Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Боголюбов, К. Л. Малышев, Изинговский предел XXZ -магнетика Гейзенберга и некоторые температурные корреляционные функции, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 2, 179–193

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6720>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:33:15

© 2011 г. Н. М. Боголюбов*, К. Л. Малышев*

ИЗИНГОВСКИЙ ПРЕДЕЛ XXZ -МАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА И НЕКОТОРЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Рассматривается гейзенберговский XXZ -магнетик спина $1/2$ в случае, когда параметр анизотропии стремится к бесконечности (так называемый изинговский предел). Найдена температурная корреляционная функция ферромагнитной струны над основным состоянием. Подход к вычислению корреляционных функций основан на том, что волновая функция в рассматриваемом пределе выражается в терминах симметрических функций Шура. Показано, что при низких температурах амплитуда асимптотики данной корреляционной функции пропорциональна квадрату числа строгих плоских разбиений в ящике.

Ключевые слова: магнетик Гейзенберга, изинговский предел, корреляционные функции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Изинга была одной из любимых моделей А. Н. Васильева. Его исследования были сконцентрированы на скейлинговых свойствах указанной модели [1], [2]. Примечательно, что гамильтониан гейзенберговской XXZ -цепочки спина $1/2$ переходит в гамильтониан одномерной модели Изинга в специальном пределе, когда параметр анизотропии стремится к бесконечности [3]. Данный предел принято называть *изинговским пределом* XXZ -цепочки [4]. В настоящей статье мы будем изучать изинговский предел XXZ -магнетика, пользуясь эффективным гамильтонианом, который перестановочен с изинговским гамильтонианом и имеет общую с ним полную систему собственных функций. Указанный эффективный гамильтониан является подходящим объектом при изучении изинговского предела благодаря тому, что он связан с трансфер-матрицей четырехвершинной модели, возникающей в пределе бесконечной анизотропии из трансфер-матрицы шестивершинной модели. В свою очередь тождества следов связывают гамильтониан XXZ -модели и трансфер-матрицу шестивершинной модели.

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: malyshev@pdmi.ras.ru

Проблема вычисления корреляционных функций XXZ -модели Гейзенберга в рамках квантового метода обратной задачи [5] потребовала серьезных усилий исследователей [6]–[11]. Мы покажем, что вычисление корреляционных функций в изинговском пределе тесно связано с теорией симметрических функций [12], а значит, имеет непосредственное отношение к таким задачам перечислительной комбинаторики, как случайные блуждания недружественных пешеходов [13]–[17] и перечисление плоских разбиений в ящике [18], [19]. В настоящей статье мы вычисляем температурные корреляционные функции ферромагнитной струны над основным состоянием, используя подход, развитый в работах [20]–[24].

Гейзенберговский XXZ -магнетик спина $1/2$ задан на одномерной решетке, которая состоит из $M + 1$ узла, узлы пронумерованы элементами множества $\mathcal{M} \equiv \{0 \leq k \leq M, k \in \mathbb{Z}\}$, $M + 1 = 0 \pmod{2}$. Соответствующий спиновый гамильтониан определяется следующим образом:

$$\hat{H}_{XXZ} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \left(\sigma_{k+1}^- \sigma_k^+ + \sigma_{k+1}^+ \sigma_k^- + \frac{\Delta}{2} (\sigma_{k+1}^z \sigma_k^z - 1) + h \sigma_k^z \right), \quad (1)$$

где параметр $\Delta \in \mathbb{R}$ описывает анизотропию модели, через h обозначено внешнее магнитное поле. Локальные спиновые операторы $\sigma_k^\pm = (\sigma_k^x \pm i\sigma_k^y)/2$ и σ_k^z , зависящие от решеточного аргумента $k \in \mathcal{M}$, определены стандартно (см. монографии [6], [7]), а их перестановочные соотношения задаются как $[\sigma_k^+, \sigma_l^-] = \delta_{k,l} \sigma_l^z$ и $[\sigma_k^z, \sigma_l^\pm] = \pm 2\delta_{k,l} \sigma_l^\pm$. Пространство состояний натянуто на векторы состояния вида $\bigotimes_{k=0}^M |s\rangle_k$, где s равно либо $\uparrow$ (спин вверх), либо $\downarrow$ (спин вниз). Состояния спинов $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ образуют естественный базис в линейном пространстве $\mathbb{C}^2$ таким образом, что

$$|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Мы налагаем периодические граничные условия $\sigma_{k+(M+1)}^\# = \sigma_k^\#$. Гамильтониан (1) коммутирует с оператором третьей компоненты полного спина $\hat{S}^z$:

$$[\hat{H}_{XXZ}, \hat{S}^z] = 0, \quad \hat{S}^z \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \sigma_k^z.$$

Чтобы представить N -частичные векторы состояния $|\Psi_N(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle$, будем обозначать узлы со спинами вниз при помощи координат μ_i , образующих строгое разбиение $\boldsymbol{\mu} \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$, где $M \geq \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N \geq 0$ (здесь и далее мы используем жирные буквы в качестве сокращенных обозначений для соответствующих наборов из N чисел). Существует соответствие между каждым разбиением и некоторой последовательностью нулей и единиц следующего вида: $\{e_k \equiv e_k(\boldsymbol{\mu})\}_{k \in \mathcal{M}}$, где $e_k \equiv \delta_{k, \mu_n}$, $1 \leq n \leq N$. Гамильтониан (1) диагонализуются с помощью следующей подстановки:

$$|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle = \sum_{\{e_k(\boldsymbol{\mu})\}_{k \in \mathcal{M}}} \chi_{\boldsymbol{\mu}}^{XXZ}(\mathbf{u}) \prod_{k=0}^M (\sigma_k^-)^{e_k} |\uparrow\rangle, \quad (2)$$

где суммирование идет по C_M^N строгим разбиениям μ , а $|\uparrow\rangle \equiv \bigotimes_{n=0}^M |\uparrow\rangle_n$ есть полностью поляризованное состояние со всеми спинами вверх. Таким образом, волновая функция $\chi_\mu^{XXZ}(\mathbf{u})$ в (2) имеет вид

$$\chi_\mu^{XXZ}(\mathbf{u}) = \sum_{S_{p_1, p_2, \dots, p_N}} \mathcal{A}_S(\mathbf{u}) u_{p_1}^{2\mu_1} u_{p_2}^{2\mu_2} \dots u_{p_N}^{2\mu_N}, \quad (3)$$

где суммирование идет по всем элементам симметрической группы $S_{p_1, p_2, \dots, p_N} \equiv S\left(\begin{smallmatrix} 1, & 2, & \dots, & N \\ p_1, & p_2, & \dots, & p_N \end{smallmatrix}\right)$ и

$$\mathcal{A}_S(\mathbf{u}) \equiv \prod_{1 \leq j < i \leq N} \frac{1 - 2\Delta u_{p_i}^2 + u_{p_i}^2 u_{p_j}^2}{u_{p_i}^2 - u_{p_j}^2}.$$

Векторы состояния (2) являются собственными состояниями гамильтониана (1), если и только если переменные u_l удовлетворяют *уравнениям Бете*

$$u_l^{2(M+1)} = (-1)^{N-1} \prod_{k=1}^N \frac{1 - 2\Delta u_l^2 + u_l^2 u_k^2}{1 - 2\Delta u_k^2 + u_l^2 u_k^2}, \quad 1 \leq l \leq N. \quad (4)$$

Соответствующие собственные значения энергии задаются соотношениями

$$E_N(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (u_i^2 + u_i^{-2} - 2\Delta - 2h). \quad (5)$$

В пределе нулевой анизотропии $\Delta \rightarrow 0$ гамильтониан (1) переходит в гамильтониан XX -модели на периодической цепочке,

$$\hat{H}_{XX} \equiv -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^M (\hat{h}_{k+1, k} + h\sigma_k^z), \quad \hat{h}_{k+1, k} \equiv \sigma_{k+1}^- \sigma_k^+ + \sigma_{k+1}^+ \sigma_k^-. \quad (6)$$

Указанный предел известен как предел свободных фермионов XXZ -цепочки, и он является наиболее изученным [25]–[28].

В разделе 2 мы рассматриваем изинговский предел, соответствующий пределу $\Delta \rightarrow -\infty$. В разделе 3 получены температурные корреляционные функции оператора ферромагнитной струны. В разделе 4 представлен ряд результатов для четырехвершинной модели, которая является пределом при $\Delta \rightarrow -\infty$ шестивершинной модели, а также доказано, что используемый эффективный гамильтониан коммутирует с трансфер-матрицей четырехвершинной модели, и продемонстрирована ортогональность системы собственных функций; обсуждается связь между четырехвершинной моделью и плоскими разбиениями в ящике [12]. Низкотемпературная асимптотика корреляционной функции изучается в разделе 5. Обсуждение в разделе 6 завершает статью.

2. ИЗИНГОВСКИЙ ПРЕДЕЛ XXZ -ЦЕПОЧКИ

Менее изученным пределом XXZ -модели является предел *сильной анизотропии*, когда $\Delta \rightarrow -\infty$ [4], [29]–[31]. Этот предел называется изинговским, так как простейший гамильтониан в этом пределе оказывается гамильтонианом одномерной модели

Изинга [4]:

$$\lim_{\Delta \rightarrow -\infty} \frac{1}{\Delta} \hat{H}_{XXZ} = \hat{H}_{\text{Is}} \equiv -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^M (\sigma_{k+1}^z \sigma_k^z - 1). \quad (7)$$

Однако мы будем изучать предел сильной анизотропии с помощью эффективного гамильтониана $\hat{H}_{\text{sa}}$, который формально эквивалентен гамильтониану (6) XX -модели, снабженному требованием, запрещающим двум состояниям со спинами вниз занимать любую пару ближайших узлов:

$$\hat{H}_{\text{sa}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \mathcal{P}(\hat{h}_{k+1,k} + h\sigma_k^z)\mathcal{P}, \quad \mathcal{P} \equiv \prod_{k=0}^M (\mathbb{I} - \hat{q}_{k+1}\hat{q}_k), \quad (8)$$

где $\mathbb{I}$ есть единичный оператор в $(M+1)$ -кратном тензорном произведении линейных пространств $\mathbb{C}$. Проекторы $\mathcal{P}$ “вырезают” состояния со спинами вниз для любой пары ближайших узлов. Локальные проекторы на состояния со спинами вниз и вверх имеют вид

$$\hat{q}_k \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \sigma_k^z), \quad \check{q}_k \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \sigma_k^z), \quad \check{q}_k + \hat{q}_k = \mathbb{I}, \quad k \in \mathcal{M}. \quad (9)$$

Гамильтонианы (7) и (8) перестановочны. Действительно, с помощью соотношений (9) можно представить гамильтониан (7) следующим образом:

$$\hat{H}_{\text{Is}} = \hat{N} - \sum_{k=0}^M \hat{q}_{k+1}\hat{q}_k, \quad \hat{N} \equiv \sum_{k=0}^M \hat{q}_k;$$

здесь $\hat{N}$ есть оператор числа частиц, коммутирующий с гамильтонианами $\hat{H}_{XX}$ и $\hat{H}_{\text{sa}}$. С другой стороны, в силу определения проектора $\mathcal{P}$ мы имеем

$$\mathcal{P} \sum_{k=0}^M \hat{q}_{k+1}\hat{q}_k = \sum_{k=0}^M \hat{q}_{k+1}\hat{q}_k \mathcal{P} = 0.$$

Следовательно, $[\hat{H}_{\text{sa}}, \hat{H}_{\text{Is}}] = 0$, и гамильтонианы (7), (8) обладают общей системой собственных функций.

Волновая функция (3) принимает в пределе $\Delta \rightarrow -\infty$ следующий вид:

$$\chi_{\boldsymbol{\mu}}^{\text{sa}}(\mathbf{u}) = \det(u_j^{2(\mu_k - N + k)})_{1 \leq j, k \leq N} \prod_{1 \leq n < l \leq N} (u_l^2 - u_n^2)^{-1}, \quad (10)$$

где координаты состояний со спинами вниз образуют, как и в (2), строго убывающее разбиение $\boldsymbol{\mu}$. Из (10) следует, что волновая функция отличается от нуля, если и только если элементы μ_i , $1 \leq i \leq N$, удовлетворяют *условию исключения* $\mu_i > \mu_{i+1} + 1$. Другими словами, в данном пределе заполнение ближайших узлов запрещено, и возникает понятие *диаметра твердой сердцевины*, который равен удвоенному расстоянию между узлами. Экспоненциальная параметризация $u_j^2 = e^{i\theta_j}$ преобразует уравнения Бете (4) к следующему виду:

$$e^{i(M+1-N)\theta_k} = (-1)^{N-1} \prod_{j=1}^N e^{-i\theta_j}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (11)$$

Решение этих уравнений записывается как

$$\theta_j = \frac{2\pi}{M+1-N} \left(I_j - \frac{N-1}{2} - P \right), \quad (12)$$

где $P \equiv (1/2\pi) \sum_{j=1}^N \theta_j$, а числа I_j являются целыми или полуцелыми в зависимости от того, что N – нечетное число или четное. Достаточно рассмотреть множество из N различных чисел I_j , удовлетворяющих условию $M - N \geq I_1 > I_2 > \dots > I_N \geq 0$. Основное состояние модели определяется решениями

$$\theta_j^v \equiv \frac{2\pi}{M+1-N} \left(N - j - \frac{N-1}{2} \right), \quad (13)$$

где соблюдается условие $P = 0$. Обозначение θ для совокупности $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ решений (12) будет особенно удобным для использования ниже, чтобы можно было подчеркнуть, что имеется в виду именно решение уравнений Бете. В противном случае уместно использовать обозначение $\mathbf{u}$ как указание на то, что имеется в виду некоторая произвольная параметризация волновой функции (10). Собственная энергия основного состояния модели, вычисленная с помощью соотношений (5) и (13), такова:

$$E_N(\theta^v) = hN - \operatorname{cosec} \frac{\pi}{M+1-N} \sin \frac{\pi N}{M+1-N}. \quad (14)$$

Собственная энергия изинговского гамильтониана (7) имеет вид $E_{\text{Is}} = N$.

Оба предела, (6) и (8), схожи в том смысле, что их волновые функции могут быть выражены через *функции Шура* [12]

$$S_{\lambda}(\mathbf{x}) \equiv S_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \frac{\det(x_j^{\lambda_k + N - k})_{1 \leq j, k \leq N}}{\det(x_j^{N - k})_{1 \leq j, k \leq N}}, \quad (15)$$

где λ означает разбиение $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$, являющееся совокупностью из N невозрастающих неотрицательных целых чисел $L \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$. В самом деле, любое строгое разбиение $M \geq \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N \geq 0$ и любое нестрогое разбиение $M+1-N \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$ могут быть связаны соотношением $\lambda_j = \mu_j - N + j$, где $1 \leq j \leq N$. Иными словами, соотношение имеет вид $\lambda = \mu - \delta$, где δ – строгое разбиение $(N-1, N-2, \dots, 1, 0)$. Любое строгое разбиение μ , элементы которого удовлетворяют условию исключения $\mu_i > \mu_{i+1} + 1$, связано с нестрогим разбиением $\tilde{\lambda}$ с помощью соотношения $\tilde{\lambda} = \mu - 2\delta$, где $M+2(1-N) \geq \tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_N \geq 0$. Таким образом, волновая функция (10) может быть представлена как $\chi_{\mu}^{\text{sa}}(\mathbf{u}) = S_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{u}^2)$, и соответствующий вектор состояния (2) принимает следующий вид:

$$|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle = \sum_{\tilde{\lambda} \subseteq \{(M-2(N-1))^N\}} S_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{u}^2) \prod_{k=0}^M (\sigma_k^-)^{e_k} |\uparrow\rangle. \quad (16)$$

Здесь суммирование идет по всем нестрогим разбиениям $\tilde{\lambda}$ на N частей таким образом, что каждая часть не превосходит $M-2(N-1)$, т. е. $M-2(N-1) \geq \tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_N \geq 0$. Суммирование по нестрогим разбиениям $\tilde{\lambda}$ эквивалентно суммированию по строгим разбиениям μ , элементы которых удовлетворяют условиям $\mu_i > \mu_{i+1} + 1$ и $\tilde{\lambda} = \mu - 2\delta$.

3. ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫЖИВАНИЯ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СТРУНЫ

Рассмотрим температурную корреляционную функцию состояний, не имеющих спинов вниз на последних $n + 1$ узлах решетки (которую уместно назвать *вероятностью выживания ферромагнитной струны*), определяемую отношением

$$\mathcal{T}(\theta^v, n, \beta) \equiv \frac{\langle \Psi_N(\theta^v) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \hat{H}_{sa}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\theta^v) \rangle}{\langle \Psi_N(\theta^v) | e^{-\beta \hat{H}_{sa}} | \Psi_N(\theta^v) \rangle}, \quad \bar{\Pi}_n \equiv \prod_{j=M-n}^M \check{q}_j, \quad (17)$$

где $\hat{H}_{sa}$ и $\check{q}_j$ определены соответственно в соотношениях (8) и (9), а β – обратная температура. Кроме того, символ θ^v означает, что собственные состояния вычисляются для вакуумного решения (13). Наши вычисления будут основаны на следующем соотношении для функций Шура (15), которое вытекает из формулы Бине–Коши [32]:

$$\sum_{\lambda \subseteq \{L^N\}} S_\lambda(x_1^2, x_2^2, \dots, x_N^2) S_\lambda(y_1^2, y_2^2, \dots, y_N^2) = \det \left(\frac{1 - (x_k y_j)^{2(N+L)}}{1 - (x_k y_j)^2} \right)_{1 \leq j, k \leq N} \times \\ \times \prod_{1 \leq k < j \leq N} (y_j^2 - y_k^2)^{-1} \prod_{1 \leq m < l \leq N} (x_l^2 - x_m^2)^{-1}. \quad (18)$$

Здесь суммирование идет по всем нестрогим разбиениям λ на N частей таким образом, что каждая часть не превосходит L : $L \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$. Обозначение $\lambda \subseteq \{L^N\}$ для области суммирования в (18) будет интенсивно использоваться далее.

Используя (18), прежде всего можно непосредственно вычислить среднее значение проектора $\bar{\Pi}_n$ (8) над векторами состояния (16):

$$\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle = \sum_{\tilde{\lambda} \subseteq \{(M-2N-n+1)^N\}} S_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{v}^{-2}) S_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{u}^2) = \\ = \frac{1}{\mathcal{V}(\mathbf{u}^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}^{-2})} \det \left(\frac{1 - (u_k^2/v_j^2)^{M-N-n+1}}{1 - u_k^2/v_j^2} \right)_{1 \leq j, k \leq N}, \quad (19)$$

где используется обозначение $\mathcal{V}(\mathbf{u}^2)$ для определителя Вандермонда,

$$\mathcal{V}(\mathbf{u}^2) \equiv \prod_{1 \leq m < l \leq N} (u_l^2 - u_m^2).$$

Правая часть соотношения (19), будучи вычисленной при $n + 1 = 0$, дает ответ для скалярного произведения векторов состояния (16), т. е. для $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$. Соотношение (19), вычисленное на решениях (13), позволяет получить так называемую *вероятность образования пустоты* $E(n, N)$, которая выражает вероятность образования струны с незанятыми состояниями (т. е. состояниями со спинами вверх) на последних $n + 1$ узлах решетки:

$$E(n, N) \equiv \frac{\langle \Psi_N(\theta^v) | \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\theta^v) \rangle}{\langle \Psi_N(\theta^v) | \Psi_N(\theta^v) \rangle} = \frac{M - N + 1}{M + 1} \det \left(\left(1 - \frac{n}{M - N + 1} \right) \delta_{lj} + \right. \\ \left. + \frac{1 - e^{in(k_l - k_j)}}{(M - N + 1)(1 - e^{i(k_l - k_j)})} (1 - \delta_{lj}) \right)_{1 \leq l, j \leq N}, \quad k_l \equiv \frac{2\pi l}{M + 1 - N}.$$

Решения уравнений Бете (11) образуют полный набор собственных состояний, таким образом можно ввести разложение единицы

$$\mathbb{I} = \frac{1}{(M+1)(M+1-N)^{N-1}} \sum_{\{\boldsymbol{\theta}\}} |\mathcal{V}(e^{i\boldsymbol{\theta}})|^2 |\Psi_N(\boldsymbol{\theta})\rangle \langle \Psi_N(\boldsymbol{\theta})|, \quad (20)$$

где суммирование по $\{\boldsymbol{\theta}\}$ означает суммирование по всем независимым решениям (12). Здесь используется экспоненциальная параметризация решений уравнений Бете в компактной форме $e^{i\boldsymbol{\theta}} \equiv (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_N})$. Будем искать числитель выражения (17), используя вставки разложения единицы (20). Принимая во внимание, что

$$\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | e^{-\beta \hat{H}_{sa}} | \Psi_N(\boldsymbol{\theta}) \rangle = \langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\boldsymbol{\theta}) \rangle e^{-\beta E_N(\boldsymbol{\theta})},$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \hat{H}_{sa}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle &= \frac{1}{(M+1)(M+1-N)^{N-1}} \sum_{\{\boldsymbol{\theta}\}} e^{-\beta E_N(\boldsymbol{\theta})} \times \\ &\times |\mathcal{V}(e^{i\boldsymbol{\theta}})|^2 \mathcal{P}(\mathbf{v}^{-2}, e^{i\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{P}(e^{-i\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{u}^2), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}^{-2}, e^{i\boldsymbol{\theta}}) \equiv \sum_{\tilde{\lambda}^L} S_{\tilde{\lambda}^L}(\mathbf{v}^{-2}) S_{\tilde{\lambda}^L}(e^{i\boldsymbol{\theta}}), \quad \mathcal{P}(e^{-i\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{u}^2) \equiv \sum_{\tilde{\lambda}^R} S_{\tilde{\lambda}^R}(e^{-i\boldsymbol{\theta}}) S_{\tilde{\lambda}^R}(\mathbf{u}^2). \quad (22)$$

Здесь область суммирования имеет вид $\tilde{\lambda}^L, \tilde{\lambda}^R \subseteq \{(M-2N-n+1)^N\}$. Тогда с использованием (18) мы получаем из (21), что

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \bar{\Pi}_n e^{-\beta \hat{H}_{sa}} \bar{\Pi}_n | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle &= \\ &= \frac{1}{(M+1)(M+1-N)^{N-1} \mathcal{V}(\mathbf{u}^2) \mathcal{V}(\mathbf{v}^{-2})} \sum_{M-N \geq I_1 > I_2 \dots > I_N \geq 0} e^{-\beta E_N(\boldsymbol{\theta})} \times \\ &\times \det \left(\frac{1 - (e^{i\theta_i} v_j^{-2})^{M-N-n+1}}{1 - e^{i\theta_i} v_j^{-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq N} \det \left(\frac{1 - (u_l^2 e^{-i\theta_p})^{M-N-n+1}}{1 - u_l^2 e^{-i\theta_p}} \right)_{1 \leq l, p \leq N}, \end{aligned} \quad (23)$$

где суммирование идет по упорядоченным наборам $\{I_k\}_{1 \leq k \leq N}$, которые параметризуют решение $\boldsymbol{\theta}$ (12), и $E_N(\boldsymbol{\theta})$ задается соотношением (14). Выражение для $\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^v, n, \beta)$ (17) возникает из (23) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}^v, n, \beta) &= \frac{1}{(M+1)^2 (M+1-N)^{N-2}} \sum_{M-N \geq I_1 > I_2 \dots > I_N \geq 0} e^{-\beta(E_N(\boldsymbol{\theta}) - E_N(\boldsymbol{\theta}^v))} \times \\ &\times \left| \det \left(\frac{1 - e^{i(M-N-n+1)(\theta_l - \theta_p^v)}}{1 - e^{i(\theta_l - \theta_p^v)}} \right)_{1 \leq p, l \leq N} \right|^2, \end{aligned} \quad (24)$$

где $E_N(\boldsymbol{\theta}^v)$ – энергия основного состояния в пределе сильной анизотропии.

4. ЧЕТЫРЕХВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ И ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ В ЯЩИКЕ

4.1. XXZ -гамильтониан при $\Delta \rightarrow -\infty$ и четырехвершинная модель. Шестивершинная модель на квадратной решетке определяется шестью различными конфигурациями стрелок, которые могут быть направлены как в сторону узла, так и от него. Каждому допустимому типу вершин приписывается статистический вес w_k , $k = 1, 2, \dots, 6$ (см. рис. 1). Изображая стрелки, которые указывают вверх или вправо, толстыми линиями, можно получить альтернативное описание вершин в терминах линий, протекающих сквозь узлы решетки. Так как грани решетки могут находиться только в двух состояниях (с жирной линией или без нее), существует взаимно однозначное соответствие между допустимыми конфигурациями стрелок на решетке и графами линий – наборами решеточных путей. Четырехвершинная модель возникает в пределе, когда $w_1 = w_3 = 0$.

Рис. 1. Конфигурации вершин шестивершинной модели.

Для шестивершинной модели L -оператор имеет вид [33]

$$L_{6v}(n|u) = \begin{pmatrix} -ue^{\gamma\sigma_n^z} - u^{-1}e^{-\gamma\sigma_n^z} & 2\operatorname{sh}(2\gamma)\sigma_n^- \\ 2\operatorname{sh}(2\gamma)\sigma_n^+ & ue^{-\gamma\sigma_n^z} + u^{-1}e^{\gamma\sigma_n^z} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $u \in \mathbb{C}$ и $\gamma \equiv \operatorname{Arch}(\Delta)/2$, и удовлетворяет сплетающему соотношению

$$\tilde{R}(u, v)(L_{6v}(n|u) \otimes L_{6v}(n|v)) = (L_{6v}(n|v) \otimes L_{6v}(n|u))\tilde{R}(u, v).$$

Здесь $\tilde{R}(u, v)$ – это матрица размера 4×4 вида

$$\tilde{R}(u, v) = \begin{pmatrix} \tilde{f}(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{g}(v, u) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{g}(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{f}(v, u) \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{f}(v, u) = \frac{u^2 e^{2\gamma} - v^2 e^{-2\gamma}}{u^2 - v^2}, \quad \tilde{g}(v, u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}(e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}), \quad u, v \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим следующее преобразование L -оператора (25):

$$\begin{aligned} \check{L}(n|u) &= e^{h\sigma_n^z} e^{(\omega/2)\sigma_n^z} L_{6v}(n|u) e^{-(\omega/2)\sigma_n^z} = \\ &= \begin{pmatrix} -ue^{(h+\gamma)\sigma_n^z} - u^{-1}e^{(h-\gamma)\sigma_n^z} & 2\operatorname{sh}(2\gamma)e^{\omega+h\sigma_n^z}\sigma_n^- \\ 2\operatorname{sh}(2\gamma)e^{-\omega+h\sigma_n^z}\sigma_n^+ & ue^{(h-\gamma)\sigma_n^z} + u^{-1}e^{(h+\gamma)\sigma_n^z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Данный оператор сплетается с помощью преобразованной R -матрицы следующего вида:

$$\check{R}(u, v) = (1 \otimes e^{-h\sigma^z}) \tilde{R}(u, v) (1 \otimes e^{h\sigma^z}) = \begin{pmatrix} \tilde{f}(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{g}(v, u) & e^{2h} & 0 \\ 0 & e^{-2h} & \tilde{g}(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{f}(v, u) \end{pmatrix}.$$

Если положить $h = \omega = \gamma$, то предел

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} e^{-2\gamma} \check{L}(n|u) = L_{4v}(n|u) \equiv \begin{pmatrix} -u\check{q}_n & \sigma_n^- \\ \sigma_n^+ & u^{-1}\check{q}_n \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где $\check{q}_n = \sigma_n^+ \sigma_n^-$ (см. (9)), дает нам L -оператор так называемой *четырёхвершинной* модели. Аналогично, в пределе $\gamma \rightarrow \infty$ матрица $e^{-2\gamma} \check{R}(u, v)$ преобразуется в R -матрицу четырёхвершинной модели [22]

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} f(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v, u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v, u) \end{pmatrix},$$

где

$$f(v, u) = \frac{u^2}{u^2 - v^2}, \quad g(v, u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}.$$

Матрица монодромии рассматриваемых моделей определяется как матричное произведение L -операторов:

$$T(u) = L(M|u)L(M-1|u)\dots L(0|u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}.$$

Трансфер-матрица есть матричный след матрицы монодромии: $\tau(u) = \text{Tr } T(u)$. В работе [34] было показано, что трансфер-матрица шестивершинной модели перестановочна с гамильтонианом XXZ -модели (1): $[\hat{H}_{XXZ}, \tau_{6v}(u)] = 0$.

Трансфер-матрица четырёхвершинной модели $\tau_{4v}(u)$ удовлетворяет равенству

$$\mathcal{P}\tau_{4v}(u) = \tau_{4v}(u)\mathcal{P} = \tau_{4v}(u), \quad (27)$$

где $\mathcal{P}$ – проектор, определенный в (8). Действительно, воспользовавшись явным видом матричных элементов произведения двух L -операторов,

$$L(n+1|u)L(n|u) = \begin{pmatrix} A_{n+1,n} & B_{n+1,n} \\ C_{n+1,n} & D_{n+1,n} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

можно показать, что

$$\mathcal{C}_{n+1,n}L(n+1|u)L(n|u) = L(n+1|u)L(n|u)\mathcal{C}_{n+1,n} = L(n+1|u)L(n|u), \quad (29)$$

где $\mathcal{C}_{n+1,n} \equiv 1 - \hat{q}_{n+1}\hat{q}_n$. Из формулы (29) следует, что $\mathcal{C}_{n+1,n}\tau_{4v}(u) = \tau_{4v}(u)\mathcal{C}_{n+1,n} = \tau_{4v}(u)$ при $n = 0, 1, \dots, M-1$. Из инвариантности матричного следа относительно циклической перестановки вытекает равенство $\mathcal{C}_{0,M}\tau_{4v}(u) = \tau_{4v}(u)\mathcal{C}_{0,M} = \tau_{4v}(u)$, а следовательно, и соотношение (27).

Далее, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Трансфер-матрица четырехвершинной модели перестановочна с XXZ -гамильтонианом, взятом в изинговском пределе:*

$$[\hat{H}_{sa}, \tau_{4v}(u)] = 0. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать соотношение (30), достаточно рассмотреть $\hat{H}_{sa}$ (8) при $h = 0$. Будем использовать метод, предложенный в работе [34] и затем примененный в [35]. Развивая этот метод для рассматриваемого случая, примем во внимание соотношение (нижние индексы опущены)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n+1,n} [\hat{h}_{n+1,n}, L(n+1|u)L(n|u)] \mathcal{C}_{n+1,n} &= \\ &= \mathcal{C}_{n+1,n} (Q(n+1|u)L(n|u) - L(n+1|u)Q(n|u)) \mathcal{C}_{n+1,n}, \end{aligned} \quad (31)$$

где операторы $\hat{h}_{n+1,n}$ и $\mathcal{C}_{n+1,n}$ введены соответственно в (6) и (29). В результате мы получаем, что рассматриваемый коммутатор равен нулю,

$$[\hat{H}, \tau(u)] = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \mathcal{P} [\hat{h}_{n+1,n}, \tau(u)] \mathcal{P} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \text{Tr}(\mathcal{P} [\hat{h}_{n+1,n}, T(u)] \mathcal{P}) = 0,$$

если учесть равенство

$$\begin{aligned} [\hat{h}_{n+1,n}, T(u)] &= L(M|u) \dots L(n+2|u) [\hat{h}_{n+1,n}, L(n+1|u)L(n|u)] \times \\ &\times L(n-1|u) \dots L(0|u). \end{aligned}$$

Далее, коммутаторы матричных элементов из правой части соотношения (28) равны

$$\begin{aligned} [\hat{h}_{n+1,n}, A_{n+1,n}] &= -[\hat{h}_{n+1,n}, D_{n+1,n}] = \check{q}_{n+1} - \check{q}_n, \\ [\hat{h}_{n+1,n}, B_{n+1,n}] &= -u\sigma_{n+1}^- + u^{-1}\sigma_n^- + u\sigma_{n+1}^- \hat{q}_n - u^{-1}\hat{q}_{n+1}\sigma_n^-, \\ [\hat{h}_{n+1,n}, C_{n+1,n}] &= -u^{-1}\sigma_{n+1}^+ + u\sigma_n^+ + u^{-1}\sigma_{n+1}^+ \hat{q}_n - u\hat{q}_{n+1}\sigma_n^+. \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n+1,n} [\hat{h}_{n+1,n}, A_{n+1,n}] \mathcal{C}_{n+1,n} &= \mathcal{C}_{n+1,n} (\check{q}_{n+1} - \check{q}_n) \mathcal{C}_{n+1,n}, \\ \mathcal{C}_{n+1,n} [\hat{h}_{n+1,n}, B_{n+1,n}] \mathcal{C}_{n+1,n} &= \mathcal{C}_{n+1,n} (-u\sigma_{n+1}^- + u^{-1}\sigma_n^-) \mathcal{C}_{n+1,n}, \\ \mathcal{C}_{n+1,n} [\hat{h}_{n+1,n}, C_{n+1,n}] \mathcal{C}_{n+1,n} &= \mathcal{C}_{n+1,n} (-u^{-1}\sigma_{n+1}^+ + u\sigma_n^+) \mathcal{C}_{n+1,n}, \\ \mathcal{C}_{n+1,n} [\hat{h}_{n+1,n}, D_{n+1,n}] \mathcal{C}_{n+1,n} &= \mathcal{C}_{n+1,n} (-\check{q}_{n+1} + \check{q}_n) \mathcal{C}_{n+1,n}. \end{aligned} \quad (32)$$

С другой стороны, используя диагональную матрицу $Q(n|u) = \begin{pmatrix} u^{-1}\sigma^0 & 0 \\ 0 & u\sigma^0 \end{pmatrix}$, мы получаем следующее соотношение для L -оператора (26):

$$Q(n+1|u)L(n|u) - L(n+1|u)Q(n|u) = \begin{pmatrix} \check{q}_{n+1} - \check{q}_n & -u\sigma_{n+1}^- + u^{-1}\sigma_n^- \\ -u^{-1}\sigma_{n+1}^+ + u\sigma_n^+ & -\check{q}_{n+1} + \check{q}_n \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Сопоставление равенств (32) и (33) показывает, что соотношение (31), а следовательно, и утверждение (30) действительно имеют место. Предложение доказано.

В рамках метода алгебраического анзаца Бете вектор состояния четырехвершинной модели конструируется следующим образом:

$$|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle = \prod_{i=1}^N B_{4v}(u_i) |\uparrow\uparrow\rangle. \quad (34)$$

Этот вектор является собственным вектором четырехвершинной трансфер-матрицы, и следовательно, гамильтониана (8), если параметры u_i удовлетворяют уравнениям Бете (11). В работе [22] было показано, что этот вектор представим в виде (16).

В соответствии с формулой (19) (взятой при $n + 1 = 0$) скалярное произведение $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$ пропорционально определителю, скажем, матрицы $(T_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}$. Уравнения Бете (11) позволяют представить этот определитель следующим образом:

$$\det(T_{kj})_{1 \leq k, j \leq N} \equiv \det\left(\frac{1 - (u_k^2/v_j^2)^{M-N+2}}{1 - u_k^2/v_j^2}\right) = \left(\prod_{k=1}^N \frac{-v_k}{u_k}\right)^N \det(A_{kj})_{1 \leq k, j \leq N},$$

где матричные элементы A_{kj} имеют вид

$$A_{kj} = \frac{(u_k v_j)^{M+3-N}}{u_k^2 - v_j^2} \left(\prod_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^N u_l^2 - \prod_{\substack{l=1, \\ l \neq j}}^N v_l^2 \right).$$

Существенно, что определитель матрицы $(A_{kj})_{1 \leq k, j \leq N}$ равен нулю, если параметры $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ являются независимыми решениями уравнений Бете (11). В самом деле, эта матрица имеет нетривиальный собственный вектор χ_j с нулевым собственным значением:

$$\sum_{j=1}^N A_{kj} \chi_j = 0, \quad \chi_j = (u_j^2 - v_j^2) \prod_{\substack{l=1, \\ l \neq j}}^N \frac{u_j^2 - v_l^2}{u_j^2 - u_l^2}.$$

Справедливость данного соотношения подтверждается двумя тождествами

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{y_k - x_k}{y_k - x_j} \prod_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^N \frac{y_k - x_l}{y_k - y_l} \right) = 1,$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{y_k - x_k}{y_k} \prod_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^N \frac{y_k - x_l}{y_k - y_l} \right) = 1 - \prod_{l=1}^N \frac{x_l}{y_l}.$$

Таким образом, скалярное произведение $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$ равно нулю (векторы состояния ортогональны) при условии, что множества параметров $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ представляют независимые решения уравнений Бете. Полнота системы векторов состояния доказана в [4], [30].

4.2. Плоские разбиения в ящике. Рассмотрим четырехвершинную модель [22]. Существует взаимно однозначное соответствие между строгими плоскими разбиениями (т. е. плоскими разбиениями, которые убывают вдоль каждого столбца и вдоль

Рис. 2. Допустимый набор решеточных путей для четырехвершинной модели и соответствующее строгое плоское разбиение.

каждой строки [12]) и наборами допустимых путей на двумерной решетке размера $2N \times (M + 1)$ со следующими граничными условиями: все стрелки на левом и правом краях указывают влево, стрелки на верхнем и нижнем концах первых N столбцов (считая слева) указывают внутрь, а стрелки на верхнем и нижнем концах последних N столбцов указывают наружу (см. рис. 2).

В работе [22] было показано, что если положить $v_j = q^{-j/2}$ и $u_j = q^{(j-1)/2}$ в скалярном произведении векторов состояния (34), то

$$\langle \Psi_N(q^{-1/2}, q^{-2/2}, \dots, q^{-N/2}) | \Psi_N(1, q, \dots, q^{(N-1)/2}) \rangle = q^{-N^2(N-1)} Z_q^{\text{spp}}(N, N, M),$$

где $Z_q^{\text{spp}}(N, N, M)$ – производящая функция строгих плоских разбиений, помещенных в ящик размера $N \times N \times M$:

$$Z_q^{\text{spp}}(N, N, M) \equiv q^{N^2(N-1)} \prod_{1 \leq j, k \leq N} \frac{1 - q^{M+3-j-k}}{1 - q^{j+k-1}}.$$

При $q = 1$ эта формула дает число строгих плоских разбиений в ящике размера $N \times N \times M$:

$$Z_1^{\text{spp}}(N, N, M) = \prod_{1 \leq j, k \leq N} \frac{M + 3 - j - k}{j + k - 1}.$$

Непосредственным образом можно получить [19], [24], что матричный элемент

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \langle \Psi_N(q^{-1/2}, q^{-2/2}, \dots, q^{-N/2}) | \bar{\Pi}_n | \Psi_N(1, q, \dots, q^{(N-1)/2}) \rangle = \\ = Z_1^{\text{spp}}(N, N, M - n - 1) \end{aligned} \quad (35)$$

равен числу строгих разбиений в ящике размера $N \times N \times (M - n - 1)$.

5. НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫЙ ПРЕДЕЛ

Выведем низкотемпературную оценку для корреляционной функции (17). Вероятность выживания ферромагнитной струны записывается следующим образом:

$$\mathcal{T}(\theta^v, n, \beta) = \frac{|\mathcal{V}(e^{i\theta^v})|^2}{V^2} \sum_{\{\theta\}} e^{-\beta(E_N(\theta) - E_N(\theta^v))} |\mathcal{V}(e^{i\theta}) \mathcal{P}(e^{-i\theta}, e^{i\theta^v})|^2, \quad (36)$$

где $V \equiv (M+1)(M+1-N)^{N-1}$. Здесь $\mathcal{P}(e^{-i\theta}, e^{i\theta^v})$ выражается посредством соотношений (22), где область суммирования имеет вид $\tilde{\lambda} \subseteq \{(M-2N-n+1)^N\}$.

Если цепочка достаточно длинна, а число квазичастиц умеренно, $N \ll M$, мы заменяем суммы в (36) интегралами:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\theta^v, n, \beta) &\simeq \frac{1}{(2\pi)^N N!} \prod_{1 \leq r < s \leq N} 2(1 - \cos(\theta_r^v - \theta_s^v)) \prod_{i=1}^N \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_i}{2\pi} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ \beta \sum_{l=1}^N (\cos \theta_l - \cos \theta_l^v) \right\} |\mathcal{P}(e^{-i\theta}, e^{i\theta^v})|^2 \prod_{1 \leq k < l \leq N} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^2. \end{aligned} \quad (37)$$

В рассматриваемом пределе мы можем положить $\cos \theta_l \approx 1$ и $\cos \theta_l^v \approx 1$ для всех l . При достаточно больших β мы аппроксимируем выражение (37) следующим образом:

$$\mathcal{T}(\theta^v, n, \beta) \big|_{\theta^v \approx 0} \simeq \frac{\mathcal{I} \mathcal{P}^2(\mathbf{1}, \mathbf{1})}{(2\pi)^N N!} \left(\frac{2}{\beta} \right)^{N^2/2} \prod_{1 \leq r < s \leq N} (r-s)^2, \quad (38)$$

где

$$\mathcal{I} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \sum_{l=1}^N x_l^2 \right\} \prod_{1 \leq k < l \leq N} |x_k - x_l|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

есть *интеграл Мелты* [36]. С учетом соотношений (35) и (38), а также используя известные значения

$$\mathcal{I} = \frac{\pi^{N/2} \Gamma(1|N+1)}{2^{N(N-1)/2}}, \quad \prod_{1 \leq r < s \leq N} |r-s| = \Gamma(1|N), \quad \Gamma(1|N) \equiv \prod_{n=1}^N \Gamma(n),$$

мы записываем окончательный ответ:

$$\mathcal{T}_{\text{sa}}(\theta, n, \beta) \simeq (Z_1^{\text{ssp}}(N, N, M-n-1))^2 \frac{\mathcal{C}_N}{\beta^{N^2/2}}, \quad \mathcal{C}_N \equiv \frac{\Gamma^3(1|N)}{(2\pi)^{N/2}}.$$

Низкотемпературное убывание вероятности выживания ферромагнитной струны задается критическим показателем $N^2/2$, в то время как ее амплитуда пропорциональна квадрату числа строгих разбиений в ящике размера $N \times N \times (M-n-1)$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели гейзенберговскую магнитную XXZ -цепочку в специальном пределе параметра анизотропии $\Delta \rightarrow -\infty$. Так называемая вероятность выживания ферромагнитной струны вычислена над N -частичным основным состоянием модели. Доказано, что гамильтониан в изинговском пределе, ранее введенный в статьях [24], [29], [30], корректен как предел при $\Delta \rightarrow -\infty$ гамильтониана XXZ -модели. Подводя итог, мы нашли ведущий член низкотемпературной асимптотики вероятности выживания ферромагнитной струны для модели в конечном объеме при фиксированном числе квазичастиц. Показано, что амплитуда асимптотики пропорциональна квадрату числа строгих плоских разбиений в ящике, в то время как ее критический показатель пропорционален квадрату числа частиц. Сравнивая этот результат с результатом, полученным в статьях [24], [37], можно заключить, что этот тип поведения универсален для специального класса интегрируемых моделей.

Благодарности. Статья частично поддержана РФФИ (грант № 10-01-00600), а также программой РАН “Математические методы нелинейной динамики”.

Список литературы

- [1] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1976.
- [2] Н. М. Боголюбов, В. Ф. Братцев, А. Н. Васильев, А. Л. Корженевский, Р. А. Раджабов, *ТМФ*, **26:3** (1976), 341–351.
- [3] C. N. Yang, C. P. Yang, *Phys. Rev.*, **151:1** (1966), 258–264.
- [4] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Мир, М., 1987.
- [5] Л. Д. Фаддеев, *Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля*, Препринт ЛОМИ Р-2-79, ЛОМИ, Л., 1979; L. D. Faddeev, “Quantum completely integrable models in field theory”, *40 Years in Mathematical Physics*, World Sci. Ser. 20th Century Math., **2**, World Sci., River Edge, NJ, 1995, 187–235.
- [6] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, Наука, М., 1992.
- [7] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Monogr. Math. Phys., **XIII**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [8] V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **86:3** (1982), 391–418.
- [9] A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **99:2** (1985), 271–302.
- [10] N. Kitanine, J.-M. Maillet, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **554:3** (1999), 647–678, arXiv: math-ph/9807020.
- [11] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **642:3** (2002), 433–455.
- [12] И. Г. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.
- [13] M. E. Fisher, *J. Statist. Phys.*, **34:5–6** (1984), 667–729.
- [14] T. Nagao, P. J. Forrester, *Nucl. Phys. B*, **620:3** (2002), 551–565, arXiv: cond-mat/0107221.
- [15] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, X. G. Viennot, *J. Phys. A*, **33:48** (2000), 8835–8866, arXiv: cond-mat/0006367.
- [16] M. Katori, H. Tanemura, T. Nagao, N. Komatsuda, *Phys. Rev. E*, **68:2** (2003), 021112, 16 pp., arXiv: cond-mat/0303573.
- [17] G. Schehr, S. N. Majumdar, A. Comtet, J. Randon-Furling, *Phys. Rev. Lett.*, **101:15** (2008), 150601, 4 pp., arXiv: 0807.0522.

- [18] D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations. The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, MAA Spectrum Series, **XV**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [19] N. M. Bogoliubov, *J. Phys. A*, **38**:43 (2005), 9415–9430, arXiv: cond-mat/0503748.
- [20] Н. М. Боголюбов, “ $XX0$ цепочка Гейзенберга и случайные блуждания”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы*. XII, Зап. научн. сем. ПОМИ, **325**, ПОМИ, СПб., 2005, 13–27.
- [21] N. M. Bogoliubov, C. Malyshev, “A path integration approach to the correlators of XY Heisenberg magnet and random walks”, *Proceeding of the IX International Conference “Path Integrals. New Trends and Perspectives”* (Dresden, Germany, September 23–28, 2007), eds. W. Janke, A. Pelster, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008, 508–513, arXiv: 0810.4816.
- [22] Н. М. Боголюбов, *ТМФ*, **155**:1 (2008), 25–38.
- [23] Н. М. Боголюбов, К. Л. Малышев, *ТМФ*, **159**:2 (2009), 179–193, arXiv: 0903.3227.
- [24] Н. М. Боголюбов, К. Малышев, *Алгебра и анализ*, **22**:3 (2010), 32–59.
- [25] E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis, *Ann. Phys.*, **16**:3 (1961), 407–466.
- [26] Th. Niemeijer, *Physica*, **36**:3 (1967), 377–419; **39**:3 (1968), 313–326.
- [27] F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti, *ТМФ*, **94**:1 (1993), 19–51.
- [28] К. Л. Малышев, *ТМФ*, **136**:2 (2003), 285–298.
- [29] F. C. Alcaraz, R. Z. Bariev, “An exactly solvable constrained XXZ chain”, *Statistical Physics on the Eve of the 21st Century*, Ser. Adv. Statist. Mech., **14**, eds. M. T. Batchelor, L. T. Wille, World Sci., Singapore, 1999, 412–424, arXiv: cond-mat/9904042.
- [30] Н. И. Абаренкова, А. Г. Пронько, *ТМФ*, **131**:2 (2002), 288–303.
- [31] A. J. A. James, W. D. Goetze, F. H. L. Essler, *Phys. Rev. B*, **79**:21 (2009), 214408, 20 pp., arXiv: 0902.2402.
- [32] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [33] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга”, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63.
- [34] E. H. Lieb, F. Y. Wu, “Two dimensional ferroelectric models”, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, **1**, eds. C. Domb, M. Green, Academic Press, London, 1972, 331–490.
- [35] В. О. Тарасов, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **57**:2 (1983), 163–181.
- [36] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, Boston, MA, 1991.
- [37] N. Bogoliubov, J. Timonen, *Phil. Trans. R. Soc. A*, **369** (2011), 1319–1333.