Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Гнатич, Ю. Хонконен, Т. Лучивянки, Исследование
аномальной кинетики реакции аннигиляции $A + A \rightarrow \emptyset$,
ТМФ, 2011, том 169, номер 1, 137–145

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6715>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:51:48

© 2011 г. М. Гнатич^{*†}, Ю. Хонконен[‡], Т. Лучивянский^{*†}

ИССЛЕДОВАНИЕ АНОМАЛЬНОЙ КИНЕТИКИ РЕАКЦИИ АННИГИЛЯЦИИ $A + A \rightarrow \emptyset$

С помощью пертурбативной ренормализационной группы исследуется влияние случайного поля скоростей на кинетику одночастичных реакций аннигиляции $A + A \rightarrow \emptyset$ в критической размерности $d_c = 2$ и в низших размерностях. Для приведения стохастической задачи к теоретико-полевому виду используется формализм вторичного квантования Дои. Реакция в пространствах с размерностями $d \sim 2$ исследуется с помощью двухпараметрического разложения по параметрам ϵ , Δ , где ϵ – отклонение от колмогоровского параметра масштабирования, а Δ – отклонение от пространственной размерности $d = 2$. Все необходимые величины, включая фиксированные точки с их бассейнами стабильности, вычислены вплоть до второго порядка теории возмущений.

Ключевые слова: ренормализационная группа, кинетика реакций, вторичное квантование, размерный анализ, эффективное действие.

1. ВВЕДЕНИЕ

Реакция аннигиляции $A + A \rightarrow \emptyset$ в случае, когда реагенты подвержены влиянию внешнего адвективного поля, представляет собой один из простейших примеров нелинейной статистической системы. Этот вид реакций наблюдается в разнообразных химических, биологических и физических системах. Типичным примером такой стохастической системы оказываются загрязнения атмосферы Земли. Для реакций такого типа в низших пространственных размерностях обычное описание с помощью уравнений кинетических скоростей оказывается недостаточным, и должны приниматься в расчет эффекты флуктуаций плотности. Такой эффект обязан своим происхождением физике диффузии [1], [2].

Теоретический анализ реакций этого типа в случае не зависящего от времени случайного блуждания был проведен в работе [3]. Заметим, однако, что более приближенное к реальности описание эффектов флуктуаций скоростей требует учета

^{*}Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences, Košice, Slovakia.
E-mail: hntatic@saske.sk, lucivjansky@saske.sk

[†]Faculty of Sciences, P.J. Šafárik University, Košice, Slovakia

[‡]Department of Military Technology, National Defence University, Helsinki, Finland.
E-mail: juha.honkonen@helsinki.fi

случайных блужданий, зависящих от времени. Наиболее подходящий для такого явления подход должен использовать стохастическое уравнение Навье–Стокса [4]. Чтобы получить представление о задаче, полезно рассмотреть флуктуации скоростей в упрощенной модели, вычисления в которой оказываются более простыми. В настоящей работе адвективное поле скоростей моделируется с помощью модели Крейчнана с конечным временем корреляций [5]. Применение этой модели связано не только с ее простотой, но также и с тем обстоятельством, что в указанной модели воспроизводятся многие явления, наблюдаемые в настоящих процессах турбулентного переноса вещества [6]. Эта модель допускает два специальных предела: предел автомодельного поля скоростей, описываемого белым шумом по времени (“быстро меняющаяся мода”), и предел не зависящего от времени (замороженного) поля скоростей. Мы рассматриваем оба эти предела.

В настоящей работе поведение реакции аннигиляции $A + A \rightarrow \emptyset$ при больших временах исследуется в присутствии синтетического поля скоростей в его критической размерности $d_c = 2$ и при низших значениях размерности. При приведении члена, отвечающего за реакцию, к теоретико-полевому виду используется формализм вторичного квантования Доу [7]. Предполагается, что поле скоростей обладает гауссовой статистикой с конечным временем корреляции. Для реакций такого типа строится теоретическая модель и с помощью пертурбативной ренормализационной группы вычисляются различные возможные инфракрасные (ИК) режимы поведения с точностью до второго порядка.

2. ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВАЯ МОДЕЛЬ

Классическую систему, описывающую реакцию, можно сформулировать в терминах схемы вторичного квантования с применением операторов рождения и уничтожения ψ и $\psi^\dagger$ и вакуумного состояния $|0\rangle$ [7], удовлетворяющих стандартным коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{x}')] &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}')] &= [\psi^\dagger(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{x}')] = 0, \\ \psi(\mathbf{x})|0\rangle &= 0, \quad \langle 0|\psi^\dagger(\mathbf{x}) = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначив через $P(\{n_i\}, t)$ совместную плотность распределения вероятности обнаружения n_i частиц с местоположениями $\mathbf{x}_i$, получим, что вектор состояния классической многочастичной системы задается суммой по всем числам заполнения:

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_{n_i} P(\{n_i\}, t) |\{n_i\}\rangle, \quad (2)$$

где базисные векторы условно определены как

$$|\{n_i\}\rangle = \prod_i [\psi^\dagger(\mathbf{x}_i)]^{n_i} |0\rangle. \quad (3)$$

Теперь полный набор связанных уравнений на функции плотностей вероятности можно переписать в компактном виде [1], [7]:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Phi(t)\rangle = -\hat{H} |\Phi(t)\rangle, \quad (4)$$

где $\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_D + \hat{H}_R$. Можно показать (см. [8]), что для исследуемой реакции аннигиляции эти члены, отвечающие адвекции, диффузии и реакции, имеют вид соответственно

$$\begin{aligned}\hat{H}_A &= \int d\mathbf{x} \psi^\dagger \nabla [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x})], \\ \hat{H}_D &= -D_0 \int d\mathbf{x} \psi^\dagger \nabla^2 \psi(\mathbf{x}), \\ \hat{H}_R &= \lambda_0 D_0 \int d\mathbf{x} (\psi^\dagger)^2 \psi^2.\end{aligned}\quad (5)$$

По соображениям размерности постоянная диффузии D_0 выделена из постоянной скорости реакции $K = \lambda_0 D_0$. Можно выразить средние значения физических величин [8] с помощью соотношения

$$\langle A(t) \rangle = \left\langle 0 \left| T \left(A \{ [\psi^\dagger(t) + 1] \psi(t) \} \exp \left(- \int_0^\infty \hat{H}'_I dt + n_0 \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}, 0) \right) \right) \right| 0 \right\rangle. \quad (6)$$

Математическое ожидание упорядоченного по времени произведения (6) можно с помощью стандартной операции [9] привести к виду функционального интеграла по комплексно-сопряженным скалярным полям $\psi^\dagger(\mathbf{x}, t)$ и $\psi(\mathbf{x}, t)$:

$$\langle A(t) \rangle = \int \mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\psi A \{ [\psi^\dagger(t) + 1] \psi(t) \} e^{S_1}, \quad (7)$$

где неперенормированное действие S_1 для реакции аннигиляции $A + A \rightarrow \emptyset$ имеет вид

$$\begin{aligned}S_1 &= - \int_0^\infty dt \int d\mathbf{x} \left\{ \psi^\dagger \partial_t \psi + \psi^\dagger \nabla (\mathbf{v} \psi) - D_0 \psi^\dagger \nabla^2 \psi + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_0 D_0 [2\psi^\dagger + (\psi^\dagger)^2] \psi^2 + n_0 \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}, 0) \right\}.\end{aligned}\quad (8)$$

Наиболее реалистическое описание поля скорости $\mathbf{v}(x)$ основано на применении стохастического уравнения Навье–Стокса. Однако в настоящей работе будет исследована упрощенная модель, в которой статистические свойства поля скоростей предписываются. Предположим, что $\mathbf{v}(x)$ – это случайная гауссова переменная с нулевым средним и с корреляционной функцией вида

$$\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = \int \frac{d\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^{d+1}} P_{ij}(\mathbf{k}) D_v(\omega, \mathbf{k}) \exp[-i\omega(t - t') + i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')]. \quad (9)$$

Здесь $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – оператор поперечной проекции, $k = |\mathbf{k}|$ – волновое число, и предполагается, что функция ядра оператора D_v имеет следующий вид:

$$D_v(\omega, \mathbf{k}) = \frac{g_0 D_0^3 k^{2-2\Delta-2\epsilon}}{\omega^2 + u_0^2 D_0^2 (k^{2-\eta})^2}, \quad (10)$$

где g_0 – константа связи (малый параметр в стандартной теории возмущений) и показатели степеней ϵ , Δ и η играют роль малых параметров разложения. Их следует рассматривать в качестве аналогов параметра разложения $\epsilon = 4 - d$ в обычной

размерной регуляризации. Тем не менее в настоящей работе параметр ϵ следует понимать как отклонение показателя степени степенного закона от показателя степени колмогоровского масштабного преобразования [6], а параметр Δ определен как отклонение от пространственной размерности $d = 2$, задаваемое соотношением $d = 2 + 2\Delta$. Показатель степени η описывает обратное время корреляции при волновом числе k . Параметр u_0 можно использовать для нумерации фиксированных точек, и он имеет смысл отношения корреляционного времени для скорости и времени скалярного перекидывания (scalar turnover time) [5]. Хотя в реальных вычислениях ϵ интерпретируется как малый параметр, в реалистической задаче значение этого параметра $\epsilon = 4/3$. Интересно отметить, что модель для адвективного поля $\mathbf{v}(x)$ содержит два особенно интересных случая:

а) в пределе $u_0 \rightarrow \infty$, $g'_0 \equiv g_0/u_0^2 = \text{const}$ получается модель “быстрых изменений” $D_v(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow g'_0 D_0 k^{-2-2\Delta-2\epsilon+\eta}$, которая характеризуется коррелятором скоростей с белым шумом по времени;

б) предел $u_0 \rightarrow 0$, $g''_0 \equiv g_0/u_0 = \text{const}$ отвечает случаю замороженного поля скоростей $D_v(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow g''_0 D_0^2 \pi \delta(\omega) k^{2\Delta-2\epsilon}$ (поле скоростей не зависит от времени).

Процедуру усреднения относительно поля скоростей $\mathbf{v}(x)$ можно выполнить с помощью следующего функционала действия:

$$S_2 = -\frac{1}{2} \int dt dt' d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) D_v^{-1}(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{v}(t', \mathbf{x}'), \quad (11)$$

где D_v^{-1} – функция, обратная к корреляционной функции (9) (в смысле преобразования Фурье). Математическое ожидание любой существенной физической наблюдаемой можно вычислить с помощью полного функционала весов $\mathcal{W}(\psi^\dagger, \psi, \mathbf{v}) = e^{S_1 + S_2}$, в котором S_1 и S_2 суть функционалы действий (8) и (11).

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СТЕПЕНЕЙ И УЛЬТРАФИОЛЕТОВАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА

Применение схемы минимальных вычитаний при вычислении констант перенормировки требует проведения анализа возможных мнимых расходимостей. При подсчете показателей степеней в действиях (8) и (11) используется схема работы [4], в которой каждой величине Q приписывались две канонических размерности: одна относительно волнового числа d_Q^k , а другая – относительно частоты d_Q^ω . Нормировки для этих двух размерностей имеют условный характер: $d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1$, $d_k^k = -d_x^k = 1$ и $d_k^\omega = d_\omega^k = 0$. Канонические (инженерные) размерности для полей и параметров получаются из условия, что действия представляют собой безразмерные величины.

Квадратичная часть действия (8) определяет канонические размерности только для произведений полей $\psi^\dagger \psi$. Чтобы оба члена в нелинейной части действия

$$\lambda_0 D_0 \int dt d\mathbf{x} [2\psi^\dagger + (\psi^\dagger)^2] \psi^2$$

давали ненулевой вклад, необходимо, чтобы поле $\psi^\dagger$ было безразмерным. Если поле $\psi^\dagger$ имеет положительную каноническую размерность, то член четвертого порядка по полю следует опустить, так как в соответствии с подсчетом показателей степеней этот член не должен давать вклада. Действие, содержащее только член третьего

порядка, не задает петлевого интеграла, отвечающего флуктуациям плотности, а потому не представляет интереса с точки зрения анализа эффектов, приносимых флуктуациями.

Принимая эту схему, получим канонические размерности для полей и параметров в d -мерном пространстве, приведенные в таблице. Величина $d_Q = 2d_Q^\omega + d_Q^k$ представляет собой полную каноническую размерность, определяемую из условия однородного масштабирования параболического дифференциального оператора диффузии при преобразовании $k \rightarrow \mu k$, $\omega \rightarrow \mu^2 \omega$.

Q	ψ	$\psi^\dagger$	v	D_0	u_0	λ	g_0
d_Q^k	d	0	-1	-2	η	$2 - d$	$2\epsilon + \eta$
d_Q^ω	0	0	1	1	0	0	0
d_Q	d	0	1	0	η	$2 - d$	$2\epsilon + \eta$

Модель оказывается логарифмической при $\epsilon = \Delta = 0$; при этом ультрафиолетовые (УФ) расходимости проявляются в виде полюсов, возникающих при различных значениях линейных комбинаций величин ϵ и Δ . Полная каноническая размерность произвольной одночастично-неприводимой (1PI) функции Грина $\Gamma = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1\text{-ir}}$ задается соотношением

$$d_\Gamma = d + 2 - N_\Phi d_\Phi, \quad (12)$$

где $N_\Phi = \{N_{\psi^\dagger}, N_\psi, N_v\}$ суть числа заполнения соответствующих внешних полей. Мнимые УФ-расходимости могут появляться только в тех функциях Грина, в которых d_Γ принимает неотрицательные целые значения. Хотя каноническая размерность поля $\psi^\dagger$ равна нулю, пролиферация мнимых расходящихся графов с произвольным числом внешних $\psi^\dagger$ -линий не имеет места в силу неравенства $n_{\psi^\dagger} \leq n_\psi$, в справедливости которого легко убедиться с помощью непосредственного анализа графов [1]. В работе [5] было показано, что расходимости в (1PI) функциях Грина, содержащих по крайней мере одно поле скорости $\mathbf{v}$, можно устранить введением всего лишь одного контрчлена вида $\psi^\dagger \partial^2 \psi$, что приводит к следующей перенормировке параметров g_0 , D_0 и u_0 :

$$D_0 = D Z_D, \quad g_0 = g \mu^{2\epsilon+\eta} Z_g, \quad u_0 = u \mu^\eta Z_u, \quad (13)$$

где μ – опорная масса в схеме минимальных вычитаний. Перенормировочные константы Z_g , Z_u и Z_D удовлетворяют соотношениям

$$Z_g = Z_D^{-3}, \quad Z_u = Z_D^{-1}. \quad (14)$$

Следует отметить, что графы, отвечающие $\Gamma_{\psi^\dagger \psi \psi}$ и $\Gamma_{\psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi}$, отличаются только одной внешней вершиной, а потому приводят к одинаковой перенормировке постоянной скорости реакции $\lambda_0 D_0$. Расходимости, присутствующие в этих (1PI) функциях Грина, могут быть устранены с помощью следующей перенормировки параметра λ_0 :

$$\lambda_0 = \lambda \mu^{-2\Delta} Z_D^{-1} Z_\lambda. \quad (15)$$

Явный вид перенормировочных констант Z_D и Z_λ в приближении двух петель содержится в приложении.

4. ФИКСИРОВАННЫЕ ТОЧКИ

Коэффициентные функции оператора ренормализационной группы

$$D_{\text{RG}} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_0 = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_{g_i} \beta_i \frac{\partial}{\partial g_i} - \gamma_D D \frac{\partial}{\partial D}, \quad (16)$$

где индексом “0” отмечаются неодетые параметры, определяются как

$$\gamma_D = \mu \frac{\partial \ln Z_D}{\partial \mu} \Big|_0, \quad \beta_i = \mu \frac{g_i}{\mu} \Big|_0 \quad (17)$$

с зарядами $g_i = \{g, u, \lambda\}$. Из этого определения и из соотношений (13)–(15) следует, что

$$\beta_g = g(-2\epsilon - \eta + 3\gamma_D), \quad \beta_u = u(-\eta + \gamma_D), \quad \beta_\lambda = \lambda(2\Delta - \gamma_\lambda + \gamma_D). \quad (18)$$

Режимы масштабирования связаны с фиксированными точками соответствующих ренормализационных функций. Фиксированные точки определяются как такие точки g^*, u^*, λ^* , в которых β -функции обращаются в нуль:

$$\beta_g(g^*, u^*, \lambda^*) = \beta_u(g^*, u^*, \lambda^*) = \beta_\lambda(g^*, u^*, \lambda^*) = 0. \quad (19)$$

Тип фиксированной точки определяется собственными значениями матрицы $\Omega = \{\Omega_{ik} = \partial \beta_i / \partial g_k\}$, где β_i – полный набор β -функций (18), а g_k – полный набор зарядов $\{g, u, \lambda\}$. ИК-асимптотическое поведение определяется ИК-стабильными фиксированными точками, в которых все собственные значения матрицы Ω положительны.

Легко видеть, что функции β_g и β_u удовлетворяют соотношению $\beta_g/g - 3\beta_u/u = 2(\eta - \epsilon)$, из которого следует, что они не могут одновременно обращаться в нуль при конечных значениях зарядов g и u . Единственным исключением оказывается точка $\epsilon = \eta$, которую необходимо исследовать отдельно. В общем случае при $\epsilon \neq \eta$ следует положить или $u = 0$, или $u = \infty$ и произвести масштабное преобразование параметра g таким образом, чтобы величина γ_D оставалась конечной [10].

Ниже представлены результаты расчета фиксированных точек, аномальных размерностей и собственных значений матрицы Ω вплоть до второго порядка теории возмущений. Тем не менее следует отметить, что формулы для β -функций (18) позволяют вычислить аномальные размерности γ_D и γ_λ точно (не прибегая к поправкам второго порядка).

В работе [5] сделано предположение о независимости константы перенормировки Z_D от показателей степеней η на уровне двухпетлевого приближения. Из этого предположения следует, что можно просто положить $\eta = 0$, что и было сделано в наших вычислениях перенормировочных констант Z_D и Z_λ .

Рассмотрим “моду быстрых изменений” ($u \rightarrow \infty$). Удобно ввести новые переменные $w = 1/u$, $g' = g/u^2$ и соответствующие β -функции вида

$$\beta_{g'} = g'(\eta - \epsilon + \gamma_D), \quad \beta_w = w(\eta - \gamma_D), \quad \beta_\lambda = \lambda(2\Delta - \gamma_\lambda + \gamma_D). \quad (20)$$

“Мода быстрых изменений” отвечает фиксированной точке с $w^* = 0$. В этом случае имеют место четыре ИК-стабильные фиксированные точки:

$$\begin{aligned}
\text{FP 1A: } w^* &= 0, \quad g'^* = 0, \quad \lambda^* = 0, \\
\gamma_D &= 0, \quad \gamma_\lambda = 0, \\
\Omega_1 &= \eta - 2\epsilon, \quad \Omega_2 = \eta, \quad \Omega_3 = 2\Delta;
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\text{FP 1B: } w^* &= 0, \quad g'^* = 0, \quad \lambda^* = -4\pi\Delta, \\
\gamma_D &= 0, \quad \gamma_\lambda = 2\Delta, \\
\Omega_1 &= \eta - 2\epsilon, \quad \Omega_2 = \eta, \quad \Omega_3 = -2\Delta;
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\text{FP 2A: } w^* &= 0, \quad g'^* = 8\pi(2\epsilon - \eta), \quad \lambda^* = 0, \\
\gamma_D &= 2\epsilon - \eta, \quad \gamma_\lambda = 0, \\
\Omega_1 &= 2\epsilon - \eta, \quad \Omega_2 = 2\eta - 2\epsilon, \quad \Omega_3 = 2\Delta + 2\epsilon - \eta;
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\text{FP 2B: } w^* &= 0, \quad g'^* = 8\pi(2\epsilon - \eta), \\
\lambda^* &= -2\pi(2\Delta + 2\epsilon - \eta) - \pi \frac{2\Delta + 2\epsilon - \eta}{\epsilon} (2\epsilon - \eta)(\Delta + \epsilon), \\
\gamma_D &= 2\epsilon - \eta, \quad \gamma_\lambda = 2\Delta + 2\epsilon - \eta, \\
\Omega_1 &= 2\epsilon - \eta, \quad \Omega_2 = 2\eta - 2\epsilon, \quad \Omega_3 = -2\Delta - 2\epsilon + \eta.
\end{aligned} \tag{24}$$

При анализе режима $u \rightarrow 0$ (замороженное поле скоростей) вводится новая переменная $g'' \equiv g/u^2$. Таким образом, соответствующие β -функции имеют вид

$$\beta_{g''} = g''(-2\epsilon + 2\gamma_D), \quad \beta_u = u(-\eta + \gamma_D), \quad \beta_\lambda = \lambda(2\Delta - \gamma_\lambda + \gamma_D). \tag{25}$$

В этом случае также возникают четыре возможные ИК-стабильные фиксированные точки:

$$\begin{aligned}
\text{FP 3A: } u^* &= 0, \quad g''^* = 0, \quad \lambda^* = 0, \\
\gamma_D &= 0, \quad \gamma_\lambda = 0, \\
\Omega_1 &= -2\epsilon, \quad \Omega_2 = -\eta, \quad \Omega_3 = 2\Delta;
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
\text{FP 3B: } u^* &= 0, \quad g''^* = 0, \quad \lambda^* = -4\pi\Delta, \\
\gamma_D &= 0, \quad \gamma_\lambda = 2\Delta, \\
\Omega_1 &= -2\epsilon, \quad \Omega_2 = -\eta, \quad \Omega_3 = -2\Delta;
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\text{FP 4A: } u^* &= 0, \quad g''^* = 8\pi\epsilon + 2\pi(4\Delta + 3\epsilon)\epsilon, \quad \lambda^* = 0, \\
\gamma_D &= \epsilon, \quad \gamma_\lambda = 0, \\
\Omega_1 &= 2\epsilon - \frac{4\Delta + 3\epsilon}{2}\epsilon, \quad \Omega_2 = -\eta + \epsilon, \quad \Omega_3 = 2\Delta + \epsilon;
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\text{FP 4B: } u^* &= 0, \quad g''^* = 8\pi\epsilon + 2\pi(4\Delta + 3\epsilon)\epsilon, \\
\lambda^* &= -2\pi(2\Delta + \epsilon) + \pi(2\Delta + \epsilon)(Q\epsilon - \Delta), \quad \gamma_D = \epsilon, \quad \gamma_\lambda = 2\Delta + \epsilon, \\
\Omega_1 &= 2\epsilon - \frac{4\Delta + 3\epsilon}{2}\epsilon, \quad \Omega_2 = -\eta + \epsilon, \quad \Omega_3 = -2\Delta - \epsilon,
\end{aligned} \tag{29}$$

где $Q = 1.159$ – числовая постоянная, задаваемая простым, но громоздким двухпетлевым интегралом.

В специальном случае $\epsilon = \eta$ функции β_g и β_u становятся пропорциональными друг другу, что приводит к вырождению фиксированной точки. Вместо обычной фиксированной точки при этом появляется прямая фиксированных точек в плоскости $g - u$:

$$\begin{aligned} \text{FP 5A: } \quad & \lambda^* = 0, \\ & \gamma_D = \epsilon, \quad \gamma_\lambda = 0, \\ & \Omega_1 = G_1(u^*)\epsilon + G_2(u^*)\epsilon, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 2\Delta + \epsilon; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{FP 5B: } \quad & \lambda^* \neq 0, \\ & \gamma_D = \epsilon, \quad \gamma_\lambda = 2\Delta + \epsilon, \\ & \Omega_1 = G_1(u^*)\epsilon + G_2(u^*)\epsilon, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = -2\Delta - \epsilon, \end{aligned} \quad (31)$$

где функции G_1 и G_2 задаются формулами

$$\begin{aligned} G_1(u^*) &= \frac{u^* + 2}{u^* + 1}, \\ G_2(u^*) &= -\frac{1}{4(1 + u^*)} \left[u(3u^3 + 15u^2 + 26u + 18) \ln \frac{u^2 + 2u}{(1 + u)^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2(4\xi + 3) + 3u^2 + 9u \right], \end{aligned}$$

величина ξ определена соотношением $\Delta = \xi\epsilon$. Нулевое собственное значение Ω_2 связано с существованием предельного направления в плоскости $g - u$ (вдоль прямой фиксированных точек).

Актуальная задача отвечает значению $\epsilon = 4/3$, которое приводит к знаменитому колмогоровскому “закону пяти третей” [6] в статистике пространственных скоростей. С помощью прямых численных расчетов можно легко показать, что в этом случае ($\epsilon = 4/3$) собственное значение Ω_1 положительно. Разумеется, это выполняется только для физически возможных значений параметров u и ξ . Следует рассмотреть случай, при котором $u > 0$ и $\xi < 0$, что отвечает пространственным измерениям $d < 2$. Отсюда можно заключить, что все фиксированные точки на указанной прямой оказываются ИК-стабильными.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию кинетики реакции аннигиляции $A + A \rightarrow \emptyset$. Применение техники пертурбативной ренормировочной группы потребовало построения теоретико-полевой модели. Все вычисления проводились с точностью до второго порядка приближений в теории возмущений. Были вычислены ИК-стабильные фиксированные точки, размерности и соответствующие бассейны стабильности фиксированных точек.

Сравнительно простая технически модель флуктуаций скоростей, применявшаяся в настоящей работе, оказывается удобной отправной точкой для более реалистических вычислений в старших петлях, основанных на стохастическом уравнении Навье–Стокса. Эти вычисления почти завершены, и авторы надеются представить их результаты в скором будущем.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Явный вид перенормировочных констант Z_D и Z_λ

Для краткости мы используем следующую нормировку зарядов:

$$\bar{g} = \frac{g}{4u(1+u)} \frac{S_d}{(2\pi)^d}, \quad \bar{\lambda} = \lambda \frac{S_d}{(2\pi)^d}, \quad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

В размерности пространства $d = 2$ представлены следующие результаты:

$$\begin{aligned} Z_D &= 1 - \frac{\bar{g}}{2\epsilon} + A(u) \frac{\bar{g}^2}{2\epsilon} - \frac{1}{2(1+u)} \frac{\bar{g}^2}{(2\epsilon)^2}, \\ A(u) &= \frac{1}{8(1+u)} \left[4\xi + 3 + u + u(u+2)(u+3) \ln \frac{u^2 + 2u}{(1+u)^2} \right], \\ Z_\lambda &= 1 - \frac{\bar{\lambda}}{2\Delta} + \frac{\bar{\lambda}^2}{(2\Delta)^2} + B(u) \frac{\bar{g}\bar{\lambda}}{2(\epsilon - \Delta)} - \frac{\bar{g}\bar{\lambda}}{4\Delta(\epsilon - \Delta)}, \\ B(u) &= -\frac{1}{2} \left[\xi + 1 + \ln \frac{1+u}{2} + (2u+1) \ln \frac{2u+1}{2u+2} \right] + \frac{2(1+u)}{\pi} \int_{-1}^1 dz F(z), \\ F(z) &= \frac{(1-z^2)^{1/2}}{(1-u)^2 + 4uz^2} \left\{ \frac{u-1}{2} \ln \frac{1+u}{2} - \frac{2(1+u)z}{\sqrt{1-z^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(u+3)z}{\sqrt{2(1+u)-z^2}} \left[\pi - \arctan \frac{z+u+1}{\sqrt{2(1+u)-z^2}} - \arctan \frac{2+z}{\sqrt{2(1+u)-z^2}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Благодарности. Работа поддержана Slovak Academy of Sciences and Centre of Excellency for Nanofluid of IEP SAS (грант VEGA 0173), а также программой “Кооперативные явления и фазовые переходы в наносистемах с перспективным использованием в нано- и биотехнологиях” (проекты № 26220120021, 26220120033). Частичное финансирование работы осуществлялось Operational research and development program European Regional Development Fund.

Список литературы

- [1] B. P. Lee, *J. Phys. A*, **27**:8 (1994), 2633–2652, arXiv:cond-mat/9311064.
- [2] J. Cardy, U. C. Täuber, *Phys. Rev. Lett.*, **77**:23 (1996), 4780–4783, arXiv:cond-mat/9609151.
- [3] M. W. Deem, J.-M. Park, *Phys. Rev. E*, **57**:3 (1998), 2681–2685, arXiv:cond-mat/9707254.
- [4] Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, *ТМФ*, **57**:2 (1983), 268–281.
- [5] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, J. Honkonen, *Phys. Rev. E*, **66**:3 (2002), 036313, 11 pp., arXiv:nlin/0204044.
- [6] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [7] M. Doi, *J. Phys. A*, **9**:9 (1976), 1465–1477; 1479–1495.
- [8] M. Hnatich, J. Honkonen, *Phys. Rev. E*, **61**:4 (2000), 3904–3911.
- [9] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1976.
- [10] N. V. Antonov, *Physica D*, **144**:3–4 (2000), 370–386.