Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, N -симметричные полиномы Чебышева в составной модели обобщенного осциллятора, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 2, 229–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6724>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:21:35

© 2011 г.

В. В. Борзов*, Е. В. Дамаскинский†

N -СИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА В СОСТАВНОЙ МОДЕЛИ ОБОБЩЕННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Продолжено изучение составной модели обобщенного осциллятора, порождаемого N -периодической матрицей Якоби. В основе модели лежит система ортогональных многочленов, связанных с этой матрицей, для $N = 3, 4, 5$. Показана невозможность существования таких полиномов для $N \geq 6$.

Ключевые слова: обобщенный осциллятор, многочлены Чебышева, классическая проблема моментов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение составных моделей физических частиц до настоящего времени остается важнейшей задачей в ядерной физике и в теории элементарных частиц. Основным подходом при рассмотрении таких моделей является теоретико-групповой подход. В настоящей работе мы обсуждаем предложенную в работах [1], [2] модель составной частицы, где используется другой (функционально-аналитический) подход. Рассматриваемая модель существенно опирается на понятие обобщенного осциллятора (см. работы [3], [4]), порожденного ортогональной системой полиномов, связанных с некоторой “периодической” матрицей Якоби. Эта матрица отличается от матрицы Якоби для классических полиномов Чебышева 2-го рода только ненулевыми элементами, стоящими на главной диагонали, которые образуют N -периодическую последовательность комплексных чисел. Ортогональные полиномы, связанные с такой матрицей Якоби, мы будем называть *N -симметричными полиномами Чебышева*.

Приведем определение N -симметричных полиномов Чебышева. Заданной последовательности $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ комплексных чисел таких, что $a_{i+N} = a_i$, сопоставим N -периодическую матрицу Якоби J ,

$$J = [a_{i,j}]_{i,j=0}^{\infty}, \quad a_{i,j} = a_i \delta_{i,j} + \delta_{i+1,j} + \delta_{i-1,j}. \quad (1)$$

*Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: borzov.vadim@yandex.ru

†Военный инженерный технический институт, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: evd@pdmi.ras.ru

Рассмотрим систему полиномов $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, определяемых рекуррентными соотношениями

$$x\psi_n(x) = \psi_{n+1}(x) + a_n\psi_n(x) + \psi_{n-1}(x), \quad \psi_0(x) = 1, \quad \psi_{-1}(x) = 0. \quad (2)$$

Полиномы $\psi_n(x)$ будем называть N -симметричными полиномами Чебышева, если кроме соотношений (2) они удовлетворяют дополнительным рекуррентным соотношениям

$$x^N \psi_{Nm+k}(x) = B_m^{(N)} \psi_{N(m+1)+k}(x) + A_m^{(N)} \psi_{Nm+k}(x) + B_{m-1}^{(N)} \psi_{N(m-1)+k}(x) \quad (3)$$

при всех $k = 0, 1, \dots, N-1$ и всех m таких, что $m \geq 0$ или $m \geq 1$ (но не при $m = 0$). Первый случай при $N = 2$ был рассмотрен авторами в работе [5], а при $N = 3$ – в работе [1]. Отметим, что этот случай достаточно прост. В настоящей работе рассматривается более интересный случай $m \geq 1$.

N -симметричные полиномы Чебышева при $N = 3$ были рассмотрены авторами в работе [1]. Отметим, что в матрице Якоби из работы [1] диагональ состояла из периодически повторяющегося набора чисел $i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 0$. В настоящей работе мы будем рассматривать аналогичные матрицы Якоби, у которых среди N последовательных чисел, стоящих на главной диагонали, только два отличны от нуля и равны $\pm i\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Многочлены, соответствующие таким матрицам Якоби, будем называть *простейшими N -симметричными полиномами Чебышева*. В настоящей работе мы построим такие полиномы для $N = 4, 5$ и покажем, что, начиная с $N = 6$, таких полиномов не существует.

2. 3-СИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА

Приведем основные результаты из работы авторов [1]. Матрица Якоби при $N = 3$ имеет вид

$$J = \{j_{i,k}\}_{i,k=0}^{\infty}, \quad j_{i,k} = B\delta_{i+1,k} + A\delta_{i,k} + B^T\delta_{i-1,k},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} i\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1 & -i\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а B^T – транспонированная матрица B .

Рекуррентные соотношения (3) при $m \geq 1$ записываются в виде

$$x^3 \psi_{3m+k}(x) = \psi_{3(m+1)+k}(x) + \psi_{3(m-1)+k}(x), \quad k = 0, 1, 2,$$

а при $m = 0$

$$x^3 \psi_0(x) = \psi_3(x) - \psi_1(x) + 2i\sqrt{3}\psi_0(x), \quad x^3 \psi_1(x) = \psi_4(x) - \psi_0(x), \quad x^3 \psi_2(x) = \psi_5(x).$$

Первые шесть многочленов имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= 1, & \psi_1(x) &= x - i\sqrt{3}, & \psi_2(x) &= x^2 + 2, & \psi_3(x) &= x^3 + x + i\sqrt{3}, \\ \psi_4(x) &= x^4 - i\sqrt{3}x^3 + 1, & \psi_5(x) &= x^5 + 2x^3, \end{aligned}$$

Рис. 1. Носитель $\mathcal{D}$ меры μ .

а при $n \geq 6$ задаются рекуррентным соотношением

$$\psi_n(x) = x^3 \psi_{n-3}(x) - \psi_{n-6}(x).$$

Построенные полиномы ортогональны в смысле

$$(\psi_m(x), \psi_n(x))_{L^2(\mathcal{D}; \mu)} = (-1)^n \delta_{m,n} \quad (4)$$

относительно комплекснозначной борелевской меры $\mu = \mu_{\text{disc}} + \mu_{\text{cont}}$ с носителем $\mathcal{D}$, показанным на рис. 1.

Дискретная часть μ_{disc} меры μ сосредоточена в точке $z^0 = \sqrt{2}$ с нагрузкой $\sigma_0 = \sqrt{3/2}$.

Носитель непрерывной части μ_{cont} меры μ лежит на системе осей

$$\mathbb{R}^{(3)} = \cup R_{\alpha+2k\pi/3}, \quad k = 0, 1, 2,$$

где R_β – ось, проходящая через начало координат комплексной плоскости под углом β к вещественной оси. Плотность $f(y)$, $x = e^{i\alpha}y$, меры μ_{cont} на оси R_α , $\alpha = 0, \pm 2\pi/3$, имеет вид

$$f(y) = \left(-1 + \frac{2}{y^2} e^{-2\alpha i} + \frac{y^2}{2} e^{2\alpha i} \right) \frac{y^5}{\pi(8+y^6)} \sqrt{\frac{4-y^6}{y^6}} \chi_{[-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]}(y),$$

где $\chi_{[a,b]}$ – характеристическая функция отрезка $[a, b]$.

Моменты меры μ равны

$$\begin{aligned} \mu_{2n+1} &= i(-2)^n \sqrt{3}, \quad n \geq 0, \\ \mu_{2n} &= \mu_{2(3k+j)} = (-2)^n + (-2)^{j-2} (1 - \delta_{k,0}) \sum_{s=0}^{k-1} (-2)^{3(k-s)} c_s + c_k \delta_{j,2}, \end{aligned}$$

где $n = 3k + j$, $k \geq 0$, $j = 0, 1, 2$, а $c_s = (2s)!/(s!(s+1)!)$ – числа Каталана.

Обозначим через H_+ (H_-) подпространство в $L^2(\mathcal{D}; \mu)$, натянутое на полиномы четной (нечетной) степени, так что $L^2(\mathcal{D}; \mu) = H_+ \oplus H_-$, т.е.

$$f \in L^2(\mathcal{D}; \mu) \quad \leftrightarrow \quad f = f_+ + f_-, \quad f_+ \in H_+, \quad f_- \in H_-.$$

Из условий ортогональности (4) следует, что 3-симметричные многочлены Чебышева целесообразно рассматривать в разложимом пространстве H с индефинитным скалярным произведением [6]

$$[f, g]_H = (f_+, g_+)_{L^2(\mathcal{D}; \mu)} - (f_-, g_-)_{L^2(\mathcal{D}; \mu)},$$

относительно которого H является гильбертовым пространством, а разложение $H = H_+ [\oplus] H_-$ есть ортогональная сумма подпространств H_+ и H_- .

Отметим специфическую особенность N -симметричных полиномов Чебышева: они распадаются на N серий. В рассматриваемом случае $N = 3$ система $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ распадается на три серии:

$$\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty = \bigcup_{k=0}^2 [\{\psi_{3m+k}(x)\}_{m=0}^\infty].$$

Методом, предложенным в работе [3], каждой из этих серий можно сопоставить отдельный обобщенный осциллятор – элементарный осциллятор Чебышева. Точно так же всей системе N -симметричных полиномов Чебышева соответствует обобщенный осциллятор – N -симметричный осциллятор Чебышева. Связь представлений алгебры N -симметричного осциллятора Чебышева с представлениями N алгебр элементарных осцилляторов Чебышева и дает составную модель обобщенного осциллятора. Для случая $N = 3$ такая модель, развитая в работе [2], будет кратко описана в следующем разделе.

3. СОСТАВНАЯ МОДЕЛЬ 3-СИММЕТРИЧНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ЧЕБЫШЕВА

Пусть $\mathcal{F}$ – гильбертово пространство, натянутое на базис 3-симметричных полиномов Чебышева $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$. Обозначим через $\mathcal{F}^{(k)}$ замыкание в $\mathcal{F}$ линейной оболочки векторов $\{\psi_{3m+k}(x)\}_{m=0}^\infty$, $k = 0, 1, 2$, k -й серии. Пространство $\mathcal{F}$ можно рассматривать как ортогональную сумму

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{k=0}^2 \mathcal{F}^{(k)}.$$

Определим в $\mathcal{F}$ 3-симметричный осциллятор Чебышева (детали см. в работе [2]). Для этого, используя рекуррентные соотношения (2) и учитывая, что в рассматриваемом случае

$$a_0 = i\sqrt{3}, \quad a_1 = -i\sqrt{3}, \quad a_2 = 0, \quad a_{n+3} = a_n,$$

введем операторы координаты X и импульса P , положив

$$X\psi_0 = \psi_1 + i\sqrt{3}\psi_0, \quad X\psi_n = \psi_{n+1} + a_n\psi_n + \psi_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

$$P\psi_0 = -i\psi_1 + i\sqrt{3}\psi_0, \quad P\psi_n = -i\psi_{n+1} + a_n\psi_n + i\psi_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Определим далее “обобщенные” координату $\tilde{X}$ и импульс $\tilde{P}$, а также лестничные операторы $\tilde{a}^\pm$ соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \operatorname{Re}(X - P), & \tilde{P} &= -i\operatorname{Im}(X - P), \\ \tilde{a}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} + i\tilde{P}), & \tilde{a}^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} - i\tilde{P}). \end{aligned} \quad (5)$$

Эти операторы действуют в пространстве $\mathcal{F}$ по формулам ($n \geq 0$, $\psi_{-1} = 0$)

$$\begin{aligned} \tilde{X}\psi_n(x) &= \psi_{n+1}(x) + \psi_{n-1}(x), & \tilde{X}\psi_n(x) &= \psi_{n+1}(x) + \psi_{n-1}(x), \\ \tilde{a}^+\psi_n(x) &= \sqrt{2}\psi_{n+1}(x), & \tilde{a}^-\psi_n(x) &= \sqrt{2}\psi_{n-1}(x). \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае остается справедливой теорема 2.7 из работы [4].

ТЕОРЕМА 3.1. *Для операторов $\tilde{a}^\pm$ (5), заданных на плотной в гильбертовом пространстве $\mathcal{F}$ области определения $\mathcal{D}((\tilde{a}^+)^*) = \mathcal{D}((\tilde{a}^-)^*) = \mathcal{D}(\tilde{X}^2) \cap \mathcal{D}(\tilde{P}^2)$, справедливы соотношения*

$$(\tilde{a}^-)^* = \overline{\tilde{a}^+}, \quad (\tilde{a}^+)^* = \overline{\tilde{a}^-},$$

где $*$ – операция сопряжения, а $\overline{\tilde{a}^\pm}$ – замыкания операторов $\tilde{a}^\pm$.

Несложно проверить, что квадратичный гамильтониан $\tilde{H} = \tilde{X}^2 + \tilde{P}^2$ является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathcal{F}$. Более того, полиномы $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ являются собственными векторами этого оператора с собственными значениями $\lambda_0 = 2$, $\lambda_n = 4$, $n \geq 1$. Определим также оператор N номера состояния, положив $N\psi_n = n\psi_n$. N – симметричный оператор, определенный на плотном в $\mathcal{F}$ множестве, который становится самосопряженным после замыкания.

Далее, следуя работе [2], определим алгебру 3-симметричного осциллятора Чебышева как бесконечномерную ассоциативную алгебру, порождаемую операторами $\tilde{a}^\pm$, N , $\mathcal{P}_0$ с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [\tilde{a}^-, \tilde{a}^+] &= 2\mathcal{P}_0, & [N, \tilde{a}^\pm] &= \pm\tilde{a}^\pm, & [N, \mathcal{P}_0] &= 0, \\ [\mathcal{P}_0, \tilde{a}^-] &= \mathcal{P}_0\tilde{a}^-, & [\mathcal{P}_0, \tilde{a}^+] &= -\mathcal{P}_0\tilde{a}^+\mathcal{P}_0, \end{aligned}$$

где $\mathcal{P}_0$ – ортопроектор на “вакуум” ψ_0 .

Перейдем к определению элементарных осцилляторов Чебышева. Обозначим через $F_m^{(k)}(x)$ базисные векторы подпространств $\mathcal{F}^{(k)}$:

$$F_m^{(k)}(x) = \psi_{3m+k}(x), \quad m \geq 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

Введем операторы координаты T_k , импульса $P^{(k)}$ и гамильтониан $H^{(k)} = T_k^2 + (P^{(k)})^2$ их действием на элементы базисов $\{F_m^{(k)}(x)\}_{m=0}^\infty$ подпространств $\mathcal{F}^{(k)}$:

$$\begin{aligned} T_k F_0^{(k)}(x) &= F_1^{(k)}(x), & P^{(k)} F_0^{(k)}(x) &= -iF_1^{(k)}(x), \\ T_k F_n^{(k)}(x) &= F_{n+1}^{(k)}(x) + F_{n-1}^{(k)}(x), \\ P^{(k)} F_n^{(k)}(x) &= i(-F_{n+1}^{(k)}(x) + F_{n-1}^{(k)}(x)), & n &\geq 1, \end{aligned}$$

$$H^{(k)} F_n^{(k)}(x) = \lambda_n F_n^{(k)}(x), \quad n \geq 0,$$

где $\lambda_0 = 2$, $\lambda_n = 4$, $n \geq 1$.

На области $\mathcal{D}((a_k^{(-)})^*) = \mathcal{D}((a_k^{(+)})^*) = \overline{\mathcal{D}(T_k^2) \cap \mathcal{D}((P^{(k)})^2)}$ операторы рождения и уничтожения

$$a_k^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_k + iP^{(k)}), \quad a_k^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_k - iP^{(k)})$$

сопряжены друг другу:

$$(a_k^{(-)})^* = a_k^{(+)}, \quad (a_k^{(+)})^* = a_k^{(-)},$$

а их действие на элементы базисов имеет вид

$$\begin{aligned} a_k^{(+)} F_n^{(k)}(x) &= \sqrt{2} F_{n+1}^{(k)}(x), \\ a_k^{(-)} F_n^{(k)}(x) &= (1 - \delta_{n,0}) \sqrt{2} F_{n-1}^{(k)}(x). \end{aligned}$$

Далее, определим оператор номера состояния соотношением

$$N_k F_n^{(k)}(x) = n F_n^{(k)}(x), \quad n \geq 0.$$

Алгебры $\mathcal{A}_k$ элементарных осцилляторов Чебышева определим как бесконечномерные ассоциативные алгебры, порождаемые операторами $a_k^{(\pm)}$, N_k , $P_0^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, с перестановочными соотношениями

$$\begin{aligned} [a_k^{(-)}, a_k^{(+)}] &= 2P_0^{(k)}, \\ [N_k, a_k^{(\pm)}] &= \pm a_k^{(\pm)}, \quad [N_k, P_0^{(k)}] = 0, \\ [P_0^{(k)}, a_k^{(+)}] &= -a_k^{(+)} P_0^{(k)}, \quad [P_0, a_k^{(-)}] = P_0^{(k)} a_k^{(-)}, \end{aligned}$$

где $P_0^{(k)}$ – ортопроекторы на основные состояния в подпространствах $\mathcal{F}^{(k)}$.

Установим связь генераторов $\tilde{a}^\pm$, N , P_0 алгебры $\mathcal{A}$ N -симметричного осциллятора Чебышева с генераторами $a_k^\pm$, N_k , $P_0^{(k)}$ алгебр $\mathcal{A}_k$, $k = 0, 1, 2$, элементарных осцилляторов Чебышева.

Поскольку

$$\frac{1}{2}(\tilde{a}^\pm)^3 = a_0^\pm \oplus a_1^\pm \oplus a_2^\pm, \quad a_k^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{a}^\pm)^3|_{\mathcal{F}^{(k)}},$$

или

$$\frac{1}{2}(\tilde{a}^\pm)^3 = (a_0^\pm \otimes \mathbb{I}_1 \otimes \mathbb{I}_2) \oplus (\mathbb{I}_0 \otimes a_1^\pm \otimes \mathbb{I}_2) \oplus (\mathbb{I}_0 \otimes \mathbb{I}_1 \otimes a_2^\pm), \quad (6)$$

удобно рассматривать матричную реализацию $\mathcal{F}_M$ пространства $\mathcal{F}$. Если $f(x) \in \mathcal{F}$, то $f(x) = \sum_{k=0}^2 f_k(x)$, где $f_k(x) \in \mathcal{F}^{(k)}$. Следовательно, можно сопоставить функции $f(x)$ вектор-столбец

$$\mathbb{F}(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x))^T.$$

Скалярное произведение в $\mathcal{F}_M$ имеет вид

$$\langle \mathbb{F}, \mathbb{G} \rangle = (f_0, g_0)_{\mathcal{F}_0} + (f_1, g_1)_{\mathcal{F}_1} + (f_2, g_2)_{\mathcal{F}_2}.$$

Гильбертово пространство $\mathcal{F}_M$ унитарно-эквивалентно пространству $\mathcal{F}$; ортонормированный базис $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$, а $\mathcal{F}_M$ состоит из векторов

$$\Psi_{3n}(x) = (\psi_{3n}, 0, 0)^T, \quad \Psi_{3n+1}(x) = (0, \psi_{3n+1}, 0)^T, \quad \Psi_{3n+2}(x) = (0, 0, \psi_{3n+2})^T.$$

Обозначим генераторы алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_k$ в пространстве $\mathcal{F}_M$ символами

$$\{\mathbb{A}^\pm, \mathbb{N}, \mathbb{P}_0\}, \quad \{\mathbb{A}_0^\pm, \mathbb{N}_0, \mathbb{P}_0^{(0)}\}, \quad \{\mathbb{A}_1^\pm, \mathbb{N}_1, \mathbb{P}_0^{(1)}\}, \quad \{\mathbb{A}_2^\pm, \mathbb{N}_2, \mathbb{P}_0^{(2)}\},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^{(0)} &= \text{diag}\{P_0, \mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2\}, & \mathbb{P}_1^{(0)} &= \text{diag}\{\mathbb{I}_0, P_1, \mathbb{I}_2\}, & \mathbb{P}_2^{(0)} &= \text{diag}\{\mathbb{I}_0, \mathbb{I}_1, P_2\}, \\ \mathbb{A}_0^\pm &= \text{diag}\{a_0^\pm, \mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2\}, & \mathbb{A}_1^\pm &= \text{diag}\{\mathbb{I}_0, a_1^\pm, \mathbb{I}_2\}, & \mathbb{A}_2^\pm &= \text{diag}\{\mathbb{I}_0, \mathbb{I}_1, a_2^\pm\}, \\ \mathbb{N}_0 &= \text{diag}\{N_0, \mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2\}, & \mathbb{N}_1 &= \text{diag}\{\mathbb{I}_0, N_1, \mathbb{I}_2\}, & \mathbb{N}_2 &= \text{diag}\{\mathbb{I}_0, \mathbb{I}_1, N_2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0 &= \text{diag}\{P_0, P_1, P_2\}, & \mathbb{N} &= \text{diag}\{N_0, N_1, N_2\}, \\ \mathbb{A}^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{a}^+ \\ \tilde{a}^+ & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}^+ & 0 \end{pmatrix}, & \mathbb{A}^- &= \begin{pmatrix} 0 & \tilde{a}^- & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}^- \\ \tilde{a}^- & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях условие (6) принимает вид

$$\left(\frac{1}{2}\mathbb{A}^\pm\right)^3 = \mathbb{A}_0^\pm \mathbb{A}_1^\pm \mathbb{A}_2^\pm \quad (7)$$

и выполнены перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}^-, \mathbb{A}^+] &= \mathbb{P}_0, & [\mathbb{N}, \mathbb{A}^\pm] &= \pm \mathbb{A}^\pm, & [\mathbb{N}, \mathbb{P}_0] &= 0, \\ [\mathbb{P}_0, \mathbb{A}^+] &= -\mathbb{A}^+ \mathbb{P}_0, & [\mathbb{P}_0, \mathbb{A}^-] &= \mathbb{P}_0 \mathbb{A}^-, \end{aligned}$$

где $\mathbb{P}_0$ – ортопроектор на состояние Ψ_0 . Итак, генераторы $\mathbb{A}^\pm$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}_0$ определяют в гильбертовом пространстве $\mathcal{F}_M$ представление той же самой алгебры обобщенного осциллятора Чебышева. Соотношения (7) позволяют рассматривать представление алгебры нестандартного осциллятора Чебышева посредством представлений алгебр элементарных осцилляторов Чебышева как “кубический корень” из тензорного произведения представлений алгебр $\mathcal{A}_k$.

4. ПОСТРОЕНИЕ НОСИТЕЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ЧАСТИ μ_{cont} МЕРЫ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ μ

При $N \geq 4$ мы в настоящей работе ограничимся определением носителя этой меры. Известно, что исследование спектра периодической матрицы Якоби может быть сведено к нахождению собственных значений $\mu_{1,2}$ матрицы монодромии

$$T = T(\lambda) = \prod_{k=1}^N \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda - a_{N-k} \end{bmatrix}.$$

Ясно, что $\det T = 1$ и спектр $\sigma(T) = \{\mu_1, \mu_2\}$, причем $\mu_1 \cdot \mu_2 = 1$, так что $|\mu_1| |\mu_2| = 1$.

Возможны два варианта.

1. $|\mu_1| < 1$, $|\mu_2| > 1$ – так называемый “гиперболический” случай. При его реализации непрерывный спектр у матрицы J отсутствует, и имеются только дискретные собственные значения.

2. $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$ – так называемый “эллиптический” случай. При его реализации у матрицы J имеется непрерывный спектр, границы которого определяются из условия $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$.

Собственные значения $\mu_{1,2} = \mu_{\pm}$ матрицы T являются корнями уравнения $\det(T - \mu \mathbb{I}) = 0$, которое с учетом равенства $\det T = 1$ может быть записано в виде

$$\mu^2 - \operatorname{Tr} T(\lambda)\mu + 1 = 0.$$

Тогда

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} T \pm \sqrt{\frac{1}{4} \operatorname{Tr}^2 T - 1}.$$

Полагая

$$\mu_1 = \mu_+ = e^{i\varphi_1}, \quad \mu_2 = \mu_- = e^{-i\varphi_2}, \quad z = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} T,$$

получаем

$$z = \frac{1}{2}(\mu_+ + \mu_-) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_2}).$$

Далее, учитывая

$$\frac{1}{4} \operatorname{Tr}^2 T - 1 = z^2 - 1 = (\mu_1 - z)^2,$$

имеем

$$-1 = -e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Следовательно,

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0, \quad z = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} T = \cos \varphi_1. \quad (8)$$

Отметим, что при $N = 3$ имеем $\operatorname{Tr} T = \lambda^3$, и из уравнений (8) следует

$$\lambda^3 = 2 \cos \varphi_1.$$

Таким образом, максимальное значение $|\lambda^3|$ достигается при $\varphi_1 = 0, \pi$. Это дает границы непрерывного спектра

$$\lambda_k = \sqrt[3]{2} e^{i2k\pi/3}, \quad \tilde{\lambda}_k = \sqrt[3]{2} e^{i(2k+1)\pi/3}, \quad k = 0, 1, 2,$$

что и показано на рис. 1.

5. 4-СИММЕТРИЧНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

Матрица Якоби (1) имеет вид

$$J = \{j_{i,k}\}_{i,k=0}^{\infty}, \quad j_{i,k} = B\delta_{i+1,k} + A\delta_{i,k} + B^T\delta_{i-1,k},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рекуррентные соотношения (3) при $m \geq 1$ имеют вид

$$x^4 \psi_{4m+k}(x) = \psi_{4(m+1)+k}(x) - 2\psi_{4m+k}(x) + \psi_{4(m-1)+k}(x)$$

при всех $k = 0, 1, \dots, N-1$, а при $m = 0$

$$\begin{aligned} x^4 \psi_0(x) &= \psi_4(x) - \psi_2(x) - 4i\psi_1(x) + 6\psi_0(x), \\ x^4 \psi_1(x) &= \psi_5(x) - 3\psi_1(x) - 4i\psi_0(x), \\ x^4 \psi_2(x) &= \psi_6(x) - 2\psi_2(x) - \psi_0(x), \\ x^4 \psi_3(x) &= \psi_7(x) - 2\psi_3(x). \end{aligned}$$

Приведем первые восемь полиномов:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= 1, & \psi_4(x) &= x^4 + x^2 + 2ix + 1, \\ \psi_1(x) &= x - 2i, & \psi_5(x) &= x^5 - 2ix^4 + 3x - 2i, \\ \psi_2(x) &= x^2 - 2ix - 1, & \psi_6(x) &= x^6 - 2ix^5 - x^4 + 2x^2 - 4ix - 1, \\ \psi_3(x) &= x^3 + 2x, & \psi_7(x) &= x^7 + 2x^5 + 2x^3 + 4x. \end{aligned}$$

Для $n \geq 8$ имеем

$$\psi_n(x) = (x^4 + 2)\psi_{n-4}(x) - \psi_{n-8}(x).$$

Так как $a_0 = 2i$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2i$, $a_3 = 0$, то

$$\text{Tr } T = 2 + \lambda^4.$$

Тогда из уравнений (8) следует, что $2 + \lambda^4 = 2 \cos \varphi_1$ и

$$\lambda^4 = -4 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}.$$

Учитывая, что максимальное значение $\sin^2(\varphi_1/2)$ равно 1, находим границы непрерывного спектра матрицы Якоби J , решая уравнение $\lambda^4 = 4e^{i\pi}$. Итак,

$$\lambda_k = \sqrt{2}e^{(\pi+2k\pi)/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Следовательно, носитель непрерывного спектра матрицы имеет вид, представленный на рис. 2.

6. 5-СИММЕТРИЧНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

При $N = 5$ матрица Якоби имеет вид

$$J = \{j_{i,k}\}_{i,k=0}^{\infty}, \quad j_{i,k} = B\delta_{i+1,k} + A\delta_{i,k} + B^T\delta_{i-1,k},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i\sqrt{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рис. 2. Носитель меры μ_{cont} при $N = 4$.

Рекуррентные соотношения при $m \geq 1$ имеют вид

$$x^5 \psi_{5m+k}(x) = \psi_{5(m+1)+k}(x) - i\sqrt{5} \psi_{4m+k}(x) + \psi_{5(m-1)+k}(x)$$

при всех $k = \overline{0, 4}$, а при $m = 0$

$$x^5 \psi_0(x) = \psi_5(x) - \psi_3(x) - i\sqrt{5} \psi_0(x),$$

$$x^5 \psi_1(x) = \psi_6(x) - \psi_2(x) - i\sqrt{5} \psi_1(x),$$

$$x^5 \psi_2(x) = \psi_7(x) - \psi_1(x),$$

$$x^5 \psi_3(x) = \psi_8(x) - \psi_0(x),$$

$$x^5 \psi_4(x) = \psi_9(x).$$

Приведем первые десять полиномов:

$$\psi_0(x) = 1,$$

$$\psi_5(x) = x^5 + x^3 - i\sqrt{5}x^2 - 2x + i\sqrt{5},$$

$$\psi_1(x) = x,$$

$$\psi_6(x) = x^6 + x^2 - 1,$$

$$\psi_2(x) = x^2 - i\sqrt{5}x - 1,$$

$$\psi_7(x) = x^7 - i\sqrt{5}x^6 - x^5 + x,$$

$$\psi_3(x) = x^3 - i\sqrt{5}x^2 - 2x,$$

$$\psi_8(x) = x^8 - i\sqrt{5}x^7 - 2x^6 + 1,$$

$$\psi_4(x) = x^4 - i\sqrt{5}x^3 - 3x^2 + i\sqrt{5}x + 1,$$

$$\psi_9(x) = x^9 - i\sqrt{5}x^8 - 3x^7 + i\sqrt{5}x^6 + x^5.$$

Заметим, что при $m \geq 1$ рекуррентные соотношения можно записать в виде

$$\psi_{5(m+1)+k}(x) = x^5 \psi_{5m+k}(x) - \psi_{5(m-1)+k}(x).$$

Построим носитель непрерывной части меры. Из соотношения $\text{Tr } T = \lambda^5$ получаем, как и выше,

$$\lambda^5 = 2 \cos \varphi_1.$$

Следовательно, максимальное значение $|\lambda^5|$ достигается при $\varphi_1 = 0, \pi$. Отсюда получаем границы непрерывного спектра матрицы Якоби J :

$$\lambda_k = \sqrt[5]{2} e^{i2k\pi/5}, \quad \tilde{\lambda}_k = \sqrt[5]{2} e^{i(\pi+2k\pi)/5}, \quad k = \overline{0, 4}.$$

Рис. 3. Носитель меры μ_{cont} при $N = 5$; $\varphi_p = p\pi/5$, $p = \overline{0, 9}$.

Таким образом, носитель непрерывной части меры имеет вид, представленный на рис. 3.

7. ОТСУТСТВИЕ ПРОСТЕЙШИХ N -СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ПРИ $N \geq 6$

Применив рекуррентные соотношения (2) $N \geq 6$ раз, получаем

$$\begin{aligned} x^N \psi_n(x) = & \psi_{n+N}(x) + b_n^{N-1} \psi_{n+N-1}(x) + c_n^{N-1} \psi_{n+N-2}(x) + d_n^{N-1} \psi_{n+N-3}(x) + \\ & + e_n^{N-1} \psi_{n+N-4}(x) + \dots + a_n^{N-1} \psi_n(x) + \dots + \\ & + e_{n-N+4}^{N-1} \psi_{n-N+4}(x) + d_{n-N+3}^{N-1} \psi_{n-N+3}(x) + \\ & + c_{n-N+2}^{N-1} \psi_{n-N+2}(x) + b_{n-N+1}^{N-1} \psi_{n-N+1}(x) + \psi_{n-N}(x). \end{aligned} \quad (9)$$

В этом равенстве используются обозначения

$$b_n^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} a_{n+k}, \quad N \geq 2, \quad (10)$$

$$c_n^{N-1} = N + \sum_{n \leq k \leq n+N-2} a_k a_j, \quad N \geq 3, \quad (11)$$

$$d_n^{N-1} = a_{n-1} + (N+1) \sum_{k=n}^{N+n-3} a_k + \sum_{\substack{j,s=0,1 \\ n \leq k \leq k+j+s \leq n+N-3}} a_k a_{k+j} a_{k+j+s}, \quad N \geq 4, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} e_n^{N-1} = & c_N^2 + a_{n-1}^2 + \sum_{k=n}^{N+n-4} a_k^2 + a_{n+N-3} + A_{n,N} + \\ & + \sum_{\substack{j,s,l=0,1 \\ n \leq k \leq k+j+s+l \leq n+N-4}} a_k a_{k+j} a_{k+j+s} a_{k+j+s+l}, \quad N \geq 5, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$A_{n,N} = 2a_{n-1}a_n + 2a_{n+N-3}a_{n+N-4} + a_{n-1}(a_{n+1} + \dots + a_{n+N-4}) + \\ + a_{n+N-3}(a_{n+N-5} + \dots + a_n) + \sum_{n-1 \leq k \leq j \leq n+N-3} \varepsilon_{k,j} a_k a_s, \\ \varepsilon_{k,j} = \begin{cases} N+3 & \text{при } j-k=1, \\ N+2 & \text{при } j-k \geq 2. \end{cases}$$

Из сравнения соотношений (3) и (9) видно, что равенство нулю всех коэффициентов при $\psi_k(x)$ для $n+N > k > n$ и $n > k > n-N$ есть необходимое и достаточное условие того, что полиномы Чебышева $\psi_n(x)$ являются N -симметричными. В настоящей работе мы рассматривали лишь простейшие N -симметричные полиномы Чебышева. Отметим, что имеется $C_N^{N-2} = N(N-1)/2$ вариантов равенства нулю $N-2$ элементов из периодически повторяющегося набора $(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ чисел, стоящих на главной диагонали матрицы Якоби. Из формул (10) и (11) следует, что оставшиеся ненулевыми элементы, скажем a_s и a_k , $s \neq k$, удовлетворяют соотношению $a_s = -a_k = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Учитывая это в соотношении (13), получаем $e_n^{(N-1)} \neq 0$. Это означает, что при $N \geq 6$ не существует простейших N -симметричных полиномов Чебышева.

Благодарности. Авторы признательны С. Н. Набоко за обсуждение ряда вопросов, связанных с темой настоящей статьи. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 09-01-00504).

Список литературы

- [1] В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, “Составная модель обобщенного осциллятора. I”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*. 21, Зап. научн. сем. ПОМИ, **374**, ПОМИ, СПб., 2010, 58–81.
- [2] V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, “Composite model for generalized Chebyshev oscillator”, *Days on Diffraction – 2010*, Proceedings of the International Conference (Saint Petersburg, June 8–11, 2010), St.-Peterburg Univ., St.-Peterburg, 2009, 22.
- [3] V. V. Borzov, *Integral Transf. and Special Functions*, **12:2** (2001), 115–138.
- [4] В. В. Борзов, *ТМФ*, **153:3** (2007), 363–380.
- [5] V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, “Connection between representations of Heisenberg and $su(1,1)$ algebras”, *Days on Diffraction – 2009*, Proceedings of the International Conference (Saint Petersburg, May 26–29, 2009), St.-Peterburg Univ., St.-Peterburg, 2009, 49–53.
- [6] Т. И. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986.