Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гриб, Г. Н. Парфенов, Квантовые логики, игры и равновесия, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 2, 259–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6727>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:17:28

© 2011 г.

А. А. Гриб*, Г. Н. Парфенов†

КВАНТОВЫЕ ЛОГИКИ, ИГРЫ И РАВНОВЕСИЯ

Установлена естественная связь между антагонистическими матричными играми и орторешетками (квантовыми логиками). Показано, что равновесие в соответствующей квантовой игре определяет операторное представление квантовой логики. Сформулировано условие квантового равновесия.

Ключевые слова: квантовая логика, решетка, квантовые игры, равновесие Нэша.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена памяти профессора А. Н. Васильева и его работам по аксиоматической квантовой теории. В 60-х годах прошлого столетия один из нас (А. А. Гриб) вместе с А. Н. Васильевым отдал дань энтузиазму, проявленному в изучении сначала аксиоматики Вайтмана, а затем аксиоматики Хаага–Кастлера. Позднее наши интересы изменились, однако вопрос, связанный с некоторыми практическими применениями красивой математики, появившейся в этих теориях, все еще остается открытым для дискуссий.

На семинарах по аксиоматике в те, как теперь кажется, далекие годы, мы пришли к выводу, что, кроме алгебры наблюдаемых величин, существует более общая структура, а именно *недистрибутивная орторешетка* вопросов “да–нет”, называемая *квантовой логикой*. В начале этого века в статьях [1], [2] было показано, что недистрибутивные орторешетки могут применяться далеко за пределами квантовой физики, например при теоретико-игровом описании экономических взаимодействий в условиях асимметричной информации. Соответствующие модели приводят к совершенно новому классу игр, к так называемым *макроскопическим квантовым играм*. При этом существенная для таких игр недистрибутивность делает невозможным использование вероятностной меры Колмогорова, и поэтому вместо вероятностей для их описания приходится использовать амплитуды вероятности (волновые функции). Однако, в отличие от широко обсуждаемых сегодня микроскопических квантовых игр, здесь возникает проблема, связанная с нахождением операторных представлений решеток в терминах коммутационных соотношений. В обычной

*Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: Andrei_Grib@mail.ru

†Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: gogaparf@gmail.com

квантовой физике такой проблемы не возникает, поскольку соответствующее представление определяется самим наблюдателем при измерении (например, при выборе той или иной проекции спина). В квантовых играх ситуация принципиально иная. Например, в случае простейшего макроскопического аналога эксперимента Штерна–Герлаха [3] имеется всего лишь абстрактная решетка, и среди бесконечного множества ее операторных представлений нет какого-либо естественного или преимущественного. Поэтому необходимо иметь некий критерий выбора представления. В настоящей работе мы формулируем такой критерий в виде существования квантового равновесия Нэша, и в роли параметров представления решетки выступают элементы платежной матрицы некоторой антагонистической игры. Настоящая работа основана на выступлении [4] авторов на Международной конференции “Теория игр и менеджмент” (Санкт-Петербург, июнь 2009 г.), и мы надеемся, что она будет интересной не только для специалистов по теории игр, но и для более широкого круга физиков-теоретиков.

Основной результат матричной теории игр – теорема существования равновесия – имеет примечательную историю. В случае отсутствия равновесия в рамках исходных действий создатель теории игр фон Нейман предложил расширить стратегические возможности участников конфликта, дополнив исходные (“чистые”) стратегии игрока $s_1, \dots, s_n$, их вероятностными комбинациями

$$\mathbf{p} = p_1 s_1 + \dots + p_n s_n, \quad p_1 + \dots + p_n = 1, \quad p_1, \dots, p_n \geq 0, \quad (1)$$

– так называемыми смешанными стратегиями. Конструкции смешанного расширения игры оказалось достаточно, чтобы любой конфликт мог найти свое разрешение в динамике – при его многократном повторении.

Ключевая идея смешивания была заимствована фон Нейманом из квантовой механики, в разработке которой он в ту пору принимал активное участие. В квантовой теории наряду с *чистыми состояниями* используются их выпуклые комбинации – *смешанные состояния*. Так в теорию игр проникла вероятностная концепция. При этом трактовки смешанных стратегий в теории игр и смешанных состояний в квантовой механике имеют одну и ту же статистическую интерпретацию. Однако в квантовой теории чистые состояния могут комбинироваться более общим образом – возможны не только *выпуклые*, но вообще любые *ненулевые* комплексные линейные комбинации чистых состояний, так называемые волновые функции

$$\psi = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n. \quad (2)$$

Несмотря на формальную схожесть комбинаций (1) и (2), существует серьезное различие между ними: волновая функция не является смешанным состоянием. Вместе с тем, сама возможность образования суперпозиций провоцирует идею вторичного расширения стратегического арсенала игроков: пополнения множества исходных чистых стратегий новыми чистыми стратегиями – волновыми функциями (2). Не окажутся ли квантовые стратегии – волновые функции – более успешными, чем классические смешанные стратегии?

Идея квантовой стратегии, положившая начало квантовой теории игр, была впервые предложена Майером в работе [5], где была продемонстрирована возможность использования таких стратегий. Далее, Айзерт, Вилкенс и Левенштейн [6] применили волновые функции к анализу хорошо известной классической игры. Наконец,

Вебером и Маринатто [7] была предложена некоторая процедура квантования классической игры, а также было продемонстрировано преимущество квантовых стратегий перед классическими: оказалось, что их использование способно увеличивать выигрыш.

2. КВАНТОВЫЕ СТРАТЕГИИ: ПЕРВЫЕ ШАГИ

Введение квантовых стратегий в теорию игр основано на простой математической конструкции, обобщающей идею фон Неймана. Множество начальных чистых стратегий $s_1, \dots, s_n$ рассматривается как ортонормированный базис комплексного гильбертова пространства. Расширенное множество чистых стратегий образуется с помощью линейных комбинаций вида

$$\psi = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n, \quad |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2 = 1. \quad (3)$$

Важно отметить, что такие стратегии радикально отличаются от стратегий (1), используемых в теории игр: они не являются смешанными. Действительно, если бы линейная комбинация ψ была смешанной стратегией, то должны были быть выполнены условия $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$. Но тогда $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 < 1$. Таким образом, идея квантования игр заключается в расширении множества чистых стратегий, а что касается смешанных стратегий, то в этой схеме они сначала не играют никакой роли. На первый взгляд, такое разложение выглядит излишним, ведь любой квантовой стратегии (3) автоматически соответствует смешанная стратегия вида

$$\mathbf{p}\psi = |\lambda_1|^2 s_1 + \dots + |\lambda_n|^2 s_n,$$

где квадраты модулей коэффициентов можно рассматривать как вероятности применения соответствующих чистых стратегий. В статье [7] такая трактовка квантовых стратегий была подробно проанализирована, и было показано, что она не дает ничего нового и возвращает нас в классическую теорию игр. Впрочем, это понятно из общих соображений: ведь любой вероятностный вектор можно формально представить как набор квадратов модулей компонент нормированного комплексного вектора. Однако в рамках такого формализма никак не используются существенные атрибуты амплитуд вероятностей – *фазовые множители*. Поэтому не следует ожидать проявления каких-либо квантовых эффектов. Преимущества квантовых стратегий и новые эффекты обнаруживаются лишь тогда, когда учитываются не квадраты модулей коэффициентов, а непосредственно сами коэффициенты.

В упомянутой работе [7] квантовые преимущества были обнаружены за счет использования так называемых *перепутанных состояний*:

$$\sum_{j,k} c_{jk} s_j^A \otimes s_k^B, \quad \sum_{j,k} |c_{jk}|^2 = 1,$$

– комплексных линейных комбинаций факторизованных состояний $s_j^A \otimes s_k^B$. Перепутанное состояние очень похоже на используемую в классической теории игр *совместную смешанную стратегию*, выражающую скоррелированное поведение игроков. Возможность увеличения выигрыша за счет использования перепутанных состояний не вызывает удивления, поскольку такие состояния, так же как и совместные смешанные стратегии, выражают скоординированное поведение.

В подавляющем большинстве работ по квантовой теории игр эксплуатируется именно идея перепутанных состояний. Возникает вопрос: можно ли получить нечто новое благодаря квантовым эффектам, используя независимый выбор квантовых стратегий, т. е. только факторизуемые состояния?

3. ОТ КВАНТОВЫХ ИГР К КВАНТОВОЙ ЛОГИКЕ

Теория квантовых игр находится в стадии формирования, и единая система понятий и трактовок еще не сложилась. Это видно хотя бы из того, что почти каждая группа исследователей стремится написать соответствующее ее пониманию введение в квантовую теорию игр. Общим моментом всех концепций является следующее.

Под квантовой игрой понимается игра, участники которой обладают средствами для воздействия на некоторую квантовую систему. Пространство стратегий представляет собой множество возможных состояний квантовой системы. Каждый из игроков совершает свое действие (стратегию) независимо от остальных, в результате чего складывается игровая ситуация (состояние игры). Игровая ситуация характеризуется набором выбранных участниками игры стратегий. Платежные функции игроков (функции полезности) суть некоторые функции состояния игры. Выигрыши получаются из результатов измерений, производимых над квантовой системой. Например, квантовая игра с двумя игроками есть набор $\Gamma = (\mathcal{H}, \rho, S_A, S_B, H_A, H_B)$, состоящий из гильбертова пространства $\mathcal{H}$, отвечающего физической системе, исходного состояния ρ , множеств S_A и S_B , соответствующих возможным квантовым операциям игроков, и платежных функций H_A и H_B . Явный вид исходного состояния и определение платежной функции даются в разных статьях по-разному. В большинстве случаев предлагаются процедуры квантования классических игр, т. е. способы введения квантовых стратегий в классическую игру.

Мы не видим необходимости придумывать квантовый вариант классической игры с целью во что бы то ни стало использовать квантовые стратегии, оставаясь, как большинство исследователей, в области *микроскопических* явлений. В основополагающей работе [1] нами показано, что квантовые стратегии естественным образом возникают при описании *макроскопических* взаимодействий, в которых нарушаются законы классической *булевой логики*. Там же показано, что квантование антагонистической квантовой игры двух лиц происходит в соответствии со схемой, напоминающей процедуру канонического квантования в механике, когда классической функции Гамильтона ставится в соответствие гамильтониан – некоторый самосопряженный оператор.

Правила квантования являются следующими. Если $h = \|h_{jk}\|$ – платежная матрица антагонистической игры, то платежная функция первого игрока может быть записана в виде

$$h(\alpha, \beta) = \sum_{j,k} h_{jk} \alpha_j \beta_k,$$

где α, β – векторы с компонентами α_j, β_k , равными нулю или единице, и

$$\sum_j \alpha_j = \sum_k \beta_k = 1. \quad (4)$$

Если игроки действуют независимо, то средний выигрыш первого игрока составляет величину

$$\langle h \rangle = \sum_{j,k} h_{jk} p_j q_k,$$

совпадающую с той, которая возникает при смешанном расширении игры. Заметим, что в этом рассуждении нет места для квантовых стратегий. Необходимость введения квантовых стратегий возникает, когда компоненты векторов α , β подчиняются иным, отличным от (4) соотношениям. Введение тех или иных уравнений, связывающих компоненты указанных векторов, приводит к той или иной квантовой игре. Каковы именно эти соотношения, зависит от того, в какие логические условия поставлены участники конфликта.

В работах [1]–[4], [8] приведены примеры макроскопических игровых взаимодействий, в которых нарушаются соотношения классической логики. В исходной работе [2] был изучен простейший вариант таких соотношений

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 + \alpha_4 = 1, \quad \beta_1 + \beta_3 = 1, \quad \beta_2 + \beta_4 = 1, \quad (5)$$

которые приводят к нарушению колмогоровской аксиоматики вероятности:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 2, \quad q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 2.$$

Характерно, что точно такие же соотношения имеют место в квантовой механике электрона. Дело в том, что процедуры измерения в физике микромира описываются в терминах квантовой логики.

4. ВЕРОЯТНОСТЬ НА ОРТОРЕШЕТКАХ

В квантовой теории понятие вероятности не подчиняется аксиомам Колмогорова и его приходится соответствующим образом модифицировать. Основная аксиома – аксиома аддитивности

$$a \cap b = \emptyset \implies \Pr(a \cup b) = \Pr(a) + \Pr(b),$$

основанная на несовместности событий, заменяется ослабленным требованием

$$a \perp b \implies \Pr(a \vee b) = \Pr(a) + \Pr(b),$$

использующим теоретико-решеточное понятие *ортogonalности*. Ортогональность есть некоторая спецификация понятия несовместности, совпадающая с последним в случае классической булевой логики. Введение понятия ортогональности требует рассмотрения новых структур – *орторешеток*.

Орторешетка – это математическая структура $\mathcal{L} = \{L, \leq, \perp, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$, где $\{L, \leq, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ – *решетка* и $\perp$ – операция, называемая *ортодополнением*. При этом выполнены следующие свойства.

1. В решетке $\{L, \leq, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$:
 - 1) $\mathbf{1}$ – максимум и $\mathbf{0}$ – минимум;
 - 2) отношение $\leq$ есть отношение частичного порядка на L ;

3) любая пара элементов a, b имеет точную нижнюю грань $a \wedge b$ и точную верхнюю грань $a \vee b$:

$$a \wedge b \leq a, b \text{ и для любого } c \text{ условие } c \leq a, b \text{ влечет } c \leq a \wedge b, \\ a, b \leq a \vee b \text{ и для любого } c \text{ условие } c \leq a, b \text{ влечет } a \vee b \leq c;$$

4) $0 \leq a$ и $a \leq 1$ для любого a .

2. Операция ортогодополнения $\perp$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $(a^\perp)^\perp = a$ (закон исключенного третьего);

2) $a \leq b$ влечет $b^\perp \leq a^\perp$ (закон контрапозиции);

3) $a \wedge a^\perp = 0$ (непротиворечивость).

Понятие орторешетки позволяет сформулировать определение ортогональных событий: $a \perp b$ тогда и только тогда, когда $a \leq b^\perp$.

Булевы алгебры, разумеется, являются орторешетками, и для них ортогодополнения – это просто дополнения (отрицания). Однако, в отличие от булевых алгебр, орторешетки в общем случае не подчиняются законам дистрибутивности по отношению к $\wedge$ и $\vee$. Справедливы лишь соотношения $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$ и двойственное к нему соотношение $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Решетка $C(\mathcal{H})$ всех замкнутых подпространств в гильбертовом пространстве является характерным примером недистрибутивной орторешетки. Другим примером недистрибутивной решетки является множество $P(\mathcal{H})$ самосопряженных проекторов в гильбертовом пространстве со следующим отношением частичного порядка: $a \leq b$ означает, что $ab = ba = a$. Отображение $a \mapsto \text{im } a$, ставящее в соответствие проектору его образ, задает изоморфизм указанных орторешеток. Заметим, что любая дистрибутивная орторешетка есть булева алгебра.

5. СПЕЦИФИКА КВАНТОВОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Множество всех вероятностных мер на орторешетке описывается соотношениями

$$p_1 + p_3 = 1, \quad p_2 + p_4 = 1, \quad p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 0.$$

Эти распределения удобно параметризовать точками (p_1, p_2) единичного квадрата $0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1$, однако в квантовой теории не все из этих распределений имеют смысл. Дело в том, что в квантовой теории вероятности появляются в результате *процедуры измерения*, которая предполагает акт *приготовления* системы в определенном состоянии. Квантовые вероятностные меры строятся на основе представлений элементов орторешетки $a \in \mathcal{L}$ проекторами $E(a)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ так, что $E(a \wedge b) = E(a) \cdot E(b)$, $E(a^\perp) = I - E(a)$ и $E(1) = I$ для любых коммутирующих элементов $a, b \in \mathcal{L}$. В этом случае вероятность элемента $a \in \mathcal{L}$ вычисляется по формуле $\text{Pr}_\rho(a) = \text{tr}(\rho E(a))$, где ρ – соответствующая матрица плотности.

Если состояние $\psi \in \mathcal{H}$ чистое и $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, то $\rho = |\psi\rangle\langle \psi|$, и вероятности вычисляются по формуле $\text{Pr}_\psi(a) = \langle \psi | E(a) | \psi \rangle$. Оказывается, что в случае недистрибутивной орторешетки (5) множество *квантовых* вероятностных мер, т. е. тех мер, которые были получены с помощью процедуры измерения, не заполняют указанного квадрата целиком. Действительно, возьмем $\alpha_j \mapsto \hat{\alpha}_j$ – какое-либо представление орторешетки (5) операторами проектирования. Тогда, в силу соотношений ортогональности $\alpha_1^\perp = \alpha_3$ и $\alpha_2^\perp = \alpha_4$, пары операторов $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_3$ и $\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_4$ коммутируют, чего нельзя сказать об операторах $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ и $\hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4$. В самом деле, если бы $[\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2] = 0$

и $[\hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4] = 0$, то выполнялись бы соотношения $\alpha_1^\perp = \alpha_2$, $\alpha_3^\perp = \alpha_4$, и орторешетка была бы булевой, а это не так, поскольку соотношения (5) не являются булевыми. Отсюда следует, что нетривиальные коммутационные соотношения

$$[\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2] = \gamma_{12} \neq 0, \quad [\hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4] = \gamma_{34} \neq 0$$

вносят дополнительные связи между вероятностями p_1, p_2 и p_3, p_4 . Иными словами, помимо естественных соотношений, между вероятностями имеются некоторые скрытые соотношения, индуцированные самой процедурой измерения. Для нахождения этих соотношений, необходимо проанализировать представления орторешетки.

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОРТОРЕШЕТКИ $\diamond + \diamond$

Зафиксируем в качестве пространства представления некоторое гильбертово пространство $\mathcal{H}$. Если взять самосопряженные проекторы $\hat{\alpha}_j: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ таким образом, что

$$\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_3 = I, \quad \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_4 = I,$$

то для нормированного вектора $\psi \in \mathcal{H}$ вероятность $p_j = \langle \psi | \hat{\alpha}_j | \psi \rangle$. Из этого немедленно вытекает, что $p_1 + p_3 = 1$, $p_2 + p_4 = 1$. Остальные уравнения определяются выбором тех или иных коммутационных соотношений для пар операторов $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ и $\hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4$. Из соображений симметрии примем соглашение, что операторы $\hat{\alpha}_j$, $j = 1, \dots, 4$, представляющие элементы решетки, имеют одинаковый ранг $\text{rk } \hat{\alpha}_j = \dim \text{im } \hat{\alpha}_j = r$. Тогда, поскольку $\hat{\alpha}_3 = I - \hat{\alpha}_1$ и $[\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_3] = 0$, получаем $r = n - r$, где $n = \dim \mathcal{H}$, и, таким образом, пространство $\mathcal{H}$ оказывается четномерным над полем $\mathbb{C}$.

Поскольку одноранговые проекторы унитарно-эквивалентны, существует оператор $u \in SU(n)$, для которого выполнено соотношение $\hat{\alpha}_2 = u^\dagger \hat{\alpha}_1 u$. Нетрудно проверить, что в таком случае $\hat{\alpha}_4 = u^\dagger \hat{\alpha}_3 u$. В зависимости от выбора того или иного унитарного оператора получаются различные модели. Среди различных возможных представлений орторешетки естественно брать неприводимые представления, когда семейство операторов проектирования $\{\hat{\alpha}_j\}$ не имеет общих нетривиальных инвариантных подпространств. Легко видеть, что все такие представления являются двумерными над полем $\mathbb{C}$.

Значительно проще устроены вещественные представления. Для их нахождения введем на комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ некоторую комплексную структуру $\star$ – отображение $\mathcal{H}$ на себя такое, что

$$(x + y)^\star = x^\star + y^\star, \quad (\lambda x)^\star = \bar{\lambda} x^\star, \quad (x^\star)^\star = x.$$

Поскольку оператор комплексной структуры инволютивен, $\star^2 = I$, его собственные значения равны $+1$ и -1 . Собственное подпространство инволюции $\mathcal{L} = \{x \in \mathcal{H}: x^\star = x\}$ является двумерным вещественным пространством. Вещественная часть $\text{Re}\langle x, y \rangle$ эрмитова произведения $\langle x, y \rangle$ в пространстве $\mathcal{H}$ превращает $\mathcal{L}$ в двумерное евклидово пространство. Рассмотрим специальный случай, когда операторы представления являются инвариантными относительно некоторой комплексной структуры, т. е. каждый из операторов проектирования коммутирует с оператором инволюции: $\hat{\alpha}_j \star = \star \hat{\alpha}_j$. Тогда $\mathcal{L}$ будет инвариантным подпространством для каждого

Реализация пространства стратегий как некоторого действительного пространства стратегий.

из операторов $\hat{\alpha}_j$, и все эти ортопроекторы будут иметь в пространстве $\mathcal{L}$ единичный ранг. Поскольку $\text{rk } \hat{\alpha}_j = 1$ для всех j , существует такой элемент $u \in SO(2)$, что $\hat{\alpha}_2 = u^{-1}\hat{\alpha}_1 u$. Непосредственное вычисление показывает, что в этом случае $\hat{\alpha}_4 = u^{-1}\hat{\alpha}_3 u$.

Оператор u есть оператор поворота плоскости. Этот поворот переводит прямую $\ell_1 = \text{im } \hat{\alpha}_1$ в прямую $\ell_2 = \text{im } \hat{\alpha}_2$ и, соответственно, прямую $\ell_3 = \text{im } \hat{\alpha}_3$ – в прямую $\ell_4 = \text{im } \hat{\alpha}_4$. Обозначим через θ угол между прямыми ℓ_1, ℓ_2 , тогда u – оператор поворота на угол θ (см. рисунок). Заметим, что $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$, так как при вращении на 180° каждая прямая переходит в себя. Указанный угол может быть вычислен исходя из операторов представления.

Найдем коммутационные соотношения для операторов представления. Для этого рассмотрим операторы $s_1 = 2\hat{\alpha}_1 - I$, $s_2 = 2\hat{\alpha}_2 - I$ отражения относительно прямых ℓ_1, ℓ_2 . Из элементарных геометрических соображений понятно, что композиция $S_1 S_2$ есть поворот на угол 2θ . Таким образом, $s_1 s_2 = u^2$. Поскольку отражения являются инволюциями, то $s_1^2 = s_2^2 = I$, и мы получаем $s_2 s_1 = s_2^{-1} s_1^{-1} = (s_1 s_2)^{-1} = u^{-2}$. Вычисляя коммутатор, находим, что $[s_1, s_2] = 4[\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2]$, поэтому

$$[\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2] = \frac{u^2 - u^{-2}}{4}.$$

Пусть теперь $x \in \mathcal{L}$ – некоторый единичный вектор на плоскости. Так как u^2 – оператор поворота на угол 2θ , из геометрических соображений ясно, что вектор $u^2 x - u^{-2} x$ перпендикулярен вектору x и имеет длину $2 \sin 2\theta$. Таким образом, $u^2 - u^{-2} = 2\iota \sin 2\theta$, где ι – оператор поворота на угол 90° : $\iota^2 = -I$. С помощью этого оператора можно записать все нетривиальные коммутационные соотношения:

$$[\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2] = [\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3] = [\hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4] = [\hat{\alpha}_4, \hat{\alpha}_1] = \frac{1}{2} \iota \sin 2\theta. \quad (6)$$

Построим матричное представление орторешетки (5). В действительном пространстве состояний $\mathcal{L}$ возьмем нормированный собственный базис проектора $\hat{\alpha}_1$. Матрицы операторов $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ в этом базисе имеют вид

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Вычисления показывают, что

$$[\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2] = \frac{1}{2} \iota \sin 2\theta, \quad \iota = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь общий комплексный случай. Пусть $f \in \mathcal{H}$ – нормированный собственный вектор оператора проектирования $\hat{\alpha}_2$ с собственным значением 1. Тогда $\hat{\alpha}_2 = |f\rangle\langle f|$. Разлагая вектор f по собственному базису оператора $\hat{\alpha}_1$, мы получаем координатное представление $\langle f| = e^{i\varphi}(\cos \theta, e^{-i\lambda} \sin \theta)$, где φ и λ – некоторые действительные параметры. Отсюда

$$\hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & e^{-i\lambda} \sin \theta \cos \theta \\ e^{i\lambda} \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

и

$$[\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2] = \frac{1}{2} \iota(\lambda) \sin 2\theta, \quad \iota(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\lambda} \\ -e^{i\lambda} & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате, как и в действительном случае, получаются коммутационные соотношения (6). Из равенства $\iota(\lambda)\iota^\dagger(\lambda) = I$ следует, что оператор $\iota(\lambda)$ является унитарным. Так как $\iota^2(\lambda) = -I$, очевидно, что $\iota(\lambda)$ есть оператор поворота на прямой угол в двумерном комплексном пространстве. Такие операторы поворота образуют непрерывное семейство. Чтобы их параметризовать, заметим, что операторы $\kappa(\lambda) = -\iota(\lambda)\iota(0)$ образуют однопараметрическую подгруппу $SU(2)$: $\kappa(\alpha + \beta) = \kappa(\alpha) \cdot \kappa(\beta)$. В терминах двулистного накрытия группы $SU(2)$ группой $SO(3)$ операторы $\iota(\lambda)$ классифицируются как повороты на угол 90° вокруг осей в пространстве $\mathbb{R}^3$.

7. КВАНТОВЫЕ СТРАТЕГИИ НА РЕШЕТКЕ $\diamond + \diamond$

В случае неприводимого вещественного представления орторешетки координатное представление нормированных векторов в собственном базисе оператора $\hat{\alpha}_1$ имеет вид $\langle \psi| = (\cos \xi, \sin \xi)$. Вычисляя вероятности $p_1 = \langle \psi|\hat{\alpha}_1|\psi\rangle$, $p_2 = \langle \psi|\hat{\alpha}_2|\psi\rangle$ и используя матричное представление операторов $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$, находим, что

$$p_1 = \cos^2 \xi, \quad p_2 = \cos^2 \xi \cos^2 \theta + 2 \cos \xi \cos \theta \sin \xi \sin \theta + \sin^2 \xi \sin^2 \theta = \cos^2(\xi - \theta),$$

где $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ – параметр представления орторешетки, отвечающий заданному коммутационному соотношению. Исключая из этих соотношений параметр состояния ξ , приходим к уравнению связи между вероятностями p_1, p_2 :

$$p_1^2 - 2p_1p_2 \cos 2\theta + p_2^2 - 2p_1 \sin^2 \theta - 2p_2 \sin^2 \theta + \sin^4 \theta = 0. \quad (7)$$

Поскольку соответствующая квадратичная форма имеет положительный дискриминант, $\delta = \sin^2 2\theta$, уравнение (7) определяет эллипс. Этот эллипс вписан в квадрат $0 \leq p_1, p_2 \leq 1$. При $\theta = 45^\circ$ он представляет собой окружность, для значений θ , близких к 0° или к 90° , он вытянут вдоль диагоналей квадрата. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду с помощью аффинного преобразования

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= \cos^2 \xi + \cos^2(\xi - \theta) = 1 + \cos(2\xi - \theta) \cos \theta, \\ -p_1 + p_2 &= \cos^2 \xi - \cos^2(\xi - \theta) = \sin(2\xi - \theta) \sin \theta. \end{aligned}$$

Замена переменных

$$x_1 = \frac{-1 + p_1 + p_2}{\cos \theta}, \quad x_2 = \frac{-p_1 + p_2}{\sin \theta}$$

дает параметрические уравнения $x_1 = \cos(2\xi - \theta)$, $x_2 = \sin(2\xi - \theta)$, и в новой системе координат уравнение эллипса превращается в уравнение окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Обратим внимание на важное обстоятельство: преобразование $\xi \mapsto \xi + 180^\circ$ отвечает переходу от волновой функции ψ к волновой функции $-\psi$ и тем самым сохраняет квантовое состояние (меняется лишь фазовый множитель). Это находится в полном соответствии с тем, что уравнение окружности инвариантно относительно указанных преобразований. Таким образом, квантовую стратегию можно представить единичным вектором плоскости или точкой единичной окружности. Легко видеть, что соответствие $\psi \mapsto (x_1, x_2)$ является двулистным накрытием пространства квантовых стратегий множеством волновых функций.

8. КВАНТОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ИГР

Применим к выражению для платежной функции матричной игры

$$h(\alpha, \beta) = \sum_{j,k} h_{jk} \alpha_j \beta_k$$

процедуру квантования. Для этого заменим в выражении классической платежной функции булевы величины α_j и β_k операторами проектирования $\hat{\alpha}_j$ и $\hat{\beta}_k$: $\hat{\alpha}_j: \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_A$ и $\hat{\beta}_k: \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_B$ в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$. В результате возникает самосопряженный *платежный оператор*

$$\hat{h} = \sum_{j,k} h_{jk} \hat{\alpha}_j \otimes \hat{\beta}_k.$$

Стратегии игроков описываются волновыми функциями, а игровые ситуации представляются разложенными векторами тензорного произведения $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_A$ и $\psi \in \mathcal{H}_B$ – квантовые стратегии. Несложные вычисления приводят к следующему выражению для среднего выигрыша в факторизованном состоянии $\varphi \otimes \psi$:

$$\langle \hat{h} \rangle = \sum_{j,k} h_{jk} \langle \varphi \otimes \psi | \hat{\alpha}_j \otimes \hat{\beta}_k | \varphi \otimes \psi \rangle = \sum_{j,k} h_{jk} \langle \varphi | \hat{\alpha}_j | \varphi \rangle \langle \psi | \hat{\beta}_k | \psi \rangle.$$

Обозначая $p_j = \langle \varphi | \hat{\alpha}_j | \varphi \rangle$ и $q_k = \langle \psi | \hat{\beta}_k | \psi \rangle$, приходим к тому же выражению для среднего выигрыша, что и в классической теории игр, с той лишь разницей, что p_j , q_k не являются в общем случае классическими вероятностями. Операторное представление позволяет рассматривать как игры с классическими булевыми вероятностями, так и их обобщения на орторешетках. Нужно лишь соответствующим образом подобрать операторы проектирования. Если, например, взять операторы $\hat{\alpha}_j$, $\hat{\beta}_k$ так, что

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 &= I, & [\hat{\alpha}_j, \hat{\alpha}_k] &= 0, \quad j \neq k, \\ \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 &= I, & [\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_k] &= 0, \quad j \neq k, \end{aligned}$$

то получится классическая игра с обычными смешанными стратегиями, удовлетворяющими условиям

$$p_1 + p_3 + p_2 + p_4 = 1, \quad q_1 + q_3 + q_2 + q_4 = 1.$$

А если взять проекционные операторы $\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_k$ так, что

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_3 &= I, & [\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_3] &= 0, & \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_4 &= I, & [\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_4] &= 0, \\ \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3 &= I, & [\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3] &= 0, & \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_4 &= I, & [\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_4] &= 0, \end{aligned}$$

то придем к ограничениям

$$p_1 + p_3 = 1, \quad p_2 + p_4 = 1, \quad q_1 + q_3 = 1, \quad q_2 + q_4 = 1. \quad (8)$$

Наконец, один из игроков может быть классическим, а другой следовать квантовой логике. Другими словами, квантование игры определяется выбором тех или иных коммутационных соотношений.

9. ПОИСК РАВНОВЕСИЙ

Результаты данного раздела обобщают предыдущие результаты, полученные для частных случаев. С помощью линейной замены переменных

$$2p = xM_\theta + e, \quad 2q = yM_\tau + e, \quad (9)$$

где $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ и

$$M_\gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \cos \gamma \\ -\sin \gamma & \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad e = (1, 1),$$

уравнения связи приводятся к виду $x_1^2 + x_2^2 = 1$ и $y_1^2 + y_2^2 = 1$. Таким образом, каждый игрок выбирает некоторую точку на единичной окружности, и квантовая игра сводится к классической игре на торе.

Пусть $h = \|h_{jk}\|$ – матрица антагонистической игры двух лиц, каждое из которых имеет четыре стратегии, и $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ – квантовые стратегии игроков в вероятностном представлении. Тогда средний квантовый выигрыш составит величину $\langle h \rangle = \mathbf{p}h\mathbf{q}^\dagger$. В силу соотношений (8) четырехмерные векторы $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ могут быть линейно выражены через два двумерных вектора p, q :

$$\mathbf{p} = pZ + k, \quad \mathbf{q} = qZ + k,$$

где

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad k = (0, 0, 1, 1).$$

В новых переменных средний выигрыш преобразуется к виду

$$\langle h \rangle = (pZ + k)h(Z^\dagger q^\dagger + k^\dagger) = pZhZ^\dagger q^\dagger + pZhk^\dagger + khZ^\dagger q^\dagger + khk^\dagger.$$

Заменяя переменные в соответствии с (9) и отбрасывая масштабные множители и аддитивные константы, получаем

$$\langle h \rangle \sim (xM_\theta + e)ZhZ^\dagger(M_\tau^\dagger y^\dagger + e^\dagger) + 2(xM_\theta + e)Zhk^\dagger + 2khZ^\dagger(M_\tau^\dagger y^\dagger + e^\dagger).$$

Отбрасывая еще раз аддитивные постоянные, имеем

$$\langle h \rangle \sim xM_\theta ZhZ^\dagger M_\tau^\dagger y^\dagger + xM_\theta Zh(Z^\dagger e^\dagger + 2k^\dagger) + (eZ + 2k)hZ^\dagger M_\tau^\dagger y^\dagger.$$

Затем вычисляем $eZ = (1, 1, -1, -1)$, $w = eZ + 2k = (1, 1, 1, 1)$ и, принимая обозначения

$$C = ZhZ^\dagger, \quad A = M_\theta CM_\tau^\dagger, \quad a = wh^\dagger Z^\dagger, \quad b = whZ^\dagger, \quad u = aM_\theta^\dagger, \quad v = bM_\tau^\dagger,$$

находим, что $\langle h \rangle \sim xAy^\dagger + xu^\dagger + vy^\dagger$.

Чтобы найти равновесия Нэша, воспользуемся следующим критерием (см. [8]): *пара (x, y) является равновесием Нэша тогда и только тогда, когда для некоторых $\lambda, \mu \geq 0$ справедливы равенства*

$$yA^\dagger + u = \lambda x, \quad xA + v = \mu y. \quad (10)$$

Поиск равновесий соответствует нахождению таких значений параметров представления θ, τ , при которых для некоторых значений s, t выполнены условия:

$$vA^\dagger = su, \quad uA = tv. \quad (11)$$

Предполагая, что $u, v \neq 0$, рассмотрим векторы $x = u/|u|$ и $y = v/|v|$. Подставляя их в систему (10), получаем

$$yA^\dagger + u = \frac{|u|}{|v|}(s + |v|)x, \quad xA + v = \frac{|v|}{|u|}(t + |u|)y. \quad (12)$$

Если система уравнений (11) для θ, τ, s, t имеет решение при условиях $s + |v| \geq 0$, $t + |u| \geq 0$, то пара (x, y) является равновесием Нэша. Проанализируем систему уравнений (12). В результате несложных преобразований имеем

$$tbM_\tau^\dagger = aM_\theta^\dagger M_\theta CM_\tau^\dagger, \quad saM_\theta^\dagger = bM_\tau^\dagger M_\tau CM_\theta^\dagger.$$

Отсюда

$$aM_\theta^\dagger M_\theta C = tb, \quad bM_\tau^\dagger M_\tau C = sa. \quad (13)$$

Однако

$$N_\gamma = M_\gamma^\dagger M_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\gamma \\ \cos 2\gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

Решающим обстоятельством является то, что матрица C и векторы a, b от угловых параметров θ, τ не зависят.

Предполагая, что матрица C является невырожденной, возьмем $f = bC^{-1}$ и $g = aC^{-1}$. Тогда уравнения (13) перепишутся так: $aN_\theta = tf$, $bN_\tau = sg$. Отсюда получаем соотношения $a_1 + a_2 \cos 2\theta = tf_1$ и $a_1 \cos 2\theta + a_2 = tf_2$. Исключая параметр t , приходим к уравнениям для определения параметров представления θ и τ :

$$\frac{a_1 + a_2 \cos 2\theta}{a_1 \cos 2\theta + a_2} = \frac{f_1}{f_2}, \quad \frac{b_1 + b_2 \cos 2\tau}{b_1 \cos 2\tau + b_2} = \frac{g_1}{g_2}.$$

Поскольку величины $a_1, a_2, b_1, b_2, f_1, f_2, g_1, g_2$ зависят только от элементов платежной матрицы $h = ||h_{jk}||$, мы можем сформулировать основной результат: *в ситуации равновесия линейные представления решеток игроков полностью определяются элементами платежной матрицы.*

Учитывая это, мы приходим к заключению, что для задания квантовой игры требуются лишь платежная матрица и логические соотношения, определяющие соответствующую орторешетку.

Список литературы

- [1] A. A. Grib, G. N. Parfionov, *J. Math. Sci.*, **125**:2 (2005), 173–184.
- [2] L. K. Franeva, A. A. Grib, G. N. Parfionov, “Quantum games of macroscopic partners”, *Proc. I Internat. Conf. “Game Theory and Management”* (St. Petersburg, Russia, June 28–29, 2007), Grad. Sch. Manag., St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 2008, 130–152, <http://www.gsom.pu.ru/en/research/conferences/>.
- [3] A. A. Grib, G. N. Parfionov, “How to play macroscopic quantum game”, *Proc. II Internat. Conf. “Game Theory and Management”* (St. Petersburg, Russia, June 26–27, 2008), Grad. Sch. Manag., St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 2009, 137–146, <http://www.gsom.pu.ru/en/research/conferences/>.
- [4] A. A. Grib, G. N. Parfionov, “Quantum Nash-equilibrium and linear representations of ortholattices”, *Proc. III Internat. Conf. “Game Theory and Management”* (St. Petersburg, Russia, June 24–26, 2009), Grad. Sch. Manag., St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 2010, 132–143, <http://www.gsom.pu.ru/en/research/conferences/>.
- [5] D. A. Meyer, *Phys. Rev. Lett.*, **82**:5 (1999), 1052–1055, arXiv:quant-ph/9804010.
- [6] J. Eisert, M. Wilkens, M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.*, **83**:15 (1999), 3077–3080, arXiv:quant-ph/9806088.
- [7] L. Marinatto, T. Weber, *Phys. Lett. A*, **272**:5–6 (2000), 291–303, arXiv:quant-ph/0004081.
- [8] G. Parfionov, *Multiple Nash-equilibrium in quantum game*, arXiv:0806.1102.