Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Аван, П. П. Кулиш, Ж. Роллет, K -матрицы отражения, связанные с R -матрицами Темперли–Либа, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 2, 194–203

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6721>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:40:38

© 2011 г. Ж. Аван*, П. П. Кулиш[†], Ж. Роллет*

K -МАТРИЦЫ ОТРАЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С R -МАТРИЦАМИ ТЕМПЕРЛИ–ЛИБА

Построены общие решения уравнения отражения, связанного с R -матрицами Темперли–Либа. Найдена их параметризация и получены гамильтонианы соответствующих интегрируемых спиновых систем.

Ключевые слова: уравнение Янга–Бакстера, R -матрица, уравнение отражения, открытые спиновые цепочки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебра Темперли–Либа $TL_N(q)$ [1], [2], обозначаемая далее как алгебра ТЛ, играет важную роль в построении и решении квантовых интегрируемых моделей, представляющих значительный интерес для статистической механики и физики твердого тела (см., например, монографии [2], [3]). В частности, хорошо известно, что специальные представления алгебры ТЛ дают постоянные решения R уравнения Янга–Бакстера. Эти R -матрицы позволяют строить интегрируемые спиновые цепочки [4] на пространстве состояний $\mathcal{H} = \bigotimes_1^N \mathbb{C}^n$ для любого целого n . Эти спиновые цепочки подобны XXZ -модели спина $1/2$.

Чтобы получить обобщение этой конструкции на случай открытой спиновой цепочки, связанной с алгеброй ТЛ, нужно найти скалярные (т. е. не операторнозначные) решения соответствующего уравнения отражения [5]. Классификация и нахождение решений этого уравнения является основным моментом в построении новых интегрируемых моделей, симметрия которых описывается алгеброй ТЛ. Такие интегрируемые модели представляют интерес с разных точек зрения и связаны с соответствующими алгебраическими структурами: например, квантовая алгебра $\mathcal{U}_q(n)$ отлична от $\mathcal{U}_q(sl(2))$ при $n > 2$, тогда как интегралы движения принадлежат алгебре $TL_N(q)$ [6].

При построении спиновых цепочек в настоящей работе использовано (приводимое) представление алгебры $TL_N(q)$ в пространстве $\mathcal{H}$ тензорного произведения локальных пространств состояния $\mathbb{C}^n$. Используемая нами R -матрица алгебры ТЛ

*Laboratoire de physique théorique et modélisation (CNRS UMR 8089), Université de Cergy-Pontoise, Cergy-Pontoise, France. E-mail: avan@u-cergy.fr, rollet@u-cergy.fr

[†]Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: kulish@pdmi.ras.ru

параметризуется обратимой $(n \times n)$ -матрицей b , а параметр q , отвечающий спиновой модели ТЛ “ XXZ -типа”, определяется соотношением $\text{tr}(b^t b^{-1}) = -(q + 1/q)$. Как было показано в работе [4], $(n \times n)$ -матрица K , будучи решением уравнения отражения с этой R -матрицей типа ТЛ, удовлетворяет квадратному уравнению

$$qK^2 + c_1 K + \left(q + \frac{1}{q}\right)^{-1} (c_1^2 + qc_2) = 0 \quad (1)$$

с подходящими центральными элементами c_1 и c_2 , зависящими от K и b .

Цель настоящей работы – описание полной параметризации таких K -матриц. Коль скоро постоянные R - и K -матрицы известны, используя процедуру янг–бакстеризации, можно получить зависящие от спектрального параметра матрицы, которые лежат в основе квантового метода обратной задачи [5], [7]–[9].

Прежде всего мы напомним, как строятся R -матрицы типа ТЛ группы кос и алгебр Гекке, приводим обозначения и выводим квадратное уравнение (1). Далее мы производим полную классификацию и параметризацию решений постоянного уравнения отражения (см. раздел 3); даем янг–бакстеризованную форму найденных K -матриц. Затем мы строим интегрируемые спиновые системы с граничными взаимодействиями и делаем некоторые замечания о спектральных свойствах этих систем (см. раздел 4).

2. АЛГЕБРЫ ГЕККЕ И ТЕМПЕРЛИ–ЛИБА

Алгебра Гекке $H_N(q)$ и алгебра ТЛ $TL_N(q)$ являются фактор-алгебрами групповой алгебры группы кос B_N , которая порождена $N - 1$ образующими $\check{R}_j$, их обратными $\check{R}_j^{-1}$, $j = 1, 2, \dots, N - 1$, и соотношениями [10]

$$\begin{aligned} \check{R}_j \check{R}_k \check{R}_j &= \check{R}_k \check{R}_j \check{R}_k, & |j - k| &= 1, \\ \check{R}_j \check{R}_k &= \check{R}_k \check{R}_j, & |j - k| &> 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Алгебра Гекке получается путем добавления следующих связей для каждой образующей $\check{R}_j$ (деформация групповой алгебры симметрической группы):

$$(\check{R}_j - q) \left(\check{R}_j + \frac{1}{q} \right) = 0.$$

Это соотношение эквивалентно записи $\check{R}_j$ в терминах некоторого идемпотента X_j :

$$\check{R}_j = q\mathbb{I} + X_j, \quad X_j^2 = -\left(q + \frac{1}{q}\right)X_j,$$

где $\mathbb{I}$ обозначает единичный элемент алгебры Гекке. В терминах идемпотентов X_j и X_k алгебры $H_N(q)$ при $|j - k| = 1$ соотношения группы кос (2) принимают вид

$$X_j X_k X_j - X_j = X_k X_j X_k - X_k. \quad (3)$$

В результате алгебра $TL_N(q)$ получается как фактор-алгебра алгебры Гекке $H_N(q)$ по набору соотношений, если потребовать обращения в ноль левой и правой частей

равенства (3). Таким образом, алгебра $TL_N(q)$ определяется генераторами X_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} X_j^2 &= -\nu(q)X_j, \\ X_j X_k X_j &= X_j, & |j-k| = 1, \\ X_j X_k &= X_k X_j, & |j-k| > 1, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\nu(q) = q + 1/q$. Размерность алгебры Гекке равна $N!$ и совпадает с размерностью симметрической группы, в то время как размерность алгебры $TL_N(q)$ равна числу Каталана $C_N = (2N)!/N!(N+1)!$, таким образом, наличие соотношений ТЛ (4) значительно уменьшает размерность алгебры.

В связи с интегрируемыми спиновыми системами нас будут интересовать представления алгебры $TL_N(q)$ в пространстве тензорного произведения $\mathcal{H} = \bigotimes_1^N \mathbb{C}^n$. Далее мы рассмотрим специальное (приводимое) представление, определяемое некоторой комплексной обратимой $(n \times n)$ -матрицей $b \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$, которую можно также рассматривать как вектор в пространстве $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ с компонентами $\{b_{cd}\}$ [4]. Будем использовать обозначение $\bar{b} := b^{-1}$, также рассматривая $\bar{b}$ как вектор в пространстве $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ с компонентами $\{\bar{b}_{cd}\}$.

Матричная реализация генераторов X_j в пространстве $\mathcal{H}$ задается в терминах матриц b и $\bar{b}$:

$$X_j = \underbrace{\mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{j-1} \left(\sum_{\substack{c,d,c',d' \in \\ \{1,\dots,n\}}} b_{cd} \bar{b}_{c'd'} E_{cc'} \otimes E_{dd'} \right) \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{N-j-1}, \quad (5)$$

где $\mathbb{I}$ обозначает единичную матрицу в $\text{End}(\mathbb{C}^n)$ и использован канонический базис $(n \times n)$ -матриц $E_{cc'}$ с матричными элементами $(E_{cc'})_{xx'} = \delta_{cx} \delta_{c'x'}$.

Легко видеть, что матрица $\sum_{c,d} b_{cd} \bar{b}_{c'd'} E_{cc'} \otimes E_{dd'}$ пропорциональна проектору единичного ранга в пространстве $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Непосредственное вычисление показывает, что набор соотношений (4) выполняется и фиксирует значение q с точностью до замены $q \rightarrow 1/q$:

$$-\nu(q) = \text{tr}(b\bar{b}^t) = -\left(q + \frac{1}{q}\right). \quad (6)$$

Образующие $\check{R}_j$ реализуются как эндоморфизмы пространства $\mathcal{H}$. Согласно формуле (5) эти эндоморфизмы можно обозначить как $\check{R}_{j,j+1}$ (соотношения (2) представляют собой уравнение Янга–Бакстера в форме группы кос):

$$\check{R}_{12} \check{R}_{23} \check{R}_{12} = \check{R}_{23} \check{R}_{12} \check{R}_{23}. \quad (7)$$

При этом R -матрицу можно определить из представления образующих группы кос $R_{j,j+1} = \mathcal{P}_{j,j+1} \check{R}_{j,j+1}$ с оператором перестановки $\mathcal{P}(v \otimes v') = v' \otimes v$ для пары пространств $\mathbb{C}^n$. Использование индексов $j, j+1$ у $\mathcal{P}$ очевидно. Обозначение $R_{j,j+1}$ мы также непосредственно переносим на общий случай эндоморфизмов R_{ij} в пространстве $\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^N (\mathbb{C}^n)_j$ с выделением пары не соседних “индексов узлов” (i, j) , используя знаменитые обозначения [7] для таких элементов из $\text{End}(\mathcal{H})$, с индексами, помечающими пространство. Уравнение (7) при этом переходит в уравнение Янга–Бакстера для R :

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}.$$

Наконец, определим процедуру янг-бакстеризации для этих R -матриц. Эта процедура работает даже для образующих абстрактной алгебры Гекке. Если определить зависящую от спектрального параметра R -матрицу

$$\check{R}_j(u) = u\check{R}_j - \frac{1}{u}\check{R}_j^{-1} = \left(u - \frac{1}{u}\right)\check{R}_j + \frac{\omega(q)}{u}\mathbb{I}, \quad \omega(q) = q - \frac{1}{q}, \quad (8)$$

то можно показать, что она удовлетворяет кубическому соотношению группы кос с мультипликативным спектральным параметром u (аддитивный параметр получается очевидной заменой $u = e^\lambda$):

$$\check{R}_j(u)\check{R}_k(uw)\check{R}_j(w) = \check{R}_k(w)\check{R}_j(uw)\check{R}_k(u), \quad |j - k| = 1.$$

Коль скоро образующие $\check{R}$ алгебры Гекке $H_N(q)$ реализованы как R -матрицы в тензорном произведении двух конечномерных пространств, приведенная процедура дает решения уравнения Янга–Бакстера с мультипликативным спектральным параметром:

$$R_{12}(u)R_{13}(uw)R_{23}(w) = R_{23}(w)R_{13}(uw)R_{12}(u).$$

3. КЛАССИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПОСТОЯННОГО УРАВНЕНИЯ ОТРАЖЕНИЯ

Получим полную классификацию решений постоянного уравнения отражения (граничного уравнения Янга–Бакстера), связанного с R -матрицей типа ТЛ (рассматривая R как эндоморфизм пространства $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$) для любого $n = 2, 3, \dots$. Процедура янг-бакстеризации [11]–[13] позволяет получить общие граничные матрицы $K(u)$, зависящие от спектрального параметра (см. п. 4.1), которые используются для построения спиновых цепочек с непериодическими граничными условиями (см. п. 4.2).

Напомним, как выводится соотношение (1) для решений K постоянного уравнения отражения

$$R_{12}K_1R_{21}K_2 = K_2R_{12}K_1R_{21} \quad (9)$$

при условии, что R – постоянное решение уравнения Янга–Бакстера, связанное с реализацией алгебры ТЛ, полученной в предыдущем разделе.

Поскольку R -матрица связана с генераторами группы кос посредством соотношений $R = \mathcal{P}\check{R}$ и $R_{21} = \mathcal{P}R_{12}\mathcal{P}$, уравнение (9) можно переписать так:

$$\check{R}_{12}K_1\check{R}_{12}K_1 = K_1\check{R}_{12}K_1\check{R}_{12}.$$

Используя равенство $\check{R} = q\mathbb{I} + X$, получаем

$$qX_{12}K_1^2 + X_{12}K_1X_{12}K_1 = qK_1^2X_{12} + K_1X_{12}K_1X_{12}.$$

В терминах матрицы b это уравнение имеет вид

$$qb \otimes ((K^2)^t \bar{b}) + \text{tr}(Kb\bar{b}^t)b \otimes (K^t \bar{b}) = q(K^2b) \otimes \bar{b} + \text{tr}(Kb\bar{b}^t)(Kb) \otimes \bar{b}.$$

В силу обратимости матриц b и $\bar{b}$ данное уравнение эквивалентно (после транспонирования) уравнению

$$\mathbb{I} \otimes (qK^2 + \text{tr}(Kb\bar{b}^t)K) = (qK^2 + \text{tr}(Kb\bar{b}^t)K) \otimes \mathbb{I}. \quad (10)$$

Отсюда следует, что $qK^2 + \text{tr}(Kb\bar{b}^t)K$ пропорциональна единичной матрице. Величину коэффициента пропорциональности можно найти из условия согласованности, применяя линейную форму $(q\text{-след}) \text{tr}(b\bar{b}^t \dots)$ к одному из множителей в обеих частях равенства (10). Окончательно получаем нормированный квадратичный полином, уничтожающий K :

$$K^2 + \frac{1}{q} \text{tr}(Kb\bar{b}^t)K = k_2 \mathbb{I}, \quad (11)$$

где

$$k_2 = \frac{\text{tr}^2(Kb\bar{b}^t) + q \text{tr}(K^2 b\bar{b}^t)}{q \text{tr}(b\bar{b}^t)}.$$

Полное решение уравнения отражения с данными постоянными R -матрицами типа ТЛ может быть получено в два этапа.

1. Параметризуем все матрицы K с минимальным характеристическим полиномом степени не больше двух.

2. Фиксируем значение коэффициента линейного слагаемого, как в выражении (11).

Как мы видели, коэффициент при постоянном слагаемом является результатом самосогласованности взятия следа и, следовательно, не ведет к дополнительному ограничению для K . Таким образом, эти два этапа необходимы и достаточны для описания всех решений уравнения отражения.

На первом этапе можно выделить три очевидных случая:

а) минимальный полином имеет степень 1, тогда матрица K пропорциональна единичной и автоматически удовлетворяет уравнению отражения без дополнительных ограничений;

б) минимальный полином имеет степень 2 и два различных корня, тогда матрица K диагонализуется и имеет эти два корня как собственные значения;

в) минимальный полином имеет степень 2 и один корень второго порядка, тогда матрица K может быть приведена лишь к треугольному виду (т.е. к виду с жордановыми клетками) с единственным собственным значением и соответствующим нильпотентным подпространством порядка два.

Рассмотрим теперь детально случаи “б” и “в”.

3.1. Диагонализуемые K -матрицы. Любая диагонализуемая $(n \times n)$ -матрица с двумя различными собственными значениями λ и μ может быть параметризована следующим образом: $K = \lambda \mathbb{I} + (\mu - \lambda)P$, где P – проектор на подпространство собственных векторов V_μ , отвечающих собственному значению μ . Всегда можно выбрать μ так, что размерность V_μ , обозначаемая далее через m , меньше или равна размерности V_λ , т.е. $m \leq [n/2]$.

Проектор P строится из двух наборов данных, содержащих всю информацию о пространствах V_μ и V_λ , хотя и с некоторым произволом. Первый из этих наборов есть набор m линейно независимых векторов, составляющих базис пространства V_μ , который задает прямоугольную $(n \times m)$ -матрицу B максимального ранга m . Произвол в этой параметризации связан с произволом выбора базиса в V_μ и задается преобразованием $B \rightarrow Bg$ с любой матрицей $g \in GL(m)$. Второй набор – это набор m независимых векторов, задающих базис в $\bar{V}_\lambda$ – m -мерном векторном пространстве решений однородной линейной системы ранга $n - m$

$$v^t C = 0, \quad (12)$$

где v – искомый n -мерный вектор, а C – прямоугольная $(n \times (n - m))$ -матрица, задающая базис пространства V_λ так же, как B задает базис пространства V_μ . Конечно, эта матрица C определена с точностью до умножения справа на матрицу $g' \in GL(n - m)$. Второй набор из m векторов размерности n позволяет построить вторую прямоугольную $(n \times m)$ -матрицу A максимального ранга m . Эта матрица A также определена с точностью до умножения справа на матрицу $h \in GL(m)$. Легко видеть, что $A^t C = 0$ в силу уравнения (12).

Дополнительно отметим, что пересечение пространств V_μ и V_λ пусто, что эквивалентно требованию отсутствия векторов в пространстве V_λ , удовлетворяющих уравнению (12), или требованию обратимости матрицы $A^t B$.

Проектор P задается следующим образом:

$$P = B(A^t B)^{-1} A^t, \quad (13)$$

что немедленно можно получить, подействовав оператором P на B (на векторы пространства V_μ), при этом снова получится B , и на C (на векторы пространства V_λ), что даст ноль. Напомним, что наша параметризация определена с точностью до умножения B и A на матрицы из $GL(m)$. Этот произвол позволит упростить вид оператора (13).

Таким образом, любая диагонализуемая матрица K с двумя собственными значениями может быть записана в виде

$$K = \lambda \mathbb{I} + (\mu - \lambda) B(A^t B)^{-1} A^t. \quad (14)$$

Число существенных параметров равно 2 (собственные значения) + $2nm$ (элементы матриц A и B) – $2m^2$ (два преобразования базиса из $GL(m)$). Произвол в параметризации $A \rightarrow Ah$, $B \rightarrow Bg$ ясен из представления (14).

Реализуем теперь второй этап, потребовав, чтобы коэффициент при линейном члене в минимальном полиноме, равный сумме двух корней $\lambda + \mu$, совпал с тем, что получается из (11), т. е. $\lambda + \mu = -1/q \cdot \text{tr}(b\bar{b}^t K)$ или

$$\lambda \left(1 + \frac{1}{q} \text{tr}(b\bar{b}^t) - \frac{1}{q} \text{tr}(b\bar{b}^t B(A^t B)^{-1} A^t) \right) + \mu \left(1 + \frac{1}{q} \text{tr}(b\bar{b}^t B(A^t B)^{-1} A^t) \right) = 0. \quad (15)$$

Это условие однозначно фиксирует отношение λ/μ , за исключением случая, когда оба коэффициента в (15) равны нулю, что, в свою очередь, влечет $\text{tr}(b\bar{b}^t) = -2q$, таким образом, след ТЛ (6) дает $q = \pm 1$. В этом случае матрица $\check{R}$ является треугольной, и нет ограничений на собственные значения (см., например, [14]).

Мы можем использовать произвол в выборе матриц A и B , потребовав, чтобы $(m \times m)$ -матрица $A^t B$ была единичной. При этом остается набор из m^2 произвольных параметров. Матрица K принимает вид

$$K = \lambda \left(\mathbb{I} + \frac{-q + 1/q}{q + \text{tr}(b\bar{b}^t B A^t)} B A^t \right), \quad (A^t B) = \mathbb{I}.$$

Полное число существенных параметров в матрице K равно $2(n - m)m + 1$ (за исключением треугольного случая, когда возникает дополнительный параметр). Используя спинные обозначения, которые удобны в контексте спинных цепочек, относящихся к алгебре ТЛ, можно записать $n = 2s + 1$, что дает $2(2s + 1 - m)m + 1$ параметров. Несущественные параметры относятся к глобальным $GL(m)$ -калибровочным

преобразованиям $A \rightarrow A(g^{-1})^t$, $B \rightarrow Bg$. Замена n на s позволяет связать часть наших решений с решениями, полученными недавно [15] (точнее, с матричными коэффициентами в пределе бесконечного спектрального параметра в $K(\lambda)$, которые являются решениями постоянного уравнения отражения). Мы имеем в точности диагонализующиеся решения, соответствующие выбору $m = [(2s+1)/2]$. Например, при $s = 3/2$ ($n = 4$) получаем девять параметров, и решение имеет два собственных значения кратности 2. Возможно также вычислить собственные векторы в явном виде, хотя используемая в работе [15] параметризация дает громоздкие формулы, которые мы здесь не приводим.

3.2. Недиагонализуемые K -матрицы. В этом случае K -матрица автоматически имеет вид $\lambda \mathbb{I} + N$, где N – нильпотентная $(n \times n)$ -матрица: $N^2 = 0$. Существует параметризация матрицы N , аналогичная предыдущему случаю. Положим размерность ядра N равной $n - m$, при этом, конечно, $m \leq [n/2]$, поскольку $\text{Im } N \subset \text{Ker } N$. Тогда m -мерный образ коядра матрицы N дает прямоугольную матрицу B с точностью до умножения справа на $g \in GL(m)$. Ядро матрицы N размерности $n - m$, как и в (12), характеризуется еще одной прямоугольной $(n \times m)$ -матрицей A . Однако теперь можно наложить условие включения образа векторов, определяющих B , в ядро, другими словами, $A^t B = 0$. Отсюда немедленно следует, что $N = BA^t$. В силу условия $A^t B = 0$ матрица N фиксирована с точностью до множителя, который получается из условия

$$\lambda \left(q - \frac{1}{q} \right) = \text{tr}(b\bar{b}^t BA^t).$$

Несущественные параметры также связаны с диагональным глобальным $GL(m)$ -калибровочным преобразованием $A \rightarrow A(g^{-1})^t$, $B \rightarrow Bg$. Число существенных параметров, таким образом, равно 1 (собственное значение) + $2nm$ (элементы матриц A и B) – m^2 (изменение базиса в $GL(m)$) – m^2 (условие $A^t B = 0$) – 1 (соотношение следа) = $2nm - 2m^2$.

3.3. Полная параметризация. Оба рассмотренных выше случая можно объединить.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Любое решение постоянного уравнения отражения, связанного с алгеброй ТЛ (9), можно записать в виде $K = \lambda \mathbb{I} + BA^t$, где A и B – прямоугольные $(n \times m)$ -матрицы ранга m , $m \leq [n/2]$, определенные с точностью до диагонального $GL(m)$ -калибровочного преобразования g ,

$$A \rightarrow A(g^{-1})^t, \quad B \rightarrow Bg, \quad g \in GL(m),$$

и удовлетворяющие условиям

$$A^t B = (\mu - \lambda) \mathbb{I}, \quad -\frac{1}{q} \lambda + q\mu = -\text{tr}(b\bar{b}^t BA^t).$$

При $\mu = \lambda$ получаем недиагонализуемый случай, при $\mu \neq \lambda$ получаем диагонализующийся случай.

4. K-МАТРИЦЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

4.1. Янг-бакстеризация. Процедура янг-бакстеризации для R -матриц Гекке была упомянута в разделе 2 (см. уравнение (8)). Чтобы определить соответствующую процедуру для ассоциированных K -матриц, удовлетворяющих уравнению отражения, необходимо задать расширение алгебры Гекке до аффинной алгебры Гекке $\hat{H}_N(q)$. Последняя имеет дополнительный генератор K , удовлетворяющий соотношениям

$$\check{R}_1 K \check{R}_1 K = K \check{R}_1 K \check{R}_1, \quad K \check{R}_j = \check{R}_j K, \quad j > 1. \quad (16)$$

Как и в случае алгебры Гекке, требование дополнительной полиномиальной связи $p_n(K) = 0$ определяет фактор-алгебру $\hat{H}_N(q)$, известную как “циклотомическая алгебра Гекке” [16]. В этом случае существуют согласованные реализации процедуры янг-бакстеризации K -матрицы с использованием полиномов Лорана $K(u)$ от u , u^{-1} , зависящих от коэффициентов p_n и K^m , $m = 0, 1, \dots, n-1$ [13]. Эти полиномы $K(u)$ являются решениями алгебраического уравнения отражения [5]

$$\check{R}_1(u/w)K(u)\check{R}_1(uw)K(w) = K(w)\check{R}_1(uw)K(u)\check{R}_1(u/w),$$

где $\check{R}_1(u)$ – янг-бакстеризация матрицы $\check{R}$ (8). Как только найдена подходящая матричная реализация $\check{R}$ и K соответственно в $\text{End}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ и $\text{End}(\mathbb{C}^n)$, это соотношение становится уравнением Складина

$$\check{R}_{12}(u/w)K_1(u)\check{R}_{12}(uw)K_1(w) = K_1(w)\check{R}_{12}(uw)K_1(u)\check{R}_{12}(u/w).$$

Мы рассматриваем здесь специальный случай R -матриц типа ТЛ с проектором ранга 1. Как было показано в разделе 3, постоянное решение K уравнения отражения в этом случае удовлетворяет квадратному уравнению (11). Согласно общим результатам [11]–[13] зависящая от спектрального параметра матрица $K(u)$ дается выражением

$$K(u) = u^2 K - \frac{1}{u^2} K^{-1} + c \quad (17)$$

с произвольным центральным элементом c . Из соотношений (11) и (17) следует, что после подходящей нормировки K можно получить свойство регулярности: $K(u)|_{u=1} = 1$. Это свойство является важным для построения гамильтонианов спиновых цепочек с взаимодействием ближайших соседей и граничным взаимодействием в граничных левом и правом узлах, описываемым матрицами $K^-(u)$ и $K^+(u)$ соответственно [5].

4.2. Спиновые цепочки. Построение гамильтониана спиновой цепочки следует общему формализму. Возьмем R -матрицу $R_{0j}(u) = \mathcal{P}_{0j}\check{R}_{0j}$ в качестве L -оператора в каждом узле j и, обозначая вспомогательное пространство индексом 0, построим матрицу монодромии $T(u)$ [7], [8] и двухстрочную матрицу монодромии $\mathcal{T}(u)$ [5],

$$T(u) = L_{0N}(u)L_{0,N-1}(u)\dots L_{01}(u), \quad \mathcal{T}(u) = T(u)K_0^-(u)T^{-1}(1/u),$$

где $K^-(u)$ – решение уравнения отражения. Производящая функция интегралов движения (включая гамильтониан) равна

$$\tau(u) = \text{tr } K_0^+(u)T(u)K_0^-(u)T^{-1}(1/u),$$

где добавлена матрица $K_0^+(u)$ – решение соответствующего дуального уравнения отражения. Эти решения можно получить непосредственно из набора решений $K_0^-(u)$, используя свойство кроссинг-унитарности R -матрицы. В терминах R -матрицы для $\tau(u)$ имеем

$$\tau(u) = \text{tr } K_0^+(u) R_{0N}(u) R_{0,N-1}(u) \dots R_{01}(u) K_0^-(u) R_{10}(u) R_{20}(u) \dots R_{N0}(u).$$

Подходящая нормировка фиксирует $\tau(1) = \text{tr } K^+(1)$ (напомним, что, используя мультипликативный спектральный параметр, мы получаем его значение для свойства регулярности, равное единице). Гамильтониан спиновой цепочки дается локальным выражением

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} \left. \frac{d\check{R}_{k,k+1}}{du} \right|_{u=1} + \frac{1}{2} \left. \frac{dK_1^-}{du} \right|_{u=1} + \text{tr}^{-1} K_0^+(1) \cdot \text{tr} \left(K_0^+(1) \left. \frac{d\check{R}_{N0}}{du} \right|_{u=1} \right),$$

где приведены в явном виде граничные вклады. Используя общие $(n \times n)$ -матрицы $K^+(u)$ и $K^-(u)$ с полным набором параметров в соответствии с результатами раздела 3, мы можем заметить, что граничные вклады не позволяют описать количественно такие свойства спиновой системы, как спектр и собственные векторы. В данный момент отсутствует подходящий формализм для анализа общего случая, и мы вынуждены отложить эту важную задачу на будущее.

Для иллюстрации того, что может быть сделано при наличии подходящих алгебраических методов, рассмотрим простейший частный случай, который можно проанализировать, используя общие алгебраические рассуждения о симметрии.

Ограничимся случаем цепочки со свободными концами [17]

$$K_1^-(u) = \mathbb{I}, \quad K_1^+(u) = M = b^t \bar{b},$$

где матрица M взята из соотношения кроссинг-унитарности для R -матрицы. Тогда гамильтониан спиновой цепочки и высшие интегралы будут элементами алгебры ТЛ, например

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} \left. \frac{d\check{R}_{k,k+1}}{du} \right|_{u=1} \in TL_N(q).$$

Симметрия этого гамильтониана описывается квантовой алгеброй $\mathcal{U}_q(n)$ [4], [6]. Оператор H допускает ограничения на подпространства неприводимых представлений алгебры $TL_N(q)$ в разложении полного пространства состояний

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^N \mathbb{C}^n = \bigotimes_{k=0}^{[N/2]} W_k \otimes \mathbb{C}^{\nu(k)},$$

где W_k обозначает неприводимые представления алгебры $TL_N(q)$, отвечающие двухстрочным диаграммам Юнга с разбиением $\{(\lambda_1, \lambda_2): \lambda_1 + \lambda_2 = N, \lambda_2 = k\}$, а $\nu(k)$ – кратность такого представления в этом разложении. Следовательно, спектр гамильтониана H состоит из мультиплетов $\{E_k^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \dots, \dim W_k$, соответствующих неприводимым представлениям W_k , каждое из которых имеет кратность $\nu(k)$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке CNRS, Université de Cergy-Pontoise и ANR Project DIADEMS (Programme Blanc ANR SIMI1 2010-BLAN-0120-02). П. П. Кулиш частично поддержан GDRI-471 “Formation et recherche en physique théorique” и РФФИ (гранты № 09-01-00504 и 09-01-93108-НЦНИЛ).

Список литературы

- [1] H. N. V. Temperley, E. H. Lieb, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **322**:1549 (1971), 251–280.
- [2] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.
- [3] P. Martin, *Potts Models and Related Problems in Statistical Mechanics*, Series on Advances in Statistical Mechanics, **5**, World Scientific, Teaneck, NJ, 1991.
- [4] P. P. Kulish, *J. Phys. A*, **36**:38 (2003), L489–L493.
- [5] E. K. Sklyanin, *J. Phys. A*, **21**:10 (1988), 2375–2389.
- [6] P. P. Kulish, N. Manojlovic, Z. Nagy, *J. Math. Phys.*, **49**:2 (2008), 023510, 9 pp., arXiv: 0712.3154.
- [7] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63.
- [8] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Quantum Symmetries. Proceedings of the Les Houches Summer School. Session LXIV* (Les Houches, France, August 1 – September 8, 1995), eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, North Holland, Amsterdam, 1998, 149–219.
- [9] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform methods recent developments”, *Integrable Quantum Field Theories*, Lecture Notes in Physics, **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, Springer, Berlin, New York, 1982, 61–119.
- [10] V. Chari, A. N. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [11] D. Levy, P. Martin, *J. Phys. A*, **27**:14 (1994), L521–L526.
- [12] A. Doikou, *Nucl. Phys. B*, **725**:3 (2005), 493–530, arXiv: math-ph/0409060.
- [13] P. P. Kulish, A. I. Mudrov, *Lett. Math. Phys.*, **75**:2 (2006), 151–170, arXiv: math/0508289.
- [14] П. П. Кулиш, Н. Манойлович, З. Надь, *ТМФ*, **163**:2 (2010), 288–298.
- [15] A. Lima-Santos, *On the $\mathcal{U}_q[sl(2)]$ Temperley-Lieb reflection matrices*, arXiv: 1011.2891.
- [16] S. Ariki, “Lectures on cyclotomic Hecke algebras”, *Quantum Groups and Lie Theory*, London Math. Soc. Lecture Notes Ser., **290**, ed. A. Pressley, 2002, 1–22, arXiv: math/9908005.
- [17] L. Mezincescu, R. I. Nepomechie, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:29 (1991), 5231–5248, arXiv: hep-th/9206047; **7**:22 (1992), 5657–5659 (Addendum).