Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Ляховский, А. А. Назаров, Рекуррентные свойства ветвления и резольвента Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 2, 218–228

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6723>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 03:22:29

© 2011 г.

В. Д. Ляховский*, А. А. Назаров*

РЕКУРРЕНТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕТВЛЕНИЯ И РЕЗОЛЬВЕНТА БЕРНШТЕЙНА–ГЕЛЬФАНДА–ГЕЛЬФАНДА

Рекуррентные соотношения для коэффициентов ветвления основываются на определенном разложении сингулярного элемента. Показано, что такое разложение может использоваться для построения параболических модулей Верма и получения обобщенных формул Вейля–Верма для характеров. Также продемонстрировано, что коэффициенты ветвления определяют обобщенную резольвенту Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда.

Ключевые слова: представления алгебр Ли, правила ветвления, резольвента Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Свойства ветвления (аффинных) алгебр Ли важны для приложений в квантовой теории поля (см., например, модели конформной теории поля [1], [2]). В настоящей работе мы показываем, что ветвление для произвольной редуктивной подалгебры связано с резольвентой Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда (БГГ) и демонстрирует свойства резольвенты в категории $\mathcal{O}^P$ [3] (параболического обобщения категории $\mathcal{O}$ [4]).

Резольвента для неприводимых модулей в терминах бесконечномерных модулей играет важную роль в теории интегрируемых спиновых цепочек [5]. В подходе Q -оператора Бакстера [6] общие трансфер-матрицы, соответствующие (обобщенным) модулям Верма, факторизуются в произведение операторов Бакстера. Резольвента позволяет вычислить трансфер-матрицы для конечномерных вспомогательных пространств.

Чтобы продемонстрировать связь резольвенты БГГ с ветвлением, мы используем рекуррентный подход, представленный в работе [7] (аналогичный подход для максимальных вложений использовался в работе [8]). Мы рассматриваем подалгебру $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ вместе с $\mathfrak{a}_\perp$ – *ортгоналим партнером* $\mathfrak{a}$ по отношению к форме Киллинга, а также подалгебру $\tilde{\mathfrak{a}}_\perp := \mathfrak{a}_\perp \oplus \mathfrak{h}_\perp$, где $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp} \oplus \mathfrak{h}_\perp$. Для любой редуктивной

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: lyakh1507@nm.ru, antonnaz@gmail.com

подалгебры $\mathfrak{a}$ алгебра $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$ регулярна и редуктивна. Для интегрируемого модуля старшего веса $L^{(\mu)}$ и ортогональной подалгебры $\mathfrak{a}_\perp$ мы рассматриваем сингулярный элемент $\Psi^{(\mu)}$ (числитель в формуле Вейля для характеров $\text{ch}(L^\mu) = \Psi^{(\mu)}/\Psi^{(0)}$, см., например, [9]) и знаменатель Вейля $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{(0)}$ для ортогонального партнера. В работе показано, что элемент $\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$ может быть разложен в комбинацию числителей Вейля $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{(\nu)}$, где $\nu \in P_{\mathfrak{a}_\perp}^+$. Это разложение дает возможность построить множество модулей старшего веса $L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}}$. В том случае, если вложение $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$ удовлетворяет “стандартным параболическим” условиям, эти модули порождают параболические модули Верма $M_{(\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g})}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}}$, так что исходный характер $\text{ch}(L^\mu)$ в итоге разлагается в знакопеременную сумму таких модулей. С другой стороны, если параболическое условие нарушено, конструкция сохраняется и порождает разложение по отношению к набору обобщенных модулей Верма $M_{(\tilde{\mathfrak{b}}_\perp, \mathfrak{g})}^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}_\perp}}$, где $\tilde{\mathfrak{b}}_\perp$ уже не является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, а оказывается сжатием $\tilde{\mathfrak{a}}_\perp$.

Некоторые общие свойства предложенного разложения формулируются в терминах формального элемента $\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$, называемого *веером вложения*. Использование этого инструмента позволило сформулировать простой и явный алгоритм для вычисления правил ветвления, подходящий для произвольной (являющейся максимальной или не являющейся таковой) подалгебры в аффинной алгебре Ли [7].

Возможные обобщения полученных результатов обсуждаются в разделе 4.

Обозначения. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ – (аффинные) алгебры Ли, и существует вложение $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ такое, что $\mathfrak{a}$ – редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$ с согласованным корневым пространством: $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^* \subset \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^*$. Мы используем следующие обозначения:

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}^+$ – разложение Картана;

r и $r_{\mathfrak{a}}$ – ранги алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ соответственно;

Δ , $\Delta_{\mathfrak{a}}$ и Δ^+ , $\Delta_{\mathfrak{a}}^+$ – корневые системы и наборы положительных корней алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ соответственно;

$\text{mult}(\alpha)$ и $\text{mult}_{\mathfrak{a}}(\alpha)$ – кратности корня α в Δ и $\Delta_{\mathfrak{a}}$ соответственно;

S и $S_{\mathfrak{a}}$ – множества простых корней для $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ соответственно;

α_i и $\alpha_{(\mathfrak{a})j}$ – i -й и j -й простые корни алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ соответственно; $i = 0, \dots, r$ и $j = 0, \dots, r_{\mathfrak{a}}$;

$\alpha_i^\vee$ и $\alpha_{(\mathfrak{a})j}^\vee$ – простые кокорни для $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ соответственно, $i = 0, \dots, r$ и $j = 0, \dots, r_{\mathfrak{a}}$;

W , $W_{\mathfrak{a}}$ – группы Вейля;

C , $C_{\mathfrak{a}}$ – фундаментальные камеры Вейля;

$\overline{C}$, $\overline{C}_{\mathfrak{a}}$ – замыкания фундаментальных камер Вейля;

$\epsilon(w) := (-1)^{\text{length}(w)}$, $w \in W$;

ρ , $\rho_{\mathfrak{a}}$ – векторы Вейля;

L^μ , $L_{\mathfrak{a}}^\nu$ – интегрируемые $\mathfrak{g}$ -модуль старшего веса μ и $\mathfrak{a}$ -модуль старшего веса ν ;

$\mathcal{N}^\mu$, $\mathcal{N}_{\mathfrak{a}}^\nu$ – весовые диаграммы модулей L^μ и $L_{\mathfrak{a}}^\nu$ соответственно;

P , $P_{\mathfrak{a}}$ – весовые решетки;

P^+ , $P_{\mathfrak{a}}^+$ – решетки доминантных весов;

$m_\xi^{(\mu)}$ и $m_\zeta^{(\nu)}$ – кратности веса $\xi \in P$ и $\zeta \in P_{\mathfrak{a}}$ в L^μ и $L_{\mathfrak{a}}^\nu$ соответственно;

$\text{ch}(L^\mu)$ и $\text{ch}(L_{\mathfrak{a}}^\nu)$ – формальные характеры L^μ и $L_{\mathfrak{a}}^\nu$ соответственно;

$\text{ch}(L^\mu) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w \circ (\mu + \rho) - \rho} / \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}(\alpha)}$ – формула Вейля–Каца;

$R := \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}(\alpha)}$, $R_{\mathfrak{a}} := \prod_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{a}}^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}_{\mathfrak{a}}(\alpha)}$ – знаменатели Вейля.

2. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПОДАЛГЕБРА И СИНГУЛЯРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Покажем, как рекуррентный подход к проблеме ветвления естественным образом приводит к представлению формального характера $\mathfrak{g}$ -модуля в виде комбинации характеров, соответствующих параболическим (обобщенным) модулям Верма. Рассмотрим редуктивную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и ее редуктивную подалгебру $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$. Пусть L^μ – интегрируемый модуль старшего веса алгебры $\mathfrak{g}$, $\mu \in P^+$. Будем считать модуль L^μ вполне приводимым по отношению к подалгебре $\mathfrak{a}$,

$$L_{\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a}}^\mu = \bigoplus_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_\nu^{(\mu)} L_{\mathfrak{a}}^\nu.$$

Это разложение может быть записано в терминах формальных характеров с использованием оператора проекции $\pi_{\mathfrak{a}}$ (на весовое пространство $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^*$):

$$\pi_{\mathfrak{a}} \text{ch}(L^\mu) = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_\nu^{(\mu)} \text{ch}(L_{\mathfrak{a}}^\nu). \quad (1)$$

Для модуля L^μ существует резольвента БГГ (см. [4], [10]–[12]). Все члены фильтрующей последовательности представляются суммами модулей Верма со старшими весами ν , сильно связанными с μ :

$$\{\nu\} = \{w(\mu + \rho) - \rho \mid w \in W\}.$$

2.1. Ортогональная подалгебра. Пусть $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$ – подалгебра Картана в алгебре $\mathfrak{g}$. Для $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ введем *ортогонального партнера* $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$.

Рассмотрим корневое подпространство $\mathfrak{h}_{\perp \mathfrak{a}}^*$, ортогональное к $\mathfrak{a}$,

$$\mathfrak{h}_{\perp \mathfrak{a}}^* := \{\eta \in \mathfrak{h}^* \mid \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \eta(h) = 0\},$$

и корни $\mathfrak{g}$ (и положительные корни), ортогональные к $\mathfrak{a}$,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{a}_\perp} &:= \{\beta \in \Delta_{\mathfrak{g}} \mid \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \beta(h) = 0\}, \\ \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+ &:= \{\beta^+ \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+ \mid \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \beta^+(h) = 0\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим символом $W_{\mathfrak{a}_\perp}$ подгруппу W , порожденную отражениями w_β с корнями $\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$. Корневая подсистема $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}$ определяет подалгебру $\mathfrak{a}_\perp$, имеющую подалгебру Картана $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp}$. Пусть

$$\mathfrak{h}_\perp^* := \{\eta \in \mathfrak{h}_{\perp \mathfrak{a}}^* \mid \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}_\perp}; \eta(h) = 0\};$$

выделим в алгебре $\mathfrak{g}$ подалгебры

$$\widetilde{\mathfrak{a}}_\perp := \mathfrak{a}_\perp \oplus \mathfrak{h}_\perp, \quad \widetilde{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_\perp. \quad (3)$$

Заметим, что $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}_\perp$ в общем случае не является подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Для подалгебр Картана имеет место разложение

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp} \oplus \mathfrak{h}_\perp = \mathfrak{h}_{\widetilde{\mathfrak{a}}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp} = \mathfrak{h}_{\widetilde{\mathfrak{a}}_\perp} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}. \quad (4)$$

Рассмотрим векторы Вейля $\rho_{\mathfrak{a}}$ и $\rho_{\mathfrak{a}_{\perp}}$, соответствующие $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}_{\perp}$. Введем так называемые *дефекты* вложения $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$ и $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$:

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} := \rho_{\mathfrak{a}} - \pi_{\mathfrak{a}}\rho, \quad \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}} := \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}} - \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}\rho. \quad (5)$$

Для $\mu \in P^+$ рассмотрим связанные веса $\{(w(\mu + \rho) - \rho) \mid w \in W\}$ и их проекции на $h_{\mathfrak{a}_{\perp}}^*$, дополнительно сдвинутые на вектор дефекта $-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$:

$$\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(w) := \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}[w(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}, \quad w \in W.$$

Среди весов $\{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(w) \mid w \in W\}$ всегда можно выбрать те, которые попадают в фундаментальную камеру $\overline{C}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$. Пусть U – множество представителей u классов $W/W_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ таких, что

$$U := \{u \in W \mid \mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u) \in \overline{C}_{\mathfrak{a}_{\perp}}\}. \quad (6)$$

Тогда можно выделить подмножества:

$$\mu_{\mathfrak{a}}(u) := \pi_{\mathfrak{a}}[u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}}, \quad u \in U, \quad (7)$$

и

$$\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u) := \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}[u(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}, \quad u \in U. \quad (8)$$

Заметим, что подалгебра $\mathfrak{a}_{\perp}$ по определению регулярна, так как она построена на подмножестве корней алгебры $\mathfrak{g}$.

Для интегрируемых модулей старшего веса формула Вейля–Каца для $\text{ch}(L^{\mu})$ может быть записана через сингулярные элементы [9]

$$\Psi^{(\mu)} := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu + \rho) - \rho},$$

а именно

$$\text{ch}(L^{\mu}) = \frac{\Psi^{(\mu)}}{\Psi^{(0)}} = \frac{\Psi^{(\mu)}}{R}. \quad (9)$$

То же верно и для характеров подмодулей $\text{ch}(L_{\mathfrak{a}}^{\nu})$ в формуле (1):

$$\text{ch}(L_{\mathfrak{a}}^{\nu}) = \frac{\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}}{\Psi_{\mathfrak{a}}^{(0)}} = \frac{\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}}{R_{\mathfrak{a}}},$$

где

$$\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)} := \sum_{w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) e^{w(\nu + \rho_{\mathfrak{a}}) - \rho_{\mathfrak{a}}}.$$

Применяя формулу (9) к правилу ветвления (1), мы получаем соотношение, связывающее сингулярные элементы $\Psi^{(\mu)}$ и $\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}$:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu + \rho) - \rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}(\alpha)}} \right) &= \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \frac{\sum_{w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) e^{w(\nu + \rho_{\mathfrak{a}}) - \rho_{\mathfrak{a}}}}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}}^+} (1 - e^{-\beta})^{\text{mult}_{\mathfrak{a}}(\beta)}}, \\ \pi_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\Psi^{(\mu)}}{R} \right) &= \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \frac{\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}}{R_{\mathfrak{a}}}. \end{aligned} \quad (10)$$

2.2. Разложение сингулярного элемента. Выполним разложение сингулярного элемента $\Psi^{(\mu)}$ на сингулярные элементы модулей ортогонального партнера.

ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{a}_\perp$ – ортогональный партнер редуktивной подалгебры $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp} \oplus \mathfrak{h}_\perp$, $\tilde{\mathfrak{a}}_\perp = \mathfrak{a}_\perp \oplus \mathfrak{h}_\perp$, $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_\perp$. Пусть L^μ – интегрируемый модуль старшего веса $\mu \in P^+$ и $\Psi^{(\mu)}$ – сингулярный элемент L^μ . Тогда элемент $\Psi^{(\mu)}$ может быть разложен в сумму по $u \in U$ (см. (6)) сингулярных элементов $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$ с коэффициентами $\epsilon(u)e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)}$:

$$\Psi^{(\mu)} = \sum_{u \in U} \epsilon(u)e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$u(\mu + \rho) = \pi_{(\tilde{\mathfrak{a}})}u(\mu + \rho) + \pi_{(\mathfrak{a}_\perp)}u(\mu + \rho),$$

где $u \in U$. Для произвольного $v \in W_{\mathfrak{a}_\perp}$ рассмотрим сингулярный вес $vu(\mu + \rho) - \rho$ и выполним разложение:

$$\begin{aligned} vu(\mu + \rho) - \rho &= \pi_{(\mathfrak{a})}(u(\mu + \rho)) - \rho + \rho_{\mathfrak{a}_\perp} + \\ &+ v(\pi_{(\tilde{\mathfrak{a}}_\perp)}u(\mu + \rho) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp} + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp}. \end{aligned} \quad (12)$$

Используем дефект $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$ (5), чтобы упростить формулу (12):

$$\begin{aligned} \pi_{(\tilde{\mathfrak{a}})}(u(\mu + \rho)) - \rho + \rho_{\mathfrak{a}_\perp} &= \\ &= \pi_{(\tilde{\mathfrak{a}})}(u(\mu + \rho)) - \pi_{\tilde{\mathfrak{a}}}\rho - \pi_{\mathfrak{a}_\perp}\rho + \rho_{\mathfrak{a}_\perp} = \\ &= \pi_{(\tilde{\mathfrak{a}})}(u(\mu + \rho) - \rho) + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}, \\ v(\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)}u(\mu + \rho) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp} + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp} &= \\ &= v(\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)}u(\mu + \rho) - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} - \pi_{(\mathfrak{a}_\perp)}\rho + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp} = \\ &= v(\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)}[u(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp}. \end{aligned}$$

В результате получаем требуемое разложение сингулярного элемента Ψ^μ на сингулярные элементы $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^\eta$ модулей $L_{\mathfrak{a}_\perp}^\eta$ подалгебры $\mathfrak{a}_\perp$:

$$\begin{aligned} \Psi^\mu &= \sum_{u \in U} \sum_{v \in W_{\mathfrak{a}_\perp}} \epsilon(v)\epsilon(u)e^{vu(\mu + \rho) - \rho} = \\ &= \sum_{u \in U} \epsilon(u)e^{\pi_{\tilde{\mathfrak{a}}}[u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} \sum_{v \in W_{\mathfrak{a}_\perp}} \epsilon(v)e^{v(\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)}[u(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp}} = \\ &= \sum_{u \in U} \epsilon(u)\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)}[u(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} e^{\pi_{(\tilde{\mathfrak{a}})}[u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}}. \end{aligned} \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Это соотношение можно рассматривать как обобщение формулы Вейля для сингулярного элемента $\Psi_{\mathfrak{g}}^\mu$: векторы $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)$ играют роль сингулярных весов, в то время как множители $\epsilon(u)$ расширены до $\epsilon(u)\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$.

Действительно, при $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ подалгебры $\mathfrak{a}_\perp$ и $\mathfrak{h}_\perp$ тривиальны, $U = W$ и оригинальная формула Вейля восстанавливается, так как сингулярные элементы $\epsilon(u)\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} = \epsilon(u)$ становятся тривиальными.

В противоположном пределе, когда $\mathfrak{a} = 0$, $\Delta_{\mathfrak{a}\perp} = \Delta_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{h}_{\perp}^* = 0$, $\mathfrak{a}_{\perp} = \mathfrak{g}$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}\perp} = 0$ и $U = W/W_{\mathfrak{a}\perp} = e$, вновь приходим к выражению для сингулярного элемента Ψ^{μ} , в этот раз в результате тривиализации множества векторов $\mu_{\mathfrak{a}}(e) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [7] разложение, аналогичное формуле (13), было использовано для построения рекуррентных соотношений для коэффициентов ветвления $k_{\xi}^{(\mu)}$, соответствующих вложению $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$:

$$k_{\xi}^{(\mu)} = -\frac{1}{s(\gamma_0)} \left(\sum_{u \in U} \epsilon(u) \dim(L_{\mathfrak{a}\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}\perp}(u)}) \delta_{\xi - \gamma_0, \pi_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u(\mu + \rho) - \rho)} + \sum_{\gamma \in \Gamma_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}}} s(\gamma + \gamma_0) k_{\xi + \gamma}^{(\mu)} \right). \quad (14)$$

Рекурсия задается множеством $\Gamma_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}}$, которое называется *веером вложения*. Это множество определяется как носитель $\{\xi\}_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$ коэффициентной функции $s(\xi)$,

$$\{\xi\}_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}} := \{\xi \in P_{\tilde{\mathfrak{a}}} \mid s(\xi) \neq 0\},$$

возникающей в разложении

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\perp}^+} (1 - e^{-\pi_{\tilde{\mathfrak{a}}} \alpha})^{\text{mult}(\alpha) - \text{mult}_{\mathfrak{a}}(\pi_{\tilde{\mathfrak{a}}} \alpha)} = - \sum_{\gamma \in P_{\tilde{\mathfrak{a}}}} s(\gamma) e^{-\gamma}. \quad (15)$$

Веса из множества $\{\xi\}_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}}$ сдвигаются на γ_0 – младший вектор в $\{\xi\}$, и исключается нулевой элемент:

$$\Gamma_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}} = \{\xi - \gamma_0 \mid \xi \in \{\xi\}\} \setminus \{0\}. \quad (16)$$

Рекуррентное соотношение (14) первоначально использовалось для описания ветвления интегрируемых модулей. Заметим, что существует важный класс модулей, которые также могут быть редуцированы при помощи веера вложения, – это модули Верма.

2.3. Формулы Вейля–Верма.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для ортогональной подалгебры $\mathfrak{a}_{\perp}$ в $\mathfrak{g}$ (являющейся ортогональным партнером редуктивной подалгебры $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$) характер интегрируемого модуля старшего веса L^{μ} может быть представлен в виде комбинации (с целочисленными коэффициентами) характеров параболических модулей Верма, распределенных по множеству весов $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)$:

$$\text{ch}(L^{\mu}) = \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \text{ch}(M_I^{\mu_{\mathfrak{a}\perp}(u)}), \quad (17)$$

где $U := \{u \in W \mid \mu_{\mathfrak{a}\perp}(u) \in \overline{C}_{\mathfrak{a}\perp}\}$ и I – такое подмножество в S , что Δ_I^+ эквивалентно $\Delta_{\mathfrak{a}\perp}^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подалгебра $\mathfrak{a}_{\perp}$ регулярна и редуктивна по определению (2). Рассмотрим ее знаменатель Вейля $R_{\mathfrak{a}\perp} := \prod_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{a}\perp}^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}_{\mathfrak{a}}(\alpha)}$ и элемент $R_J := \prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{a}\perp}^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}(\alpha)}$ как сомножители в R :

$$R = R_J R_{\mathfrak{a}\perp}.$$

Согласно этой факторизации и разложению (11) характер $\text{ch}(L^\mu)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\text{ch}(L^\mu) &= (R_J)^{-1}(R_{\mathfrak{a}_\perp})^{-1}\Psi^\mu = (R_J)^{-1}\sum_{u \in U} e^{\mu_{\bar{\mathfrak{a}}}(u)} \epsilon(u) (R_{\mathfrak{a}_\perp})^{-1} \Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} = \\ &= (R_J)^{-1} \sum_{u \in U} e^{\mu_{\bar{\mathfrak{a}}}(u)} \epsilon(u) \text{ch}(L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}),\end{aligned}$$

где $\{L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} \mid u \in U\}$ – множество конечномерных $\mathfrak{a}_\perp$ -модулей со старшими весами $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)$. Нас интересуют нетривиальные подалгебры $\mathfrak{a}$ и, соответственно, нетривиальные $\mathfrak{a}_\perp$ (случай тривиальной ортогональной подалгебры рассматривался выше (см. замечание 1)). Значит, $r_{\mathfrak{a}} \geq 1$ и $r_{\mathfrak{a}_\perp} < r$. Так как диаграмма Дынкина для любой регулярной подалгебры получается в результате исключения одной, двух или более вершин из расширенной диаграммы Дынкина алгебры, а расширенная диаграмма содержит не более одного зависимого корня (старший корень), множество $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$ всегда эквивалентно некоторому множеству Δ_I^+ , порожденному набором простых корней $I \subset S$.

Следовательно, мы можем (переопределяя множество Δ^+) отождествить $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$ с подмножеством Δ_I^+ , где $I \subset S$. В результате можно определить объекты, необходимые для построения обобщенных модулей Верма [3], [12]. У нас есть два множества корневых векторов $\{x_\xi \in \mathfrak{g}_\xi \mid \xi \in \Delta_I^+\}$ и $\{x_\eta \in \mathfrak{g}_\eta \mid \eta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I^+\}$ и соответствующие нильпотентные подалгебры в $\mathfrak{n}^+$

$$\mathfrak{n}_I^+ := \sum_{\xi \in \Delta_I^+} \mathfrak{g}_\xi, \quad \mathfrak{u}_I^+ := \sum_{\eta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I^+} \mathfrak{g}_\eta.$$

Первая подалгебра вместе со своей отрицательной копией $\mathfrak{n}_I^-$ порождает простую подалгебру

$$\mathfrak{s}_I = \mathfrak{n}_I^- + \mathfrak{h}_I + \mathfrak{n}_I^+.$$

Мы расширяем ее оставшимися картановскими генераторами:

$$\mathfrak{l}_I = \mathfrak{n}_I^- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_I^+.$$

Полупрямое произведение $\mathfrak{l}_I$ и $\mathfrak{u}_I^+$ дает параболическую подалгебру $\mathfrak{p}_I \hookrightarrow \mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{l}_I \supset \mathfrak{u}_I^+. \quad (18)$$

Ее универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{p}_I)$ является подалгеброй в $U(\mathfrak{g})$. Модули $L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$ алгебры $\mathfrak{l}_I$ легко поднимаются до $\mathfrak{p}_I$ -модулей при помощи тривиального действия нильрадикала $\mathfrak{u}_I^+$. Последний стандартным образом индуцирует $U(\mathfrak{g})$ -модули:

$$M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_I)} L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}.$$

Это обобщенные модули Верма [3], порожденные старшими весами $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)$. Как $U(\mathfrak{u}_I^-)$ -модуль каждый модуль $M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$ изоморфен $U(\mathfrak{u}_I^-) \otimes L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$, и его характер можно записать при помощи функции Костанта–Хекмана [13], соответствующей вложению ортогонального партнера $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$:

$$\text{ch}(M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}) = \mathcal{KH}_{\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}} \text{ch}(L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}).$$

Рис. 1. Обобщенные модули Верма для регулярного вложения A_1 в B_2 . Простые корни α_1, α_2 алгебры B_2 показаны штриховыми стрелками. Простой корень $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$ алгебры A_1 изображен серым вектором. Разложение L^{ω_1} представлено набором контуров входящих в него обобщенных модулей Верма. Штриховые контуры соответствуют положительным значениям $\epsilon(u)$, а пунктирные – отрицательным.

Функция $\mathcal{KH}_{\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}}$ генерируется знаменателем R_I , так что последнее выражение можно переписать следующим образом:

$$\text{ch}(M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}) = \frac{1}{R_I} \text{ch}(L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}).$$

Таким образом, мы получили обобщенную формулу Вейля–Верма для характеров – разложение $\text{ch}(L^\mu)$ на характеры обобщенных модулей Верма:

$$\text{ch}(L^\mu) = \sum_{u \in U} e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)} \epsilon(u) \text{ch}(M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}). \quad (19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Здесь обобщенная формула Вейля–Верма для характеров (называемая формулой переменного суммирования в книге [12]) имеет специальный вид: веса $\mu_{\mathfrak{a}}$ отличны от старших весов обобщенных модулей Верма $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}$. Это объясняется тем, что старший вес M_I -модуля не равен проекции его максимального веса на $h_{\mathfrak{a}_\perp}^*$ (он должен быть дополнительно сдвинут на величину дефекта).

ПРИМЕР. Рассмотрим обобщенные модули Верма для вложения $A_1 \hookrightarrow B_2$, где подалгебра $\mathfrak{a}_\perp$ связана с корнем α_1 алгебры B_2 . Обобщенный модуль Верма $M_I^{\omega_1}$ со старшим весом $\omega_1 = e_1$ показан на рис. 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как доказано, например, в книге [12] (см. утверждение 9.6), характеры обобщенных модулей Верма $M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$ могут также описываться как линейные комбинации обычных модулей Верма алгебры $\mathfrak{g}$:

$$\text{ch}(M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}) = \sum_{w \in W_{\mathfrak{a}_\perp}} \epsilon(w) \text{ch}(M^{w(\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp}}).$$

Подставляя это выражение в формулу (19) и используя определения (7), (8) и (5), мы восстанавливаем стандартное разложение Вейля–Верма для характера:

$$\text{ch}(L^\mu) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) \text{ch}(M^{w(\mu + \rho) - \rho}).$$

Рис. 2. Вложение $A_1 \hookrightarrow B_2$ (см. рис. 1). Ортогональный партнер (подалгебра A_1) соответствует корню α_1 . Резольвента простого модуля L^{ω_1} . Показана центральная часть точной последовательности $0 \rightarrow \text{Im } \delta_2 \rightarrow (e^{\mu_{\bar{a}}(e)} \text{ch}(M_I^{\pi_{a_{\perp}}[\omega_1] - \mathcal{D}_{a_{\perp}}}) = M_I^{\omega_1}) \rightarrow L^{\omega_1} \rightarrow 0$. Здесь $\mu_{\bar{a}}(e) = \pi_{\bar{a}}[\mu] + \mathcal{D}_{a_{\perp}}$.

3. РЕЗОЛЬВЕНТА БГГ И ВЕТВЛЕНИЕ

В работе [3] показано, что для модуля старшего веса L^{μ} , где $\mu \in P^+$, последовательность (обобщенная резольвента БГГ)

$$0 \rightarrow M_r^I \xrightarrow{\delta_r} M_{r-1}^I \xrightarrow{\delta_{r-1}} \dots \xrightarrow{\delta_1} M_0^I \xrightarrow{\varepsilon} L^{\mu} \rightarrow 0, \quad (20)$$

где

$$M_k^I = \bigoplus_{\substack{u \in U, \\ \text{length}(u)=k}} M_I^{u(\mu+\rho)-\rho}, \quad M_0^I = M_I^{\mu}, \quad (21)$$

является точной и формула (17) следует из этого разложения. В качестве иллюстрации на рис. 2 приведены части весовых диаграмм модулей резольвенты для вложения A_1 в B_2 на корне β .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть L^{μ} – $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом $\mu \in P^+$, и пусть регулярная подалгебра $\mathfrak{a}_{\perp} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ ортогональна редуктивной подалгебре $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$. Тогда разложение (11) определяет как обобщенную резольвенту L^{μ} по отношению к подалгебре $\mathfrak{a}_{\perp}$, так и правила ветвления L^{μ} по отношению к $\mathfrak{a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\text{ch}(M_I^{u(\mu+\rho)-\rho}) = e^{\mu_{\bar{a}}(u)} \text{ch}(M_I^{\mu_{a_{\perp}}(u)}), \quad \text{ch}(M_I^{\mu}) = e^{\mu_{\bar{a}}(e)} \text{ch}(M_I^{\pi_{a_{\perp}}[\mu] - \mathcal{D}_{a_{\perp}}}),$$

где $\mu_{\bar{a}}(u)$, $\mu_{a_{\perp}}(u)$ и $\mathcal{D}_{a_{\perp}}$ заданы как в приведенной в п. 2.2 лемме, $u \in U$ определено формулой (6). В результате получим элементы фильтрующей последовательности (20).

Рассмотрим множество $\{\mu_{a_{\perp}}(u) \mid u \in U\}$ как множество старших весов простых модулей $L_{a_{\perp}}^{\mu_{a_{\perp}}(u)}$ и вычислим размерности этих модулей. Вместе с $\{\mu_{\bar{a}}(u) \mid u \in U\}$ мы получим набор сингулярных весов

$$\{\epsilon(u) e^{\mu_{\bar{a}}(u)} \dim(L_{a_{\perp}}^{\mu_{a_{\perp}}(u)})\}.$$

Ветвление $L_{\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a}}^{\mu} = \bigoplus_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} L_{\mathfrak{a}}^{\nu}$ определяется веером вложения $\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$ и соотношением (14), которое дает нам коэффициенты $k_{\xi}^{(\mu)}$, а значит, определяет и $b_{\nu}^{(\mu)}$, так как $b_{\nu}^{(\mu)} = k_{\nu}^{(\mu)}$ при $\nu \in \overline{C}_{\mathfrak{a}}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть L^μ – $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом $\mu \in P^+$, $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ – редуктивная подалгебра $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{a}_\perp$, ортогональный партнер для $\mathfrak{a}$, эквивалентен A_1 , $\mathfrak{a}_\perp \approx A_1$, и $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_\perp$ при $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp} \oplus \mathfrak{h}_\perp$. Пусть $L_{\mathfrak{g} \downarrow \tilde{\mathfrak{a}}}^\mu = \bigoplus_{\nu \in P_\mathfrak{a}^+} b_\nu^{(\mu)} L_\mathfrak{a}^\nu$ – ветвление модуля L^μ относительно подалгебры $\tilde{\mathfrak{a}}$. Тогда коэффициенты $b_\nu^{(\mu)}$ определяют обобщенную резольвенту (20) модуля L^μ по отношению к $\mathfrak{a}_\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – простой корень A_1 . Используем преобразования из группы Вейля, чтобы перевести его в некоторый простой корень алгебры $\mathfrak{g}$, например α_1 . Построим сингулярный элемент для модуля $L_{\mathfrak{g} \downarrow \tilde{\mathfrak{a}}}^\mu$, т.е. $\Psi_{\tilde{\mathfrak{a}}}^{(L_{\mathfrak{g} \downarrow \tilde{\mathfrak{a}}}^\mu)} = \sum_{\nu \in P_\mathfrak{a}^+, b_\nu^{(\mu)} > 0} b_\nu^{(\mu)} \Psi_\mathfrak{a}^{(\nu)}$, и разложим его: $\Psi_{\tilde{\mathfrak{a}}}^{(L_{\mathfrak{g} \downarrow \tilde{\mathfrak{a}}}^\mu)} = k_\xi^{(\mu)} e^\xi$. В нашем случае предшественники u в рекуррентном соотношении (14) определяются весом ξ однозначно:

$$\epsilon(u(\xi)) \dim(L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u(\xi))}) = -s(\gamma_0) k_\xi^{(\mu)} - \sum_{\gamma \in \Gamma_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}}} s(\gamma + \gamma_0) k_{\xi+\gamma}^{(\mu)}.$$

Тогда имеем

$$\dim(L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u(\xi))}) = \left| s(\gamma_0) k_\xi^{(\mu)} + \sum_{\gamma \in \Gamma_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}}} s(\gamma + \gamma_0) k_{\xi+\gamma}^{(\mu)} \right|,$$

$$\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u(\xi)) = \frac{1}{2} (\dim(L_{A_1}^{\mu(\xi)}) - 1) \alpha_1.$$

Таким образом, множество обобщенных модулей Верма $e^{\xi + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} \text{ch}(M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u(\xi))})$ полностью фиксировано:

$$\{e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \text{ch}(M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}) \mid u \in U\}.$$

Упорядочивая эти модули по длине u , мы получаем компоненты (21) резольвенты (20).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе [7] было показано, что метод веера вложения работает также и для специальных вложений. Надо заметить, что разложения Вейля–Верма также могут быть получены в этом случае. Резольвенты, соответствующие специальным подалгебрам, описывают соотношения между проекциями характера начального модуля и обобщенными модулями Верма со старшими весами в подпространстве h^* .

Существуют ситуации, когда выбор простых корней зафиксирован какими-то внешними факторами (возникающими, например, из требований физических приложений). В этом случае ортогональный партнер не может порождаться только простыми корнями. Элементы $u_I^+ := \sum_{\eta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I^+} \mathfrak{g}_\eta$ не образуют подалгебру в $\mathfrak{g}$, так как некоторые не простые корни отсутствуют в $\Delta^+ \setminus \Delta_I^+$. Важно отметить, что в этом случае формула Вейля–Верма по-прежнему существует. В ней обобщенные модули Верма соответствуют сжатиям [14] алгебры $\mathfrak{n}^+$, и соотношения Вейля–Верма описывают разложение пространства представления L^μ в набор обобщенных модулей Верма сжатой алгебры $U(\mathfrak{n}_c^+)$. Весовые векторы образованы базисом Пуанкаре–Биркгофа–Витта алгебр $U(\mathfrak{n}_c^+)$ и $U(\mathfrak{a}_\perp)$. Чтобы рассмотреть такое пространство как $\mathfrak{g}$ -модуль, мы должны выполнить деформацию [15] алгебры $\mathfrak{n}_c^+$

(т.е. восстановить первоначальный закон композиции). Пространство сохраняется, и после такой деформации генераторы начальной алгебры будут действовать на нем правильным образом.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность всем, кто подготовил и организовал III Международную конференцию “Модели квантовой теории поля”, посвященную 70-летию А. Н. Васильева.

Настоящая работа частично поддержана РФФИ (грант № 09-01-00504) и Лабораторией им. П. Л. Чебышева (Математико-механический факультет СПбГУ) из средств гранта 11.G34.31.0026 правительства Российской Федерации.

Список литературы

- [1] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer, New York, 1997.
- [2] R. Coquereaux, G. Schieber, *J. Phys.: Conference Series*, **103**:1 (2008), 012006, 24 pp., arXiv: 0710.1397.
- [3] J. Lepowsky, *J. Algebra*, **49**:2 (1977), 496–511.
- [4] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, *Функц. анализ и его прил.*, **10**:2 (1976), 1–8.
- [5] S. É. Derkachov, A. N. Manashov, *Lett. Math. Phys.*, **97** (2011), 185–202, arXiv: 1008.4734.
- [6] S. É. Derkachov, A. N. Manashov, *J. Phys. A*, **42**:7 (2009), 075204, 35 pp., arXiv: 0809.2050.
- [7] V. D. Lyakhovsky, A. A. Nazarov, *J. Phys. A*, **44**:7 (2011), 075205, 20 pp., arXiv: 1007.0318.
- [8] М. Ильин, П. Кулиш, В. Ляховский, *Алгебра и анализ*, **21**:2 (2009), 52–70, arXiv: 0812.2124.
- [9] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **9**, Springer, New York, 1997.
- [10] I. Bernstein, I. M. Gelfand, S. I. Gelfand, “Differential operators on principal affine space and study of $\mathfrak{g}$ -modules”, *Lie Groups and Their Representations*, Proceeding of the Summer School, Bolyai János Math. Soc. (Budapest, 1971), ed. I. M. Gelfand, Halsted Press, New York, 1975, 21–64.
- [11] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, *Функц. анализ и его прил.*, **5**:1 (1971), 1–9.
- [12] J. E. Humphreys, *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category $\mathcal{O}$* , AMS, Providence, RI, 2008.
- [13] G. J. Heckman, *Invent. Math.*, **67** (1982), 333–356.
- [14] H. D. Doebner, O. Melsheimer, *Nouvo Cimento A*, **49**:2 (1967), 306–311.
- [15] A. Nijenhuis, R. W. Richardson Jr., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 1–29.