dyens@mail.ru, alvlamal@gmail.com

ψ^4 n -компонентного скалярного параметра порядка. Универсальные характеристики критического поведения зависят лишь от n и размерности пространства d и могут вычисляться в рамках различных систематических схем теории возмущений, в частности в виде разложений по $\varepsilon = 4 - d$ или $1/n$ (см. монографии [1], [2] и цитированную в них литературу).

Александр Николаевич Васильев внес значительный вклад в развитие квантово-полевых методов и их применение к теории критического поведения и теории турбулентности. Его работы суммированы в трех монографиях [2]–[4]. Наиболее заметными конкретными достижениями, вероятно, являются вычисление индекса Фिशера η в O_n -симметричной модели ψ^4 в порядке $1/n^3$ [5] и трехпетлевое вычисление аномальных показателей в модели турбулентного переноса Крейчнана [6]. В настоящей статье мы применяем теоретико-полевую РГ и обобщенное ε -разложение к задаче о влиянии турбулентного переноса на различные типы критического поведения.

На протяжении последних десятилетий постоянное внимание привлекали процессы распространения и соответствующие неравновесные фазовые переходы (см., например, обзорные статьи [7], [8] и цитированную в них литературу). Процессы распространения встречаются в физических, химических, биологических и экологических системах: автокаталитические реакции, протекание в пористых средах, эпидемические заболевания и т.д. Переходы между флуктуационными (активными) и абсорбционными (неактивными) фазами, в которых все флуктуации полностью прекращаются, особенно интересны как примеры неравновесного критического поведения.

Давно было осознано, что критическое поведение реальных систем в высшей степени чувствительно к внешним возмущениям, гравитации, влиянию примесей и турбулентному перемешиванию (см. общее обсуждение и ссылки в монографии [9]). Более того, некоторые возмущения (случайно распределенные примеси или турбулентное перемешивание) могут производить совершенно новые типы критического поведения с богатыми и довольно экзотическими свойствами.

Эти вопросы становятся еще более важными для неравновесных фазовых переходов, поскольку идеальные условия “чистого” стационарного критического состояния едва ли могут быть достигнуты в реальных химических или биологических системах, а влияние различных возмущений никогда не может быть исключено полностью. В частности, внутренние эффекты турбулентности не могут быть исключены для химических каталитических реакций или лесных пожаров. Также можно предположить, что атмосферная турбулентность может играть важную роль в распространении инфекционных заболеваний летающими насекомыми или птицами. Влияние различных типов регулярных и турбулентных течений на критическое поведение изучалось в работах [10]–[17].

В ряде работ [14]–[17] критическое поведение различных систем, подверженных турбулентному перемешиванию, изучалось с помощью теоретико-полевой РГ. Как правило, турбулентность моделировалась некоррелированным во времени гауссовым полем скорости с парной корреляционной функцией вида $\langle vv \rangle \propto \delta(t - t')p^{-d-\xi}$, где p – волновое число, $0 < \xi < 2$ – свободный параметр с реальным (“колмогоровским”) значением $\xi = 4/3$. Эта модель “быстрых изменений” Крейчнана недавно привлекла огромное внимание благодаря обусловленному ей новому взгляду на происхождение

переमेжаемости и аномального скейлинга в развитой турбулентности (см. обзорную статью [18] и ссылки в ней). Обзор РГ-подхода к этой задаче дан в работе [19]. В контексте нашего исследования особенно важно, что ансамбль Крейчнана позволяет легко моделировать анизотропию течения [16] и сжимаемость жидкости [17], что оказывается гораздо более сложным, если скорость описывается полномасштабными динамическими уравнениями.

Однако гауссов характер и нулевое время корреляции являются сильным упрощением реальной ситуации, и желательно исследовать влияние турбулентного переноса, обусловленного более реалистическими полями скоростей. В настоящей статье мы изучаем влияние сильно негауссова поля скорости с конечным временем корреляции, управляемого стохастическим динамическим уравнением. Точнее, мы привлекаем стохастическое уравнение Навье–Стокса для несжимаемой жидкости со случайной возбуждающей силой с коррелятором $\propto p^{4-d-y}$, где y – произвольный показатель с физическим (“колмогоровским”) значением $y = 4$. Обзор РГ-подхода к этой модели дан в монографиях [2], [4].

Рассмотрены два представительных примера динамического критического поведения: равновесная критическая динамика несохраняющегося параметра порядка с гамильтонианом типа ψ^4 и неравновесная система вблизи точки перехода между абсорбционным и флуктуационным состояниями. Первая модель отвечает жидким критическим системам (бинарные смеси или жидкие кристаллы), а вторая описывает процессы распространения в реакционно-диффузионных системах, относится к классу универсальности, известному как процесс Грибова или направленный процесс протекания, и эквивалентна (с точностью до поворота Вика) реджеонной теории поля [7], [8].

Показано, что в зависимости от соотношения между y и d обе системы демонстрируют различные типы критического поведения, связанные с разными ИК-притягивающими неподвижными точками уравнений РГ. В дополнение к известным асимптотическим режимам (таким как критическая динамика без перемешивания или пассивно переносимый скаляр без самодействия) установлено существование новых, сильно неравновесных типов критического поведения (классов универсальности), а соответствующие области устойчивости в плоскости y – d и критические размерности вычислены в ведущем порядке двойного разложения по y и $\varepsilon = 4 - d$, что соответствует однопетлевому приближению РГ.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛЕЙ

В ланжевеновской формулировке обе модели определяются стохастическими дифференциальными уравнениями для параметра порядка $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$

$$\partial_t \psi = \lambda_0 \left\{ (-\tau_0 + \partial^2) \psi - \frac{u_0 \psi^3}{3!} \right\} + \zeta \quad (1)$$

для модели А и

$$\partial_t \psi = \lambda_0 \left\{ (-\tau_0 + \partial^2) \psi - \frac{g_0 \psi^2}{2} \right\} + \zeta \sqrt{\psi} \quad (2)$$

для модели Грибова. Здесь $\partial_t = \partial/\partial t$, ∂^2 – оператор Лапласа, g_0 и $u_0 > 0$ – константы взаимодействия, $\lambda_0 > 0$ – кинетический коэффициент (коэффициент диффузии),

$\tau_0 \propto (T - T_c)$ – отклонение температуры (или ее аналога) от критического значения. Гауссов случайный шум $\zeta = \zeta(t, \mathbf{x})$ с нулевым средним задается парной корреляционной функцией

$$\langle \zeta(t, \mathbf{x}) \zeta(t', \mathbf{x}') \rangle = 2\lambda_0 \delta(t - t') \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3)$$

для модели А и

$$\langle \zeta(t, \mathbf{x}) \zeta(t', \mathbf{x}') \rangle = g_0 \lambda_0 \delta(t - t') \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4)$$

для процесса Грибова; d – размерность пространства $\mathbf{x}$. Множитель $\sqrt{\psi}$ во вкладе с шумом в уравнении (2) обеспечивает полное исчезновение флуктуаций в абсорбционном состоянии. Выражения для корреляторов отличаются лишь нормировкой: продиктованный флуктуационно-диссипационной теоремой множитель $2\lambda_0$ в (3) обеспечивает согласованность со статической моделью ψ^4 , тогда как $g_0\lambda_0$ в (4) придает простой вид симметрии, имеющейся в теоретико-полевой формулировке модели Грибова (см. ниже формулу (13)). Индекс “0” отмечает затравочные (неренормированные) параметры; их ренормированные аналоги (без такого индекса) будут приведены ниже.

Для несжимаемой жидкости галилеево-ковариантное взаимодействие с поперечным (в силу условия несжимаемости $\partial_i v_i = 0$) полем скорости $\mathbf{v} = \{v_i(t, \mathbf{x})\}$ вводится в (1) и (2) путем замены

$$\partial_t \rightarrow \nabla_t = \partial_t + v_i \partial_i, \quad (5)$$

где $\partial_i = \partial/\partial x_i$, а ∇_t – лагранжева (галилеево-ковариантная) производная. Мы используем поле скорости, удовлетворяющее уравнению Навье–Стокса со случайной возбуждающей силой,

$$\nabla_t v_k = \nu_0 \partial^2 v_k - \partial_k \mathcal{P} + f_k, \quad (6)$$

где $\mathcal{P}$ и f_k – давление и поперечная случайная сила (в расчете на единицу массы). Для f мы предполагаем гауссово распределение с нулевым средним и корреляционной функцией

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \frac{\delta(t - t')}{(2\pi)^d} \int_{p \geq m} d\mathbf{p} P_{ij}(\mathbf{p}) \mathcal{D}_f(p) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}, \quad (7)$$

где $P_{ij}(\mathbf{p}) = \delta_{ij} - p_i p_j / p^2$ – поперечный проектор, $\mathcal{D}_f(p)$ – некоторая функция от $p = |\mathbf{p}|$ и параметров модели. Величина $m = 1/\mathcal{L}$, обратная к интегральному масштабу турбулентности, обеспечивает ИК-регуляризацию (ее конкретная форма несущественна; резкое обрезание – простейший выбор для практических расчетов).

Стандартный формализм РГ применим к задаче (6), (7), если корреляционная функция случайной силы выбрана в степенном виде:

$$\mathcal{D}_f(p) = D_0 p^{4-d-y}, \quad (8)$$

где $D_0 > 0$ – положительный амплитудный множитель, а показатель $0 < y \leq 4$ играет роль РГ-параметра разложения, аналогично $\varepsilon = 4 - d$ для моделей критического поведения. Его физическое значение есть $y = 4$: при должном выборе амплитуды функция (8) при $y \rightarrow 4$ превращается в дельта-функцию, $\mathcal{D}_f(p) \propto \delta(\mathbf{p})$, что соответствует притоку энергии в систему за счет взаимодействия с наибольшими турбулентными вихрями (более подробное обсуждение этого вопроса см., например, в [2], [4]).

3. ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА И РЕНОРМИРОВКА

Стохастические задачи (1)–(4) могут быть переформулированы как теоретико-полевые модели с удвоенным набором полей $\Psi = \{\psi, \psi^\dagger\}$ и функционалами действия

$$\mathcal{S}_A(\psi, \psi^\dagger) = \psi^\dagger(-\partial_t + \lambda_0 \partial^2 - \lambda_0 \tau_0) \psi + \lambda_0 (\psi^\dagger)^2 - \frac{u_0}{3!} \psi^\dagger \psi^3 \quad (9)$$

для модели А и

$$\mathcal{S}_G(\psi, \psi^\dagger) = \psi^\dagger(-\partial_t + \lambda_0 \partial^2 - \lambda_0 \tau_0) \psi + \frac{g_0 \lambda_0}{2} \{(\psi^\dagger)^2 \psi - \psi^\dagger \psi^2\} \quad (10)$$

для модели Грибова. Здесь $\psi^\dagger = \psi^\dagger(t, \mathbf{x})$ – вспомогательное “поле отклика” и подразумеваются интегрирования по аргументам полей, например

$$\psi^\dagger \partial_t \psi = \int dt \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(t, \mathbf{x}) \partial_t \psi(t, \mathbf{x}).$$

Стохастическая задача (6)–(8) соответствует теоретико-полевой модели с действием

$$\mathcal{S}_{\text{NS}}(v', v) = \frac{v' D_v v'}{2} + v' \{-\nabla_t + \nu_0 \partial^2\} v, \quad (11)$$

где D_v – корреляционная функция (7) и подразумеваются все нужные интегрирования и суммирования по векторным индексам. Вспомогательное векторное поле $\mathbf{v}' = \{v'_i(t, \mathbf{x})\}$ также поперечно, $\partial_i v'_i = 0$, что позволяет опустить вклад давления в функционале (11).

Теоретико-полевая формулировка означает, что статистические средние случайных величин в исходных стохастических задачах могут быть представлены функциональными интегралами по полным наборам полей с весом $e^{\mathcal{S}^{(\Phi)}}$, и потому могут рассматриваться как функции Грина полевых моделей с функционалами действия (9)–(11). В частности, функция линейного отклика стохастических задач (1)–(4) дается функцией Грина

$$G = \langle \psi^\dagger(t, \mathbf{x}) \psi(t', \mathbf{x}') \rangle = \int \mathcal{D}\psi^\dagger \int \mathcal{D}\psi \psi^\dagger(t, \mathbf{x}) \psi(t', \mathbf{x}') e^{\mathcal{S}(\psi, \psi^\dagger)} \quad (12)$$

соответствующих полевых моделей.

Модель (10) симметрична по отношению к преобразованию

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi^\dagger(-t, -\mathbf{x}), \quad \psi^\dagger(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi(-t, -\mathbf{x}), \quad g_0 \rightarrow -g_0. \quad (13)$$

Отражение константы g_0 в действительности несущественно, так как реальный параметр разложения в теории возмущений модели есть $u_0 = g_0^2$. Модель (9) симметрична по отношению к отражению полей $\psi \rightarrow -\psi$, $\psi^\dagger \rightarrow -\psi^\dagger$. Эти симметрии сохраняются при включении поля скорости.

Полные модели описываются функционалами действия

$$\mathcal{S}_{A,G}^F(\Psi) = \mathcal{S}_{\text{NS}}(v', v) + \mathcal{S}_{A,G}(\psi, \psi^\dagger, v), \quad (14)$$

где $\Psi = \{\psi, \psi^\dagger, v, v'\}$ – полный набор полей, а в функционалах (9) и (10) выполнена подстановка (5). Для этих моделей полный набор констант взаимодействия (“зарядов”) включает три параметра:

$$u_0 \sim \Lambda^{4-d}, \quad w_0 = \frac{D_0}{\nu_0^3} \sim \Lambda^y, \quad e_0 = \frac{\lambda_0}{\nu_0}, \quad (15)$$

где Λ – некоторый характерный импульсный ультрафиолетовый (УФ) масштаб. Отношение e_0 не является параметром разложения в теории возмущений, но должно трактоваться как дополнительная константа взаимодействия, поскольку оно безразмерно и константы ренормировки и РГ-функции могут от него зависеть.

Из соотношений (15) следует, что взаимодействия $(\psi^\dagger)^2\psi$ и $\psi^\dagger\psi^2$ в (10) и $\psi^\dagger\psi^3$ в (9) становятся логарифмическими (соответствующая константа связи u_0 становится безразмерной) при $d = 4$. Тем самым для однозарядных моделей (9), (10) значение $d = 4$ есть верхняя критическая размерность, а отклонение $\varepsilon = 4 - d$ играет роль формального параметра разложения в РГ-подходе: критические показатели нетривиальны при $\varepsilon > 0$ и могут вычисляться как ряды по ε . Вклад вершины $v'(v\partial)v$ в (11) и дополнительные взаимодействия $\psi^\dagger(v\partial)\psi$ в полных моделях (14) становятся логарифмическими при $y = 0$. Параметр y не связан с d и может варьироваться независимо. Однако для РГ-анализа полных задач важно, чтобы все взаимодействия становились логарифмическими одновременно. В противном случае некоторые из них оказывались бы слабее других с точки зрения РГ-идеологии и были бы несущественными в ведущем порядке ИК-асимптотики. В результате некоторые из скейлинговых режимов полных моделей были бы потеряны.

Для изучения всех возможных скейлинговых режимов полных моделей и переходов между ними нужна подлинная трехзарядная теория, в которой все взаимодействия трактовались бы одинаковым образом. Поэтому мы будем рассматривать ε и y как малые параметры одного порядка величины, $\varepsilon \propto y$. В отличие от простого ε -разложения однозарядных моделей, координаты неподвижных точек, критические размерности и другие величины будут вычисляться как двойные разложения в плоскости ε – y вокруг начала координат, т.е. в окрестности точки, где все константы связи в (15) становятся безразмерными.

Основанное на соображениях размерности и симметрии полных моделей (14) рассмотрение показывает, что они являются мультипликативно ренормируемыми. Роль симметрий очень важна: в частности, галилеева инвариантность требует, чтобы контрчлены $\psi^\dagger\partial_t\psi$ и $\psi^\dagger(v\partial)\psi$ входили в ренормированное действие в форме инвариантной комбинации $\psi^\dagger\nabla_t\psi$. Она также показывает, что контрчлен $\psi^\dagger\psi v^2$, отсутствующий в неренормированных действиях (14) и допустимый по размерности, в действительности запрещен. Таким образом, все УФ-расходимости (имеющие вид сингулярностей по ε и y) могут быть поглощены конечным набором констант ренормировки Z_i . Ренормированные функционалы действия имеют вид

$$\mathcal{S}_A^R = \mathcal{S}_{NS}^R + \psi^\dagger\{-Z_1\nabla_t + Z_2\lambda\partial^2 - Z_3\lambda\tau\}\psi + Z_4\lambda(\psi^\dagger)^2 - Z_5\frac{u\mu^\varepsilon\lambda}{3!}\psi^\dagger\psi^3 \quad (16)$$

для модели А и

$$\mathcal{S}_G^R = \mathcal{S}_{NS}^R + \psi^\dagger\{-Z_1\nabla_t + Z_2\lambda\partial^2 - Z_3\lambda\tau\}\psi + Z_4\frac{g\mu^{\varepsilon/2}\lambda}{2}\{(\psi^\dagger)^2\psi - \psi^\dagger\psi^2\} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi^\dagger \psi \rangle_{1\text{-ir}} &= -\{-i\omega Z_1 + \lambda p^2 Z_2 + \lambda \tau Z_3\} + \frac{1}{2} \text{ (loop diagram) } + \text{ (bubble diagram) } \\
\langle \psi^\dagger \psi^\dagger \rangle_{1\text{-ir}} &= 2\lambda Z_4 + \text{ (bubble diagram) } \\
\langle \psi^\dagger \psi \psi \psi \rangle_{1\text{-ir}} &= -u\mu^\varepsilon \lambda Z_5 + 3 \text{ (fish diagram) } + 3 \text{ (triangle diagram) } + 3 \text{ (triangle diagram) }
\end{aligned}$$

Рис. 1. Однопетлевое приближение для существенных 1-неприводимых функций Грина в модели (16).

для модели Грибова, где $\mathcal{S}_{\text{NS}}^{\text{R}}$ получено из (11) подстановками $\nu_0 \rightarrow \nu Z_\nu$ и $w_0 \nu_0^3 \rightarrow w \mu^\nu \nu^3$ (нелокальный вклад с коррелятором случайной силы в (11) не ренормируется). Здесь и далее τ , u и т.д. – ренормированные аналоги затравочных параметров (без индексов “0”), μ – нормировочная масса, дополнительный произвольный параметр ренормированной теории.

Однопетлевое вычисление констант ренормировки Z_i выполнить легко: фактически в этом приближении нет новых диаграмм Фейнмана по сравнению с моделями (9)–(11) и случаем пассивно переносимого скалярного поля. Точнее говоря, все новые диаграммы для несжимаемой жидкости оказываются УФ-конечными и не дают вклада в Z_i . Этот факт проиллюстрирован для модели А на рис. 1, где в однопетлевом приближении показаны все 1-неприводимые диаграммы, нужные для вычисления констант ренормировки. Сплошные линии со стрелками обозначают затравочный пропагатор $\langle \psi \psi^\dagger \rangle_0$, стрелки указывают на поле $\psi^\dagger$. Сплошные линии без стрелок отвечают пропагатору $\langle \psi \psi \rangle_0$, а волнистые линии обозначают пропагатор поля скорости $\langle v v \rangle_0$. Внешние концы с входящими стрелками отвечают полям $\psi^\dagger$, концы без стрелок – полям ψ . Четверная вершина с одной входящей стрелкой отвечает взаимодействию $-u\mu^\varepsilon \lambda \psi^\dagger \psi^3/3!$, тогда как тройная вершина с одной волнистой линией соответствует $-\psi^\dagger(v\partial)\psi$. Благодаря поперечности поля скорости производная в этой вершине может также быть переброшена на поле $\psi^\dagger$ с помощью интегрирования по частям: $-\psi^\dagger(v\partial)\psi = \psi(v\partial)\psi^\dagger$. Тем самым в каждой диаграмме, содержащей n внешних вершин такого типа, множитель p^n с n внешними импульсами p будет вынесен наружу из соответствующих интегралов. Это уменьшает размерность подынтегральных выражений на n единиц и делает интегралы УФ-сходящимися. В данном случае это доказывает УФ-конечность двух последних диаграмм в функции $\langle \psi^\dagger \psi \psi \psi \rangle_{1\text{-ir}}$ и единственной диаграммы в $\langle \psi^\dagger \psi^\dagger \rangle_{1\text{-ir}}$ (которая иначе расходилась бы логарифмически). Поскольку в наших моделях скалярное поле пассивно (не оказывает обратного влияния на статистику скорости), константа Z_ν в полной модели (14) такая же, как в (11), но с подстановкой $d = 4$.

В схеме минимальных вычитаний однопетлевые выражения для констант Z_i содержат лишь простые полюсы по ε и y и имеют вид

$$Z_1 = Z_4 = 1, \quad Z_3 = 1 + \frac{u}{\varepsilon}, \quad Z_2 = 1 - \frac{w}{4ye(e+1)}, \quad Z_5 = 1 + \frac{3u}{\varepsilon} \quad (18)$$

для модели А,

$$Z_1 = 1 + \frac{u}{4\varepsilon}, \quad Z_3 = 1 + \frac{u}{2\varepsilon}, \quad Z_4 = 1 + \frac{u}{\varepsilon}, \quad Z_2 = 1 + \frac{u}{8\varepsilon} - \frac{w}{4ye(e+1)} \quad (19)$$

для модели Грибова и

$$Z_\nu = 1 - \frac{w}{12y} \quad (20)$$

для обоих случаев (для упрощения вида коэффициентов множитель $1/16\pi^2$ включен в константы u и w).

4. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И СКЕЙЛИНГОВЫЕ РЕЖИМЫ

Уравнения РГ для наших мультипликативно ренормируемых моделей (16), (17) выводятся стандартным образом, подобно аналогичным моделям с полем скорости Крейчнана [17], и мы не будем их приводить.

Как хорошо известно, возможные ИК-скейлинговые режимы ренормируемой модели теории поля связываются с ИК-притягивающими неподвижными точками соответствующих уравнений РГ (см., например, [1], [2]). Для данной точки функции Грина демонстрируют автомодельное (скейлинговое) асимптотическое поведение в ИК-области, с определенными критическими размерностями Δ_F всех полей и параметров F модели. Координаты g_{i*} неподвижных точек находятся из условия обращения в нуль β -функций, соответствующих всем ренормированным константам связи g_i . Тип неподвижной точки определяется матрицей $\Omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial g_k$, где β_i – полный набор β -функций, g_k – полный набор констант связи. Для ИК-притягивающей неподвижной точки матрица Ω положительна, т.е. положительны вещественные части всех ее собственных чисел.

В нашем случае $g_i = \{u, w, e\}$. Физически допустимая неподвижная точка должна быть ИК-притягивающей при некоторых значениях y и ε , а также удовлетворять условиям $u_* > 0$, $w_* > 0$, $e_* > 0$, требуемым по смыслу этих параметров. Функции β_i , вычисленные в однопетлевом приближении по константам ренормировки (18)–(20), имеют вид

$$\beta_u = u \left\{ -\varepsilon + 3u + \frac{w}{2e(e+1)} \right\}, \quad \beta_e = w \left\{ \frac{e}{12} - \frac{1}{4(e+1)} \right\} \quad (21)$$

для модели А,

$$\beta_u = u \left\{ -\varepsilon + \frac{3u}{2} + \frac{w}{2e(e+1)} \right\}, \quad \beta_e = w \left\{ \frac{e}{12} - \frac{1}{4(e+1)} \right\} - \frac{ue}{8} \quad (22)$$

для модели Грибова и

$$\beta_w = w \left\{ -y + \frac{w}{4} \right\} \quad (23)$$

для обеих моделей, с поправками высших порядков по u и w .

Анализ функций (21), (23) выявляет четыре допустимые неподвижные точки модели А.

1. Гауссова (свободная) неподвижная точка: $u_* = w_* = 0$, e_* произвольно. Эта точка ИК-устойчива при $y < 0$, $\varepsilon < 0$. Критические размерности находятся точно:

$$\Delta_\psi = \frac{d}{2} - 1, \quad \Delta_{\psi^\dagger} = \frac{d}{2} + 1, \quad \Delta_\omega = \Delta_\tau = 2.$$

2. Точка $u_* = 0$, $w_* = 4y$, $2e_* = -1 + \sqrt{13}$ (положительный корень уравнения $e(e+1) = 3$), отвечающая пассивно переносимому скалярному полю без самодействия: вершина $\psi^\dagger \psi^3$ в (9) ИК-несущественна в смысле Вильсона. Эта точка ИК-устойчива при $y > 0$, $y > 3\varepsilon/2$. Критические размерности также известны точно:

$$\Delta_\psi = \frac{d}{2} - 1 + \frac{y}{6}, \quad \Delta_{\psi^\dagger} = \frac{d}{2} + 1 - \frac{y}{6}, \quad \Delta_\omega = \Delta_\tau = 2 - \frac{y}{3}.$$

3. Точка $w_* = 0$, $u_* = \varepsilon/3$, e_* произвольно, отвечающая чистой модели А: турбулентный перенос ИК-несуществен¹⁾. Эта точка ИК-устойчива при $y < 0$, $\varepsilon > 0$. Критические размерности зависят только от ε :

$$\Delta_\psi = 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Delta_{\psi^\dagger} = 3 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Delta_\omega = 2, \quad \Delta_\tau = 2 - \frac{\varepsilon}{3},$$

с поправками высших порядков, известными до ε^4 для $\Delta_{\omega, \psi^\dagger}$ [20] и до ε^5 для прочих [1], [2].

4. Наиболее интересная точка $w_* = 4y$, $u_* = \varepsilon/3 - 2y/9$, $2e_* = -1 + \sqrt{13}$, ИК-устойчивая при $y > 0$, $y < 3\varepsilon/2$. Она отвечает новому, в полной мере неравновесному классу универсальности, для которого существенны как самодействие, так и турбулентное перемешивание. Критические размерности здесь вычисляются в форме двойных рядов по ε и y . Однопетлевые выражения таковы:

$$\Delta_\psi = \frac{d}{2} - 1 + \frac{y}{6}, \quad \Delta_{\psi^\dagger} = \frac{d}{2} + 1 - \frac{y}{6}, \quad \Delta_\tau = 2 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{y}{9}, \quad \Delta_\omega = 2 - \frac{y}{3}. \quad (24)$$

Последняя размерность точная, прочие содержат поправки высших порядков по ε и y .

Для случая модели Грибова анализ функций (22), (23) обнаруживает пять допустимых неподвижных точек.

1. Гауссова точка: $u_* = w_* = 0$, e_* произвольно, притягивающая при $y < 0$, $\varepsilon < 0$. Критические размерности здесь таковы:

$$\Delta_\psi = \Delta_{\psi^\dagger} = \frac{d}{2}, \quad \Delta_\omega = \Delta_\tau = 2.$$

2. Точка $u_* = 0$, $w_* = 4y$, $2e_* = -1 + \sqrt{13}$, притягивающая при $y > 0$, $y > 3\varepsilon/2$. Она отвечает пассивно переносимому скаляру без самодействия: вершины $(\psi^\dagger)^2 \psi$ и $\psi^\dagger \psi^2$ в (10) ИК-несущественны. Критические размерности таковы:

$$\Delta_\psi = \Delta_{\psi^\dagger} = \frac{d}{2}, \quad \Delta_\omega = \Delta_\tau = 2 - \frac{y}{3}.$$

¹⁾Это становится очевидным, если с помощью растяжения полей поместить параметр w_0 перед членами взаимодействия $\psi'(v\partial)\psi$, что более привычно для теории поля. Однако мы этого не делаем, чтобы сохранить естественный вид ковариантной производной (5).

Рис. 2. Области ИК-устойчивости неподвижных точек в моделях (14). Номера в рамках отвечают неподвижным точкам 1–5 в тексте.

3. Точка $w_* = 0$, $u_* = 2\varepsilon/3$, $e_* = \infty$, ИК-притягивающая при $y < 0$, $\varepsilon > 0$. Она отвечает чистому процессу Грибова (турбулентный перенос несуществен). Критические размерности зависят только от ε :

$$\Delta_\psi = \Delta_{\psi^\dagger} = 2 - \frac{7\varepsilon}{12}, \quad \Delta_\tau = 2 - \frac{\varepsilon}{4}, \quad \Delta_\omega = 2 - \frac{\varepsilon}{12}, \quad (25)$$

с известными поправками порядка ε^2 [8].

4. Полномасштабная точка, соответствующая новому классу универсальности: $w_* = 4y$, $u_* = 4\varepsilon/5 - 8y/15$, $2e_* = -1 + \sqrt{1 + 40y/(4y - \varepsilon)}$. Эта точка ИК-устойчива при $y > \varepsilon/4$, $y < 3\varepsilon/2$. Размерности вычисляются как двойные ряды по ε и y , однопетлевые выражения для них таковы:

$$\Delta_\psi = \Delta_{\psi^\dagger} = 2 - \frac{3\varepsilon}{5} + \frac{y}{15}, \quad \Delta_\tau = 2 - \frac{y + \varepsilon}{5}, \quad \Delta_\omega = 2 - \frac{y}{3}. \quad (26)$$

Выражение для Δ_ω точное.

5. Точка $u_* = 2\varepsilon/3$, $w_* = 4y$, $e_* = \infty$, ИК-притягивающая при $y > \varepsilon/4$, $\varepsilon > 0$. Эта точка требует внимательной интерпретации. Несмотря на то что значение w_* для нее нетривиально (и поле скорости тем самым негауссово), турбулентное перемешивание оказывается, тем не менее, несущественным. Действительно, прямой анализ функций Грина со скалярными полями ψ , $\psi^\dagger$, например функции (12), показывает, что диаграммы Фейнмана с участием пропагаторов скорости исчезают в пределе $e = \lambda/\nu \rightarrow \infty$, тогда как диаграммы без скорости не зависят от e и остаются конечными. Тем самым с точки зрения физики этот режим подобен режиму (3) и отвечает чистому процессу Грибова, а соответствующие критические размерности действительно совпадают с (25).

На рис. 2 показаны области в плоскости ε – y , в которых перечисленные выше неподвижные точки являются ИК-притягивающими. Рисунок отвечает случаю модели Грибова; для модели А область 5 отсутствует, а границей между областями 3 и 4 является луч $y = 0$, $\varepsilon > 0$. В однопетлевом приближении все границы

между областями даются прямыми линиями; при этом нет ни наложений областей друг на друга, ни пробелов между ними. Благодаря поправкам высших порядков к функциям (21)–(23) границы между областями 2, 4 и 5 могут измениться и стать искривленными. Однако можно показать, что наложения или пробелы не могут появиться и в любом высшем порядке (ср. [17], [21]). Здесь важно, что частные случаи $u = 0$ или $w = 0$ полных моделей “замкнуты по отношению к ренормировке” в том смысле, что функции β_u при $w = 0$ совпадают с β -функциями модели Грибова или модели А, тогда как функции $\beta_{w,e}$ при $u = 0$ совпадают с их аналогами в модели пассивного скалярного поля во всех порядках теории возмущений. Нельзя исключить и возможность того, что отсутствие режима 5 в модели А является свойством однопетлевого приближения, так что он появится на двухпетлевом уровне благодаря нетривиальным вкладам в константы ренормировки $Z_{1,4}$ в (18).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе изучалось влияние турбулентного перемешивания на критическое поведение. Рассматривались два представительных примера динамического критического поведения: модель А, описывающая релаксационную динамику несохраняющегося параметра порядка в равновесной критической системе, и существенно неравновесная модель Грибова, описывающая процессы распространения в реакционно-диффузионных системах. Турбулентное перемешивание моделировалось стохастическим уравнением Навье–Стокса со случайной возбуждающей силой с заданной корреляционной функцией $\propto \delta(t - t')p^{4-d-y}$. Исходные стохастические задачи могут быть переформулированы как мультипликативно ренормируемые модели теории поля, что позволяет применить для анализа их ИК-поведения методы квантово-полевой РГ. Мы показали, что в зависимости от соотношения между размерностью пространства d и показателем y эти модели демонстрируют различные критические режимы, связанные с ИК-притягивающими неподвижными точками уравнений РГ. Для обеих моделей наиболее интересная точка отвечает новому типу критического поведения, для которого важны как нелинейность, так и турбулентный перенос, а критические размерности зависят от обоих параметров d и y . Практический расчет размерностей и областей ИК-устойчивости для всех режимов выполнен в однопетлевом приближении РГ, что соответствует ведущему порядку двойного разложения по y и $\varepsilon = 4 - d$.

Судя по размерностям констант взаимодействия в (15) можно было ожидать, что полномасштабный режим (4) будет осуществляться, когда оба параметра y и ε положительны, но тщательный РГ-анализ показал, что область его ИК-устойчивости в действительности заметно уже: для модели Грибова в однопетлевом приближении она сводится к сектору $\varepsilon/4 < y < 3\varepsilon/2$, тогда как для модели А этот интервал есть $0 < y < 3\varepsilon/2$. Этот эффект ведет к важному физическому предсказанию: вопреки наивному ожиданию, наиболее реалистические значения размерности пространства ($d = 2$ или $d = 3$) и колмогоровского показателя для развитой турбулентности ($y = 4$) лежат в области устойчивости пассивного скалярного поля. Для случая модели Грибова это означает, что распространение примеси (реагента) полностью обусловлено турбулентным переносом. Для равновесной модели А это вызывает в памяти сделанное в работах [10], [11] наблюдение (однако для сохраняющегося параметра порядка и неслучайного поля скорости), что критические флуктуации

подавляются движением жидкости и поведение системы становится близким к пределу среднего поля в сильном сдвиговом течении (см. также обсуждение в [13]).

Интересно сравнить наши результаты с полученными ранее в работах [17], где турбулентность моделировалась ансамблем Крейчнана – не коррелированным во времени гауссовым полем скорости с коррелятором $\propto \delta(t - t')p^{-d-\xi}$. Оказывается, что число и характер критических режимов (свободная теория, пассивное скалярное поле, обычный фазовый переход и новый полномасштабный режим) совпадают для обоих ансамблей. (В случае модели Грибова единый режим пассивного скалярного поля для ансамбля Крейчнана отвечает совокупности двух режимов (3 и 5) для модели Навье–Стокса.) Более того, в однопетлевом приближении области ИК-устойчивости в плоскости ε – y и явные выражения для критических размерностей совпадают для обоих ансамблей (при сравнении результатов для разных ансамблей нужно отождествить y с 3ξ , поскольку $\xi = 4/3$ для ансамбля Крейчнана и $y = 4$ для уравнения Навье–Стокса отвечают колмогоровскому спектру энергии). Такое согласие позволяет заключить, что ансамбль Крейчнана, несмотря на его относительную простоту, может служить приемлемой моделью турбулентного перемешивания.

Благодарности. Авторы признательны Л. Ц. Аджемяну, М. Гнатичу, Ю. Хонконену и М. Ю. Налимову за полезные обсуждения. Авторы благодарят организаторов Третьей международной конференции “Модели в квантовой теории поля,” посвященной 70-летию со дня рождения А. Н. Васильева, за возможность представить результаты данного исследования. Работа выполнена при частичной поддержке РНП (грант № 2.1.1/1575) и РФФИ (грант № 08-02-00125а). А. В. Малышев также благодарит за поддержку фонд “Династия”.

Список литературы

- [1] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Internat. Ser. Monog. Phys., Oxford Univ. Press, New York, 1989.
- [2] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамики*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [3] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1976.
- [4] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasiliev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1999.
- [5] А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен, *ТМФ*, **50**:2 (1982), 195–206.
- [6] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, V. A. Barinov, Yu. S. Kabrits, A. N. Vasil'ev, *Phys. Rev. E*, **64**:5 (2001), 056306, 28 pp., arXiv: nlin/0106023.
- [7] H. Hinrichsen, *Adv. Phys.*, **49**:7 (2000), 815–958, arXiv: cond-mat/0001070; G. Ódor, 2004, **76**:3, 663–724.
- [8] H.-K. Janssen, U. C. Täuber, *Ann. Phys.*, **315**:1 (2004), 147–192, arXiv: cond-mat/0409670.
- [9] Д. Ю. Иванов, *Критическое поведение неидеализированных систем*, Физматлит, М., 2003.
- [10] A. Onuki, K. Kawasaki, *Progr. Theor. Phys.*, **63**:1 (1980), 122–139; A. Onuki, K. Yamazaki, K. Kawasaki, *Ann. Phys.*, **131**:1 (1981), 217–242; T. Imaeda, A. Onuki, K. Kawasaki, *Progr. Theor. Phys.*, **71**:1 (1984), 16–26.
- [11] D. Beysens, M. Gbadamassi, L. Boyer, *Phys. Rev. Lett.*, **43**:17 (1979), 1253–1256; D. Beysens, M. Gbadamassi, *J. Phys. Lett. (Paris)*, **40**:21 (1979), 565–568.

- [12] R. Ruiz, D. R. Nelson, *Phys. Rev. A*, **23**:6 (1981), 3224–3246; **24**:5 (1981), 2727–2734; A. Aronowitz, D. R. Nelson, *Phys. Rev. A*, **29**:4 (1984), 2012–2016.
- [13] C. K. Chan, F. Perrot, D. Beysens, *Phys. Rev. Lett.*, **61**:4 (1988), 412–415; F. Perrot, C. K. Chan, D. Beysens, *Europhys. Lett.*, **9**:1 (1989), 65–70; C. K. Chan, F. Perrot, D. Beysens, *Phys. Rev. A*, **43**:4 (1991), 1826–1839; C. K. Chan, *Chinese J. Phys.*, **28**:1 (1990), 75–78.
- [14] G. Satten, D. Ronis, *Phys. Rev. Lett.*, **55**:1 (1985), 91–94; *Phys. Rev. A*, **33**:5 (1986), 3415–3432.
- [15] N. V. Antonov, M. Hnatich, J. Honkonen, *J. Phys. A*, **39**:25 (2006), 7867–7887, arXiv: cond-mat/0604434.
- [16] N. V. Antonov, A. A. Ignatieva, *J. Phys. A*, **39**:44 (2006), 13593–13620, arXiv: cond-mat/0607019; N. V. Antonov, A. A. Ignatieva, A. V. Malyshev, *Phys. Part. Nucl.*, **41**:7 (2010), 998–1000, arXiv:1003.2855; Н. В. Антонов, А. В. Малышев, *ТМФ*, **167**:1 (2011), 50–77.
- [17] N. V. Antonov, V. I. Iglovikov, A. S. Kapustin, *J. Phys. A*, **42**:13 (2009), 135001, 19 pp., arXiv:0808.0076; N. V. Antonov, A. S. Kapustin, *J. Phys. A*, **43**:40 (2010), 405001, 22 pp., arXiv:1006.3133.
- [18] G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola, *Rev. Mod. Phys.*, **73**:4 (2001), 913–975, arXiv: cond-mat/0105199.
- [19] N. V. Antonov, *J. Phys. A*, **39**:21 (2006), 7825–7865.
- [20] Л. Ц. Аджемян, С. Н. Новиков, Л. Сладкофф, *Вестн. СПбГУ. Сер. 4: физика, химия*, 2008, № 4, 110–114; arXiv:0808.1347.
- [21] H.-K. Janssen, K. Oerding, F. van Wijland, H. J. Hilhorst, *Eur. Phys. J. B*, **7**:1 (1999), 137–145, arXiv: cond-mat/9807155; H.-K. Janssen, O. Stenull, *Phys. Rev. E*, **78**:6 (2008), 061117, 12 pp., arXiv:0809.2344.