Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Э. Деркачёв, Факторизация R -матрицы, Q -оператор и разделение переменных в случае $XX\bar{X}$ -спиновой цепочки с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 2, 204–217

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6722>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:12:04

© 2011 г.

С. Э. Деркачёв*

ФАКТОРИЗАЦИЯ R -МАТРИЦЫ, Q -ОПЕРАТОР И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В СЛУЧАЕ ХХХ-СПИНОВОЙ ЦЕПОЧКИ С ГРУППОЙ СИММЕТРИИ $SL(2, \mathbb{C})$

На примере интегрируемой спиновой цепочки с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$ показана связь между факторизацией R -матрицы, Q -оператором Бакстера и разделением переменных.

Ключевые слова: уравнение Янга–Бакстера, Q -оператор, разделение переменных.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современным подходом к теории квантовых интегрируемых систем является квантовый метод обратной задачи рассеяния [1]–[5], связывающий с каждым решением уравнения Янга–Бакстера интегрируемую модель и обеспечивающий метод построения собственных состояний гамильтониана модели при помощи алгебраического анзаца Бете [1], [2], [5]. Альтернативными подходами являются метод Q -оператора [6], [7] и метод разделения переменных [4], [8], которые эквивалентны алгебраическому анзацу Бете при наличии псевдовакуума, но применимы и в более общей ситуации.

Систематический способ построения Q -операторов для модели с алгеброй симметрии $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ был предложен в работах [9]. В рамках этого метода Q -оператор строится как след специальной матрицы монодромии по вспомогательному пространству бесконечномерного представления q -осцилляторной алгебры. При этом используется явный вид универсальной R -матрицы [10]. Абстрактное представление через генераторы для универсальной R -матрицы является достаточно сложным. Кроме того, случай недеформированной симметрии $\mathfrak{sl}_2$ должен получаться в пределе $q \rightarrow 1$, что само по себе является нетривиальной технической задачей.

В работах [11], [12] предложен другой метод построения Q -операторов в моделях спиновых цепочек с алгеброй симметрии $\mathfrak{sl}_2$. Согласно этому методу Q -оператор строится аналогичным образом как след специальной матрицы монодромии по бесконечномерному вспомогательному пространству, и основное его отличие от метода

* Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: derkach@pdmi.ras.ru

работ [9] состоит в том, что в качестве вспомогательного пространства выбирается пространство специального представления алгебры симметрии, которое не является аналогом представления q -осцилляторной алгебры. Универсальная R -матрица также играет ключевую роль, как и в [9]. Действующая в тензорном произведении двух представлений алгебры симметрии R -матрица может быть представлена в виде произведения двух (для sl_2) более простых операторов. Свойство факторизации R -матрицы наследуется трансфер-матрицей [11], [12], строящейся в виде следа произведения R -матриц. Трансфер-матрица распадается в произведение более простых строительных блоков, которые и являются Q -операторами. Вся конструкция обобщается на случай спиновой цепочки с группой симметрии $SL(n, \mathbb{C})$. Первый этап – построение общей R -матрицы – подробно описан в статье [13]. Второй этап – построение трансфер-матриц и Q -операторов – являясь естественным продолжением работы [13], находится в процессе разработки.

В настоящей работе мы рассматриваем в качестве простого и вместе с тем нетривиального содержательного примера XX -спиновую цепочку с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$, имеющую приложения в теории полей Янга–Миллса [14]–[17]. Работа носит в основном методический характер: полученные ранее результаты собраны в одном месте и представлены с единой точки зрения. В связи с этим в список литературы включены только те работы, которые имеют непосредственное отношение к рассматриваемому кругу вопросов.

2. ЛОКАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ: L -ОПЕРАТОРЫ И R -ОПЕРАТОРЫ

Напомним, что R -матрица – это оператор $R_{12}(u, \bar{u})$, удовлетворяющий уравнению Янга–Бакстера

$$R_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v})R_{13}(u, \bar{u})R_{23}(v, \bar{v}) = R_{23}(v, \bar{v})R_{13}(u, \bar{u})R_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}).$$

Оператор $R_{12}(u, \bar{u})$ зависит от спектральных параметров $u, \bar{u}$ и действует в тензорном произведении $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$ двух представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$. В уравнении Янга–Бакстера все операторы определены в общем тензорном произведении трех пространств $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3$. Индексы i, k показывают, что оператор R_{ik} действует нетривиально в тензорном произведении $\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_k$, а на оставшуюся часть тензорного произведения $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3$ продолжается как единичный оператор. Выбирая различные представления пространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$, в которых действует оператор $R_{12}(u, \bar{u})$, получаем различные R -матрицы.

2.1. Матрицы $L(u)$ и $\bar{L}(\bar{u})$. Пусть $\mathbb{V}_1$ – пространство функций от переменных z и $\bar{z}$, в котором действуют операторы представления непрерывной серии $T^{(\sigma_1, \sigma_2)}$ [18]. Выражения для генераторов E_{ik} и $\bar{E}_{ik}$ алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$,

$$[E_{ik}, E_{nm}] = \delta_{kn}E_{im} - \delta_{im}E_{nk}, \quad E_{11} + E_{22} = \mathbb{1},$$

в представлении $T^{(\sigma_1, \sigma_2)}: \sigma_1 - \bar{\sigma}_1, \sigma_2 - \bar{\sigma}_2 \in \mathbb{Z}, \sigma_1 + \sigma_2 = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 = 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} E_{11} &= z\partial_z + 1 - \sigma_1, & E_{12} &= z^2\partial_z + (1 - \sigma_1 + \sigma_2)z, & E_{21} &= -\partial_z, & E_{22} &= -z\partial_z - \sigma_2, \\ \bar{E}_{11} &= \bar{z}\partial_{\bar{z}} + 1 - \bar{\sigma}_1, & \bar{E}_{12} &= \bar{z}^2\partial_{\bar{z}} + (1 - \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2)\bar{z}, & \bar{E}_{21} &= -\partial_{\bar{z}}, & \bar{E}_{22} &= -\bar{z}\partial_{\bar{z}} - \bar{\sigma}_2. \end{aligned}$$

У группы $SL(2, \mathbb{C})$ существуют два двумерных фундаментальных представления. Если в качестве пространства $\mathbb{V}_2$ взять двумерное пространство первого фундаментального представления, то оператор $R_{12}(u, \bar{u})$ превратится в матрицу $L(u)$, а для второго двумерного представления получим $\bar{L}(\bar{u})$. Для $L(u)$ существует удобное представление в виде произведения треугольных матриц:

$$L(u) = \begin{pmatrix} u + E_{11} & E_{21} \\ E_{12} & u + E_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & -\partial_z \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Матрица $L(u)$ зависит от спектрального параметра u и параметров σ_1, σ_2 представления $T^{(\sigma_1, \sigma_2)}$. Формула (1) показывает, что все параметры естественным образом комбинируются в набор чисел $(u_1, u_2) = (u - \sigma_1, u - \sigma_2)$, которые стоят на диагонали во второй матрице в правой части (1), так что $L(u) = L(u_1, u_2)$. Для матрицы $\bar{L}(\bar{u})$ аналогично $\bar{L}(\bar{u}) = \bar{L}(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, где $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (\bar{u} - \bar{\sigma}_1, \bar{u} - \bar{\sigma}_2)$.

2.2. $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантная R -матрица. Возьмем в качестве пространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ пространства представлений непрерывных серий. Пусть $\mathbb{V}_1$ – пространство функций от переменных z_1 и $\bar{z}_1$, в котором действуют операторы представления $T^{(\sigma_1, \sigma_2)}$, а $\mathbb{V}_2$ – пространство функций от переменных z_2 и $\bar{z}_2$, в котором действуют операторы представления $T^{(\rho_1, \rho_2)}$. Оператор R_{12} является решением RLL -соотношений [19]

$$\begin{aligned} R_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}) L_1(u_1, u_2) L_2(v_1, v_2) &= L_2(v_1, v_2) L_1(u_1, u_2) R_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}), \\ R_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}) \bar{L}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \bar{L}_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2) &= \bar{L}_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \bar{L}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) R_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}), \end{aligned}$$

где L -матрицы имеют следующий вид:

$$L_1(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & -\partial_{z_1} \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & -\partial_{z_2} \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Параметры группируются в наборы чисел $(u_1, u_2) = (u - \sigma_1, u - \sigma_2)$ и $(v_1, v_2) = (v - \rho_1, v - \rho_2)$, которые стоят на диагоналях в средних матрицах. Удобно объединить все параметры в один набор $\mathbf{u} = (v_1, v_2, u_1, u_2)$. Оператор R_{12} , во-первых, меняет местами индексы 1 и 2 в произведении $L_1 L_2$, что соответствует замене $z_1 \rightleftharpoons z_2$, во-вторых, меняет местами пары параметров u_1, u_2 и v_1, v_2 . $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантное решение RRL -уравнений имеет следующий вид [13], [17]:

$$R_{12}(u - v) = R_{12}(\mathbf{u}) = P_{12}[z_{12}]^{u_2 - v_1} [i\partial_2]^{u_1 - v_1} [i\partial_1]^{u_2 - v_2} [z_{12}]^{u_1 - v_2}, \quad (2)$$

где мы использовали компактное обозначение $[z]^a \equiv z^a \cdot \bar{z}^{\bar{a}}$ для $a - \bar{a} \in \mathbb{Z}$ и явным образом выделили оператор P_{12} , который меняет местами переменные z_1 и z_2 : $P_{12}\Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \Phi(z_2, \bar{z}_2, z_1, \bar{z}_1)$.

2.3. Операторы R_1 и R_2 . Роль элементарных строительных блоков для Q -операторов играют операторы R_1 и R_2 , отвечающие двум перестановкам r_1 и r_2 таким, что r_1 переставляет только u_1 и v_1 , а r_2 переставляет только u_2 и v_2 в наборе $\mathbf{u} = (v_1, v_2, u_1, u_2)$:

$$r_1(v_1, v_2, u_1, u_2) = (u_1, v_2, v_1, u_2), \quad r_2(v_1, v_2, u_1, u_2) = (v_1, u_2, u_1, v_2).$$

Рис. 1. Перестановки параметров.

Определяющие уравнения для операторов R_1 и R_2 имеют вид

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{u})L_1(u_1, u_2)L_2(v_1, v_2) &= L_1(v_1, u_2)L_2(u_1, v_2)R_1(\mathbf{u}), \\ R_2(\mathbf{u})L_1(u_1, u_2)L_2(v_1, v_2) &= L_1(u_1, v_2)L_2(v_1, u_2)R_2(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

а решение записывается как [13]

$$R_1(\mathbf{u}) = [z_{12}]^{v_2-v_1} [i\partial_2]^{u_1-v_1} [z_{12}]^{u_1-v_2}, \quad R_2(\mathbf{u}) = [z_{12}]^{u_2-u_1} [i\partial_1]^{u_2-v_2} [z_{12}]^{u_1-v_2}.$$

Из этих явных выражений видно, что оператор R_1 коммутирует с z_1 , а R_2 — с z_2 .

Для оператора $R_{12}(\mathbf{u})$ получаем представление в виде произведения:

$$R_{12}(\mathbf{u}) = P_{12}R_1(r_2\mathbf{u})R_2(\mathbf{u}),$$

где

$$R_1(r_2\mathbf{u}) = [z_{12}]^{u_2-v_1} [i\partial_2]^{u_1-v_1} [z_{12}]^{u_1-u_2}, \quad R_2(\mathbf{u}) = [z_{12}]^{u_2-u_1} [i\partial_1]^{u_2-v_2} [z_{12}]^{u_1-v_2}.$$

Перечислим основные свойства рассматриваемых операторов $R_1(\mathbf{u})$ и $R_2(\mathbf{u})$. Эти операторы имеют точки вырождения:

$$R_1(\mathbf{u})|_{v_1=u_1} = \mathbb{1}, \quad R_2(\mathbf{u})|_{v_2=u_2} = \mathbb{1}, \quad (3)$$

$$R_{12}(\mathbf{u})|_{v_1=u_1} = P_{12} \cdot R_2(\mathbf{u}), \quad R_{12}(\mathbf{u})|_{v_2=u_2} = P_{12} \cdot R_1(r_2\mathbf{u}). \quad (4)$$

Кроме того, справедливы двойные соотношения. Двойные соотношения, которым должны удовлетворять операторы R_1 и R_2 , дублируют соотношения для образующих соответствующей группы перестановок. В случае произведения двух матриц Лакса $L_1(u_1, u_2)L_2(v_1, v_2)$ группа перестановок есть $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$, где одна группа $\mathfrak{S}_2$

переставляет параметры u_1 и v_1 , а вторая группа $\mathfrak{S}_2$ – параметры u_2 и v_2 . Две группы $\mathfrak{S}_2$ коммутируют друг с другом:

$$r_1 r_2 = r_2 r_1 \rightarrow R_1(r_2 \mathbf{u}) R_2(\mathbf{u}) = R_2(r_1 \mathbf{u}) R_1(\mathbf{u}).$$

В случае трех матриц $L_1(u_1, u_2) L_2(v_1, v_2) L_3(w_1, w_2)$ при $\mathbf{u} = (w_1, w_2, v_1, v_2, u_1, u_2)$ (см. рис. 1) у нас есть две коммутирующие друг с другом группы $\mathfrak{S}_3$. Перестановки r_1 и r_3 являются генераторами первой группы $\mathfrak{S}_3$ перестановок трех параметров (w_1, v_1, u_1) :

$$r_1 \mathbf{u} = (v_1, w_2, w_1, v_2, u_1, u_2), \quad r_3 \mathbf{u} = (w_1, w_2, u_1, v_2, v_1, u_2).$$

Каждой из этих перестановок отвечает оператор R_1 , действующий в разных пространствах. Будем обозначать соответствующий оператор через R_{ij}^1 , оставив стандартные нижние индексы ij для указания пространств, в которых оператор действует нетривиально, и перенеся индекс 1 наверх:

$$\begin{aligned} r_1 &\rightarrow R_{23}^1(\mathbf{u}) = [z_{23}]^{w_2-w_1} [i\partial_3]^{v_1-w_1} [z_{23}]^{v_1-w_2}, \\ r_3 &\rightarrow R_{12}^1(\mathbf{u}) = [z_{12}]^{v_2-v_1} [i\partial_2]^{u_1-v_1} [z_{12}]^{u_1-v_2}. \end{aligned}$$

Перестановки r_2 и r_4 – генераторы второй группы $\mathfrak{S}_3$ перестановок трех параметров (w_2, v_2, u_2) :

$$\begin{aligned} r_2 \mathbf{u} &= (w_1, v_2, v_1, w_2, u_1, u_2), \quad r_2 \rightarrow R_{23}^2(\mathbf{u}) = [z_{23}]^{v_2-v_1} [i\partial_2]^{v_2-w_2} [z_{23}]^{v_1-w_2}, \\ r_4 \mathbf{u} &= (w_1, w_2, v_1, u_2, u_1, v_2), \quad r_4 \rightarrow R_{12}^2(\mathbf{u}) = [z_{12}]^{u_2-u_1} [i\partial_1]^{u_2-v_2} [z_{12}]^{u_1-v_2}. \end{aligned}$$

Четыре двойных соотношения выражают тот факт, что генераторы двух разных групп $\mathfrak{S}_3$ коммутируют: соотношения $r_2 r_1 = r_1 r_2$ и $r_4 r_3 = r_3 r_4$ не дают ничего нового, а равенства $r_4 r_1 = r_1 r_4$ и $r_2 r_3 = r_3 r_2$ приводят к новым соотношениям

$$R_{12}^2(r_1 \mathbf{u}) R_{23}^1(\mathbf{u}) = R_{23}^1(r_4 \mathbf{u}) R_{12}^2(\mathbf{u}), \quad R_{23}^2(r_3 \mathbf{u}) R_{12}^1(\mathbf{u}) = R_{12}^1(r_2 \mathbf{u}) R_{23}^2(\mathbf{u}). \quad (5)$$

Оператор R_{12}^2 не зависит от параметров w_1 и v_1 , которые переставляет r_1 , поэтому $R_{12}^2(r_1 \mathbf{u}) = R_{12}^2(\mathbf{u})$ и точно так же $R_{23}^1(r_4 \mathbf{u}) = R_{23}^1(\mathbf{u})$, поэтому первое соотношение в (5) есть соотношение коммутативности

$$R_{12}^2(\mathbf{u}) R_{23}^1(\mathbf{u}) = R_{23}^1(\mathbf{u}) R_{12}^2(\mathbf{u}).$$

Графически двойные соотношения изображены на рис. 2.

3. ГЛОБАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ: ТРАНСФЕР-МАТРИЦЫ И Q -ОПЕРАТОРЫ

Рассмотрим интегрируемую модель, которая называется однородной $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной XXX -спиновой цепочкой [14]–[17]. Пространством состояний в данной модели является тензорное произведение пространств $\mathbb{V}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}_N$, где каждое $\mathbb{V}_k$ – пространство функций от переменных $z_k, \bar{z}_k$, на котором реализовано представление $T^{(\sigma_1, \sigma_2)}$. Различные семейства коммутирующих операторов, действующих в пространстве $\mathbb{V}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}_N$, строятся стандартным образом из решений уравнения

Рис. 2. Графическое изображение двойных соотношений для операторов $R_1(u)$ и $R_2(u)$.

Янга–Бакстера. Оператор $R_{12}(u)$ используется в качестве строительного блока при построении самой общей производящей функции – трансфер-матрицы $T_\rho(u)$ [3]–[5]:

$$T_\rho(u) = \text{tr}_{V_0} \{R_{10}(u) \dots R_{N0}(u)\}, \quad \rho = (\rho_1, \rho_2).$$

Каждый оператор R_{k0} действует в тензорном произведении $V_k \otimes V_0$, и след вычисляется по вспомогательному пространству V_0 – пространству функций от переменных $z_0, \bar{z}_0$, на котором реализовано представление $T^{(\rho_1, \rho_2)}$. Иногда удобнее использовать более простые обозначения, указывая только зависимость от спектрального параметра: оператор $R_{k0}(u)$ – это просто оператор $R_{k0}(u - v) = R_{k0}(u)$ при $v = 0$, так что $v_1 \rightarrow -\rho_1$ и $v_2 \rightarrow -\rho_2$.

Оператор $R_{12}(u)$ удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера, это приводит к коммутативности трансфер-матриц $T_\rho(u)$ и $T_{\rho'}(u')$: мы имеем $[T_\rho(u), T_{\rho'}(u')] = 0$. В случае $V_0 = \mathbb{C}^2$ оператор R_{k0} есть матрица L_k , при этом трансфер-матрица $t(u) = \text{tr} \{L_1(u) \dots L_N(u)\}$. Для второго фундаментального представления получается трансфер-матрица $\bar{t}(\bar{u}) = \text{tr} \{\bar{L}_1(\bar{u}) \dots \bar{L}_N(\bar{u})\}$. Коммутативность трансфер-матриц явля-

ется следствием уравнения Янга–Бакстера:

$$[t(u), t(v)] = [\bar{t}(\bar{u}), \bar{t}(\bar{v})] = [t(u), \bar{t}(\bar{v})] = 0.$$

3.1. Факторизация трансфер-матрицы. Свойства строительного блока, оператора $R(u)$, наследуются трансфер-матрицей $T_\rho(u)$ [11], [12], [17]. Как и оператор $R(u)$, трансфер-матрица $T_\rho(u)$ может быть представлена в виде произведения более простых операторов. Мы будем называть их Q -операторами, поскольку они обладают всеми нужными свойствами Q -операторов Бакстера [6]. Кроме того, точно так же, как оператор R в специальных точках допускает редукцию либо к оператору R_1 , либо к оператору R_2 , трансфер-матрица допускает редукцию к одному из Q -операторов при специальном выборе параметров представления ρ_1, ρ_2 во вспомогательном пространстве.

Перепишем формулу факторизации $R_{12}(\mathbf{u}) = P_{12}R_1(r_2\mathbf{u})R_2(\mathbf{u})$ в более простых обозначениях,

$$R_{12}(u) = P_{12}R_1(u + \rho_1)R_2(u + \rho_2),$$

указывая в операторах $R_1(r_2\mathbf{u})$ и $R_2(\mathbf{u})$ только зависимость от спектрального параметра:

$$R_1(u + \rho_1) = [z_{12}]^{u_2 + \rho_1} [i\partial_2]^{u_1 + \rho_1} [z_{12}]^{u_1 - u_2}, \quad R_2(u + \rho_2) = [z_{12}]^{u_2 - u_1} [i\partial_1]^{u_2 + \rho_2} [z_{12}]^{u_1 + \rho_2}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Трансфер-матрица $T_\rho(u)$ представляется как произведение трех операторов:

$$T_\rho(u) = Q_1(u + \rho_1)P^{-1}Q_2(u + \rho_2), \quad \rho = (\rho_1, \rho_2), \quad (6)$$

где $P = P_{12} \dots P_{1N}$ – оператор циклического сдвига,

$$P\Phi(z_1, z_2, z_3, \dots, z_N) = \Phi(z_N, z_1, z_2, \dots, z_{N-1}),$$

и явные выражения для $Q_1(u)$ и $Q_2(u)$ приведены без несущественных сдвигов спектральных параметров, т. е. при $\rho_1 = \rho_2 = 0$:

$$\begin{aligned} Q_1(u) &= \text{tr}_{\mathbb{V}_0} \{ P_{10}R_{10}^1(u) \dots P_{N0}R_{N0}^1(u) \}, & R_{k0}^1(u) &= [z_{k0}]^{u_2} [i\partial_0]^{u_1} [z_{k0}]^{u_1 - u_2}, \\ Q_2(u) &= \text{tr}_{\mathbb{V}_0} \{ P_{10}R_{10}^2(u) \dots P_{N0}R_{N0}^2(u) \}, & R_{k0}^2(u) &= [z_{k0}]^{u_2 - u_1} [i\partial_k]^{u_2} [z_{k0}]^{u_1}. \end{aligned}$$

Процесс факторизации трансфер-матрицы удобнее всего представить наглядно при помощи рисунков. Для простоты мы рассмотрели пример трансфер-матрицы для цепочки с тремя узлами (см. рис. 3). Заметим, что рецепт построения операторов Q_1 и Q_2 имитирует рецепт построения общей трансфер-матрицы, только в качестве строительных блоков используются операторы R_1 и R_2 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Операторы $Q_1(u)$ и $Q_2(u)$ совпадают с оператором P при специальных значениях спектрального параметра, $Q_1(\sigma_1) = P$ и $Q_2(\sigma_2) = P$, поэтому в двух специальных точках $\rho_2 = (\sigma_1 - u, \sigma_2 + u)$ или $\rho_1 = (\sigma_1 + u, \sigma_2 - u)$ происходит редукция: оператор $T_\rho(u)$ есть оператор Q_2 или оператор Q_1 соответственно:

$$T_{\rho_2}(u) = Q_2(2u + \sigma_2), \quad T_{\rho_1}(u) = Q_1(2u + \sigma_1).$$

Операторы $Q_i(u)$ и $Q_k(v)$ коммутируют,

$$[Q_1(u), Q_1(v)] = [Q_1(u), Q_2(v)] = [Q_2(u), Q_2(v)] = 0.$$

Рис. 3. Факторизация трансфер-матрицы при помощи двойных соотношений для операторов R_1 и R_2 .

При доказательство редукции используются только формулы (4). Так как трансфер-матрицы $T_\rho(u)$ коммутируют между собой, из свойства редукции сразу следует коммутативность операторов $Q_i(u)$ и $Q_k(v)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Операторы $Q_1(u) = Q_1(u_1, u_2)$ и $Q_2(u) = Q_2(u_1, u_2)$ связаны друг с другом соотношением

$$Q_2(u_1, u_2)S = SQ_1(u_2, u_1), \quad S = [i\partial_1]^{u_1-u_2} \dots [i\partial_N]^{u_1-u_2}. \quad (7)$$

Во-первых, преобразуем представление для Q -операторов, используя операторное тождество, которое называется “соотношение звезда–треугольник” [20]:

$$[i\partial_z]^\alpha [z]^{\alpha+\beta} [i\partial_z]^\beta = [z]^\beta [i\partial_z]^{\alpha+\beta} [z]^\alpha.$$

Теперь в операторе $Q_2(u_1, u_2)$ можно передвинуть вправо все операторы вида $[i\partial_k]^{u_2-u_1}$:

$$Q_2(u_1, u_2) = \text{tr}_{V_0} \{ P_{10} [i\partial_1]^{u_1} [z_{10}]^{u_2} \dots P_{N0} [i\partial_N]^{u_1} [z_{N0}]^{u_2} \} S^{-1},$$

а в операторе $Q_1(u_1, u_2)$ можно передвинуть влево операторы вида $[i\partial_0]^{u_1-u_2}$:

$$Q_1(u_1, u_2) = S^{+1} \cdot \text{tr}_{V_0} \{ P_{10} [z_{10}]^{u_1} [i\partial_0]^{u_2} \dots P_{N0} [z_{N0}]^{u_1} [i\partial_0]^{u_2} \}.$$

Используя свойство цикличности следа, переставим крайний правый оператор $[i\partial_0]^{u_2}$ влево под знаком tr_{V_0} , а потом сдвинем все операторы $[i\partial_0]^{u_2}$ на один шаг вправо, пронеся их через соответствующие операторы перестановок P_{k0} . В итоге получается такой же оператор, как и для $Q_2(u_1, u_2)$, только с заменой $u_1 \rightleftharpoons u_2$.

Поскольку операторы Q_1 и Q_2 связаны соотношением подобия, можно сосредоточиться на одном из них – операторе Q_2 , аналогичные формулы для оператора Q_1

можно будет вывести, применив преобразование подобия и переставив должным образом параметры.

Используя коммутативность $R_{k0}^2(\mathbf{u})z_0 = z_0 R_{k0}^2(\mathbf{u})$, можно доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. След в выражении $Q_2(u) = \text{tr}_{\mathbb{V}_0} \{P_{10}R_{10}^2(u) \dots P_{N0}R_{N0}^2(u)\}$ может быть вычислен явным образом:

$$Q_2(u) = P \cdot R_{12}^2(u) \dots R_{N-1,N}^2(u) R_{N0}^2(u) \Big|_{z_0 \rightarrow z_1}, \quad (8)$$

где P – оператор циклического сдвига.

Отметим, что операция $z_0 \rightarrow z_1$ выполняется самой последней: сначала весь оператор действует на функцию, зависящую от переменных $z_1, \dots, z_N$, а потом в полученном выражении совершается переход $z_0 \rightarrow z_1$.

3.2. Уравнения Бакстера. Мы приведем вывод уравнения Бакстера для оператора $Q_2(u, \bar{u})$ и покажем, что это уравнение является прямым следствием определяющего соотношения

$$R_2(\mathbf{u})L_1(u_1, u_2)L_2(v_1, v_2) = L_1(u_1, v_2)L_2(v_1, u_2)R_2(\mathbf{u})$$

для оператора R_2 – строительного блока, из которого построен оператор Q_2 . Используя разложение $L_1(u)$ и $L_2(u)$ в произведения простых матриц,

$$L_1(u) = Z_1 \begin{pmatrix} u_1 & -\partial_{z_1} \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} Z_1^{-1}, \quad L_2(v) = Z_2 \begin{pmatrix} v_1 & -\partial_{z_2} \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} Z_2^{-1}, \quad Z_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_k & 1 \end{pmatrix},$$

и условие коммутативности $R_2(\mathbf{u})Z_2 = Z_2R_2(\mathbf{u})$, легко переписать это уравнение в следующем виде:

$$Z_1^{-1}R_2(\mathbf{u})L_1(u_1, u_2)Z_2 = \begin{pmatrix} u_1 & -\partial_{z_1} \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & -\partial_{z_2} \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} R_2(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} v_1 & -\partial_{z_2} \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Явное выражение для оператора $R_2(\mathbf{u})$ позволяет вычислить произведение матриц в правой части:

$$Z_1^{-1}R_2(\mathbf{u})L_1(u_1, u_2)Z_2 = \begin{pmatrix} R_2(\mathbf{u})|_{u \rightarrow u+1} + v_2 R_2(\mathbf{u}) & -R_2(\mathbf{u})\partial_{z_1} \\ -v_2 z_{12} R_2(\mathbf{u}) & (u_1 - v_2)(u_2 - v_2) R_2(\mathbf{u})|_{u \rightarrow u-1} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Напомним, что оператор $Q_2(u)$ строится из операторов $R_2(\mathbf{u})$ в специальной точке $v_2 = 0$. При $v_2 = 0$ матрица в правой части становится верхнетреугольной, что и приводит в конечном итоге к уравнению Бакстера. Перепишем полученное уравнение, немного изменив интерпретацию пространств $\mathbb{V}_1$ (пространства функций от z_1) и $\mathbb{V}_2$ (пространства функций от z_2) и сразу положив $v_2 = 0$. Второе пространство теперь будет вспомогательным пространством $\mathbb{V}_0$ нашей спиновой цепочки, а первое пространство – квантовым пространством $\mathbb{V}_k$ в узле с номером k . Умножив уравнение (9) на P_{k0} и выполнив преобразование подобия с матрицей Z_0 так, что она окажется в правой части, получим

$$P_{k0}R_{k0}^2(u)L_k(u_1, u_2) = Z_0 \begin{pmatrix} P_{k0}R_{k0}^2(u+1) & -P_{k0}R_{k0}^2(u)\partial_k \\ 0 & u_1 u_2 P_{k0}R_{k0}^2(u-1) \end{pmatrix} Z_0^{-1}.$$

Данное соотношение приводит к аналогичной формуле для матрицы монодромии $\mathbb{T}(u) = L_1(u) \dots L_N(u)$:

$$P_{10}R_{10}^2(u) \dots P_{N0}R_{N0}^2(u)\mathbb{T}(u) = Z_0 \begin{pmatrix} P_{10}R_{10}^2(u+1) & -P_{10}R_{10}^2(u)\partial_1 \\ 0 & u_1u_2P_{10}R_{10}^2(u-1) \end{pmatrix} \times \dots \\ \dots \times \begin{pmatrix} P_{N0}R_{N0}^2(u+1) & -P_{N0}R_{N0}^2(u)\partial_N \\ 0 & u_1u_2P_{N0}R_{N0}^2(u-1) \end{pmatrix} Z_0^{-1}.$$

Далее вычисляем произведение треугольных матриц и вычисляем след по пространству $\mathbb{V}_0$ и обычный матричный след. В итоге приходим к уравнению Бакстера

$$t(u)Q_2(u, \bar{u}) = Q_2(u+1, \bar{u}) + (u_1u_2)^N Q_2(u-1, \bar{u}).$$

Абсолютно аналогично получается уравнение с участием второй фундаментальной трансфер-матрицы:

$$\bar{t}(\bar{u})Q_2(u, \bar{u}) = Q_2(u, \bar{u}+1) + (\bar{u}_1\bar{u}_2)^N Q_2(u, \bar{u}-1).$$

Используя уравнения Бакстера для оператора $Q_2(u, \bar{u})$, соотношение (7) и свойство $S^{-1}t(u_1, u_2)S = t(u_2, u_1)$ сплетающего оператора S , легко вывести, что оператор $Q_1(u, \bar{u})$ удовлетворяет точно таким же уравнениям, как и оператор $Q_2(u, \bar{u})$.

4. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Метод разделения переменных, предложенный в работах [4], [8], позволяет свести решение многомерной задачи к решению разностного уравнения относительно функции одной переменной.

Рассмотрим наш основной пример – XX -спиновую цепочку. Производящая функция

$$t(u) = 2u^N + u^{N-2}\mathbf{q}_2 + u^{N-3}\mathbf{q}_3 + \dots + \mathbf{q}_N$$

для семейства коммутирующих операторов $\mathbf{q}_k$, $[\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_k] = 0$, строится как след матрицы монодромии:

$$\mathbb{T}(u) = L_1(u) \dots L_N(u) = \begin{pmatrix} A_N(u) & B_N(u) \\ C_N(u) & D_N(u) \end{pmatrix}, \quad t(u) = \text{tr } \mathbb{T}(u) = A_N(u) + D_N(u). \quad (10)$$

Задача состоит в нахождении общих собственных функций $\Psi(\mathbf{z}) = \Psi(z_1, \dots, z_N)$ коммутирующих операторов $\mathbf{q}_k$:

$$\mathbf{q}_k \Psi(z_1, \dots, z_N) = q_k \Psi(z_1, \dots, z_N), \quad k = 2, \dots, N.$$

Схема метода разделения переменных может быть представлена следующим образом.

ШАГ 1. Рассмотрим вспомогательную интегрируемую систему, порожденную семейством коммутирующих операторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}$ и $S_- = -\partial_{z_1} - \dots - \partial_{z_N}$,

$$B_N(u) = S_-(u - \mathbf{x}_1) \dots (u - \mathbf{x}_{N-1}),$$

или, что тоже самое, операторов $B_N(u)$ и S_- таких, что $[B_N(u), B_N(v)] = 0$ и $[S_-, B_N(v)] = 0$.

ШАГ 2. Найдем собственные функции коммутирующих операторов $B_N(u)$ и S_- :

$$B_N(u)U(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = ip(u - x_1) \dots (u - x_{N-1})U(\mathbf{z}, \mathbf{x}, p), \quad S_-U(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = ipU(\mathbf{z}, \mathbf{x}),$$

где мы объединили все новые переменные в один набор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{N-1})$.

ШАГ 3. Разложим $\Psi(z_1, \dots, z_N)$ – общую функцию коммутирующих операторов $\mathbf{q}_k$ – по базису собственных функций вспомогательной системы:

$$\Psi(\mathbf{z}) = \int U(\mathbf{z}, \mathbf{x})Q(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}) d^N \mathbf{x}.$$

ШАГ 4. Представим функцию $Q(\mathbf{x})$ в виде следующего произведения: $Q(\mathbf{x}) = Q(x_1)Q(x_2) \dots Q(x_N)$ (разделение переменных). Каждый сомножитель $Q(x)$ является решением одномерного уравнения Бакстера

$$t(x)Q(x) = \Delta_+(x)Q(x+1) + \Delta_-(x)Q(x-1),$$

где полином $t(x)$ определяется собственными числами операторов $\mathbf{q}_k$:

$$t(u) = 2u^N + u^{N-2}q_2 + u^{N-3}q_3 + \dots + q_N.$$

Таким образом, оператор, ядро которого задается функцией $U(\mathbf{z}, \mathbf{x})$, является оператором перехода из исходного представления в представление разделенных переменных:

$$\Psi(\mathbf{z}) = \int U(\mathbf{z}, \mathbf{x})Q(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}) d^N \mathbf{x}.$$

4.1. Собственные функции оператора $B(u)$. Задача нахождения общих собственных функций $U(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ коммутирующих операторов $B(u)$ и S_- ,

$$S_-U(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = ipU(\mathbf{z}, \mathbf{x}), \quad B(u)U(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = ip(u - x_1) \dots (u - x_{N-1})U(\mathbf{z}, \mathbf{x}),$$

может быть решена итерационно. Основную роль вновь играет оператор $R_{12}^2(\mathbf{u})$. Пользуясь тем, что этот оператор не зависит от параметра v_1 , перепишем определяющее уравнение для него в несколько измененном виде, положив $v_1 = u_1$:

$$R_{12}^2(\mathbf{u})L_1(u_1, u_2)L_2(u_1, v_2) = L_1(u_1, v_2)L_2(u_1, u_2)R_{12}^2(\mathbf{u}).$$

Легко сконструировать оператор $\Lambda_N(\mathbf{u}) = R_{12}^2(\mathbf{u}) \dots R_{N-1, N}^2(\mathbf{u})$, переставляющий параметр v_2 из крайнего правого положения в произведении L -операторов в крайнее левое:

$$\Lambda_N(\mathbf{u})L_1(u_1, u_2) \dots L_N(u_1, v_2) = L_1(u_1, v_2) \dots L_N(u_1, u_2)\Lambda_N(\mathbf{u}).$$

Матрица $L_1(u_1, v_2)$ в правой части уравнения может быть преобразована к следующему виду:

$$L_1(u_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1(u_2 - v_2)/u_2 & v_2/u_2 \end{pmatrix} L_1(u_1, u_2).$$

Учтя это, получаем соотношение

$$\begin{aligned} \Lambda_N(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} A_{N-1}(u) & B_{N-1}(u) \\ C_{N-1}(u) & D_{N-1}(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 + 1 + z_N \partial_N & -\partial_N \\ z_N^2 \partial_N + (u_1 - v_2 + 1)z_N & v_2 - z_N \partial_N \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1(u_2 - v_2)/u_2 & v_2/u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_N(u) & B_N(u) \\ C_N(u) & D_N(u) \end{pmatrix} \Lambda_N(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (11)$$

в котором использованы операторы, входящие в матрицу монодромии (10). Соотношение для матричных элементов, стоящих на пересечении первой строки и второго столбца, имеет вид

$$\Lambda_N(\mathbf{u})(-A_{N-1}(u)\partial_N + B_{N-1}(u)(v_2 - z_N\partial_N)) = B_N(u)\Lambda_N(\mathbf{u}).$$

Рассмотрим действие оператора в правой части равенства на функцию $\Psi(z_1 \dots z_{N-1})$, не зависящую от аргумента z_N :

$$B_N(u)\Lambda_N(\mathbf{u})\Psi(z_1 \dots z_{N-1}) = v_2\Lambda_N(\mathbf{u})B_{N-1}(u)\Psi(z_1 \dots z_{N-1}).$$

Перепишем все соотношения с помощью более привычных обозначений. Для этого вместо произвольного параметра v_2 введем новый спектральный параметр $x = v_2 - u$ так, что

$$\begin{aligned} \Lambda_N(x) &= R_{12}^2(x) \dots R_{N-1,N}^2(x), & R_{12}^2(x) &= [z_{12}]^{x_2 - x_1} [i\partial_1]^{x_2} [z_{12}]^{x_1}, \\ B_N(u)\Lambda_N(x)\Psi(z_1 \dots z_{N-1}) &= (u - x)\Lambda_N(x)B_{N-1}(u)\Psi(z_1 \dots z_{N-1}). \end{aligned}$$

Далее все можно продолжить шаг за шагом итерационно:

$$B_N(u)\Lambda_N(x_1) \dots \Lambda_2(x_{N-1})\Psi(z_1) = (u - x_1)(u - x_{N-1})B_1(u)\Psi(z_1),$$

где $\Lambda_k(x) = R_{12}^2(x) \dots R_{k-1,k}^2(x)$. Собственная функция оператора $B_1 = -\partial_1$ равна e^{-ipz_1} , так что мы получаем следующее представление для собственной функции оператора $B_N(u)$:

$$B_N(u)\Lambda_N(x_1) \dots \Lambda_2(x_{N-1})e^{-ipz_1} = ip(u - x_1) \dots (u - x_{N-1})\Lambda_N(x_1) \dots \Lambda_2(x_{N-1})e^{-ipz_1}.$$

С помощью формулы (8) легко заметить связь полученного выражения с Q -операторами. Действительно, если применить Q_2 -оператор к функции, которая не зависит от аргумента z_N , то действие $R_{N0}^2(x)$ сведется к умножению на нормировочный множитель, равный $R_{N0}^2(x) \cdot 1$, поэтому с точностью до нормировки и циклического сдвига P воспроизводится оператор Λ_N :

$$\begin{aligned} Q_2(x)\Psi(z_1 \dots z_{N-1}) &= P \cdot R_{12}^2(x) \dots R_{N-1,N}^2(x)R_{N0}^2(x)\Psi(z_1 \dots z_{N-1}) \Big|_{z_0 \rightarrow z_1} \sim \\ &\sim \Lambda_N(x)\Psi(z_1 \dots z_{N-1}). \end{aligned}$$

То же самое применимо и к операторам Λ_k , так что получаем

$$\begin{aligned} B_N(u)U(\mathbf{z}, \mathbf{x}) &= ip(u - x_1) \dots (u - x_{N-1})U(\mathbf{z}, \mathbf{x}), \\ U(\mathbf{z}, \mathbf{x}) &= Q_2(x_1) \dots Q_2(x_{N-1})e^{-ipz_1}. \end{aligned} \tag{12}$$

4.2. Действие операторов $A(u)$ и $D(u)$ на собственные функции $U(\mathbf{z}, \mathbf{x})$. Прежде всего, заметим, что соотношение (9), игравшее ключевую роль при выводе уравнения Бакстера, в привычных обозначениях имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Z_1^{-1}R_{12}^2(u - v_2)L_1(u_1, u_2)Z_2 &= \\ &= \begin{pmatrix} R_{12}^2(u + 1 - v_2) + v_2R_{12}^2(u - v_2) & -R_{12}^2(u - v_2)\partial_{z_1} \\ -v_2z_{12}R_{12}^2(u - v_2) & (u_1 - v_2)(u_2 - v_2)R_{12}^2(u - 1 - v_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если взять произведение матриц, стоящих в левой части равенства, то все промежуточные Z -матрицы сокращаются, а произведение L -операторов дает матрицу монодромии $\mathbb{T}_{N-1}(u)$. Перемножая в том же порядке матрицы, стоящие в правой части, получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} Z_1^{-1} \Lambda_N(u - v_2) \begin{pmatrix} A_{N-1}(u) & B_{N-1}(u) \\ C_{N-1}(u) & D_{N-1}(u) \end{pmatrix} Z_N = \\ = \begin{pmatrix} \Lambda_N(u + 1 - v_2) & * * * \\ 0 & (u_1 u_2)^N \Lambda_N(u - 1 - v_2) \end{pmatrix} + \dots, \end{aligned}$$

где многоточие означает вклады, обращающиеся в ноль в пределе $v_2 \rightarrow 0$. Это соотношение с учетом системы (11) немедленно приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} A_N(u) \Lambda_N(u) \Psi(z_1 \dots z_{N-1}) &= (u_1 + 1) \Lambda_N(u + 1) \Psi(z_1 \dots z_{N-1}), \\ D_N(u) \Lambda_N(u) \Psi(z_1 \dots z_{N-1}) &= u_2 (u_1 u_2)^N \Lambda_N(u - 1) \Psi(z_1 \dots z_{N-1}). \end{aligned}$$

Если изменить нормировку и перейти к представлению при помощи Q -операторов, получим

$$\begin{aligned} A_N(u) Q_2(u) \Psi(z_1 \dots z_{N-1}) &= Q_2(u + 1) \Psi(z_1 \dots z_{N-1}), \\ D_N(u) Q_2(u) \Psi(z_1 \dots z_{N-1}) &= (u_1 u_2)^N Q_2(u - 1) \Psi(z_1 \dots z_{N-1}). \end{aligned}$$

Естественным следствием этих уравнений и коммутативности Q -операторов являются формулы

$$A_N(x_k) U(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \mathbf{X}_k U(\mathbf{z}, \mathbf{x}), \quad D_N(u) U(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = (u_1 u_2)^N \mathbf{X}_k^{-1} U(\mathbf{z}, \mathbf{x}), \quad (13)$$

где $\mathbf{X}_k = e^{\partial_{x_k}}$ – оператор сдвига. Таким образом, мы вывели ключевые формулы (13) и (12) метода разделения переменных, используя лишь определяющее уравнение для основного строительного блока – оператора R_2 .

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 09-01-12150, 07-02-92166 и 09-01-93108).

Список литературы

- [1] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **40:2** (1979), 194–220.
- [2] Л. И. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *УМН*, **34:5**(209) (1979), 13–63.
- [3] Р. Р. Kulish, Е. К. Sklyanin, “Quantum spectral transform method recent developments”, *Integrable Quantum Field Theories*, Proceedings of the Symposium Held at Tvarminne (Finland, 23–27 March, 1981), Lecture Notes in Physics, **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, 1982, 61–119.
- [4] Е. К. Sklyanin, “Quantum inverse scattering method. Selected topics”, *Quantum Group and Quantum Integrable Systems*, Nankai Lectures in Mathematical Physics, ed. Mo-Lin Ge, World Scientific, River Edge, NJ, 1992, 63–97, arXiv: hep-th/9211111.
- [5] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Quantum Symmetries. Proceedings of the Les Houches Summer School. Session LXIV* (Les Houches, France, August 1 – September 8, 1995), eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–219.
- [6] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.

- [7] V. Pasquier, M. Gaudin, *J. Phys. A*, **25**:20 (1992), 5243–5252.
- [8] E. K. Sklyanin, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **118** (1995), 35–60, arXiv: solv-int/9504001.
- [9] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov, *Commun. Math. Phys.*, **177**:2 (1996), 381–398, arXiv: hep-th/9412229; **190**:2 (1997), 247–278, arXiv: hep-th/9604044; **200**:2 (1999), 297–324, arXiv: hep-th/9805008.
- [10] S. M. Khoroshkin, V. N. Tolstoy, *Commun. Math. Phys.*, **141**:3 (1991), 599–617; *Lett. Math. Phys.*, **24**:3 (1992), 231–244; S. M. Khoroshkin, A. A. Stolin, V. N. Tolstoy, *Modern Phys. Lett. A*, **10**:19 (1995), 1375–1392, arXiv: hep-th/9404038.
- [11] S. É. Derkachov, “Factorization of the R -matrix and Baxter’s Q -operator”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*. 20, Зап. научн. сем. ПОМИ, **347**, ПОМИ, СПб., 2007, 144–166, arXiv: math.qa/0507252.
- [12] S. É. Derkachov, A. N. Manashov, *J. Phys. A*, **39**:16 (2006), 4147–4159, arXiv: nlin.si/0512047.
- [13] С. Э. Деркачёв, А. Н. Манашов, *Алгебра и анализ*, **21**:4 (2009), 1–94.
- [14] Л. Н. Липатов, *Письма в ЖЭТФ*, **59**:9 (1994), 571–574; L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **548**:1–3 (1999), 328–362, arXiv: hep-ph/9812336.
- [15] L. D. Faddeev, G. P. Korchemsky, *Phys. Lett. B*, **342**:1–4 (1995), 311–322, arXiv: hep-th/9404173.
- [16] D. R. Karakhanyan, R. Kirschner, *ЯФ*, **65**:8 (2002), 1539–1550, arXiv: hep-th/9902147; *Fortschr. Phys.*, **48**:1–3 (2000), 139–142, arXiv: hep-th/9902031.
- [17] S. É. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov, *Nucl. Phys. B*, **617**:1–3 (2001), 375–440, arXiv: hep-th/0107193.
- [18] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленин, *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений*, Обобщенные функции, **5**, Физматлит, М., 1962.
- [19] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, E. K. Sklyanin, *Lett. Math. Phys.*, **5**:5 (1981), 393–403.
- [20] A. P. Isaev, *Nucl. Phys. B*, **662**:3 (2003), 461–475, arXiv: hep-th/0303056.