Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, О точной линеаризации задач скольжения разреженного газа в модели Бхатнагара–Гросса–Крука, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 2, 339–342

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf673>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:09:04

О ТОЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ЗАДАЧ СКОЛЬЖЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В МОДЕЛИ БХАТНАГАРА–ГРОССА–КРУКА

Рассматривается нелинейное уравнение Больцмана в модели Бхатнагара–Гросса–Крука для задач течения газа в полупространстве (задача Крамерса). Задача точно линеаризуется, и ее решение сводится к линейному интегральному уравнению с суммарно-разностным ядром и некоторому простому нелинейному соотношению.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных моделей физической кинетики является модель Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) уравнения Больцмана. Она широко применяется при изучении течения простого или многокомпонентного газа в полупространстве, ограниченном твердой стенкой (задача Крамерса), а также течения газа между двумя параллельными стенками (задача Куэтта) [1, 2].

Применение БГК-модели сопровождается приближенной линеаризацией полученного нелинейного интегродифференциального уравнения. При этом локально-максвелловская функция распределения газа по скоростям заменяется суммой первых двух членов разложения в степенной ряд по среднемассовой скорости U в предположении, что

$$|U| \ll \langle |V| \rangle, \quad (1)$$

где V – молекулярная скорость газа [1–3]. Такая модель называется линеаризованной БГК-моделью. В случае задачи Крамерса применение линеаризованной БГК-модели привело к противоречивому результату: функция $U = U(x)$ (где x – расстояние от стенки), определяемая из линеаризованного уравнения, неограниченно растет при $x \rightarrow +\infty$, что противоречит исходному предположению (1).

Приведенный нами анализ задач Крамерса и Куэтта показал, что эти задачи могут быть точно линеаризованы и эффективно решены в рамках БГК-модели. Ниже мы ограничимся рассмотрением задачи Крамерса.

*Бюраканская астрофизическая обсерватория Национальной академии наук Республики Армения, с. Бюракан, Республика Армения. E-mail: yengib@bao.sci.am

2. О ТОЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ЗАДАЧ

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ введена декартова система координат (x, y, z) , и пусть однокомпонентный газ заполняет полупространство $x > 0$, ограниченное твердой стенкой – плоскостью $x = 0$. Рассмотрим задачу течения газа по направлению оси Oy . Обозначим через $f(x, \vec{s})$ искомую функцию распределения газа по скоростям $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$. Через $U(x)$ обозначается среднемассовая скорость газа $\vec{U}(x) = (0, U, 0)$, где

$$U(x) = \frac{1}{n} \int s_2 f(x, \vec{s}) d^3 s. \quad (2)$$

Уравнение Больцмана в БГК-модели имеет вид [1, 2–4]

$$s_1 \frac{\partial f(x, \vec{s})}{\partial x} = -\sigma f(x, \vec{s}) + \beta e^{-\alpha |\vec{s} - \vec{U}(x)|^2}, \quad (3)$$

где $\sigma = 1/\tau$, τ – время релаксации, $\alpha = m/(2kT)$, $\beta = \sigma n(\alpha/\pi)^{3/2}$, m – масса молекул, T – температура газа, k – постоянная Больцмана.

Введем следующие вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} f^+(x, \vec{s}) &= \begin{cases} f(x, s_1, s_2, s_3), & \text{если } s_1 \geq 0, \\ 0, & \text{если } s_1 < 0, \end{cases} \\ f^-(x, \vec{s}) &= \begin{cases} 0, & \text{если } s_1 < 0, \\ f(x, -s_1, s_2, s_3), & \text{если } s_1 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (3) дополняется граничным условием у стенки

$$f^+(0, \vec{s})|_{s_1 > 0} = q f_0^M(\vec{s}) + (1 - q) f^-(0, \vec{s})|_{s_1 < 0}, \quad (5)$$

где q – коэффициент аккомодации, указывающий на долю молекул, которые после взаимодействия со стенкой покидают ее с максвелловским распределением по скоростям

$$f_0^M(\vec{s}) = \frac{\beta}{\sigma} e^{-\alpha s^2}.$$

Остальная часть $(1 - q)$ молекул отражается от поверхности стенки зеркально.

Из уравнения (3) имеем

$$f^+(x, \vec{s}) = C e^{-x \frac{\sigma}{s_1}} + \int_0^x e^{-(x-t) \frac{\sigma}{s_1}} \Psi(t, \vec{s}) \frac{dt}{s_1}, \quad (6)$$

$$f^-(x, \vec{s}) = \int_x^\infty e^{-(t-x) \frac{\sigma}{s_1}} \Psi(t, \vec{s}) \frac{dt}{s_1}, \quad (7)$$

где

$$\Psi(x, \vec{s}) = \beta e^{-\alpha |\vec{s} - \vec{U}(x)|^2} = \beta e^{-\alpha s_1^2} e^{-\alpha s_3^2} e^{-\alpha (s_2 - U(x))^2}. \quad (8)$$

Из (6), (7) с учетом (5) получим

$$C = qf_0^M(\vec{s}) + (1 - q) \int_0^\infty e^{-t\frac{\sigma}{s_1}} \Psi(t, \vec{s}) \frac{dt}{s_1}. \quad (9)$$

Подставляя (6) и (7) в выражение (2) и учитывая (9), для среднемассовой скорости получим

$$U(x) = S(x) + Q(x), \quad (10)$$

где

$$S(x) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^\infty ds_3 \int_{-\infty}^\infty s_2 ds_2 \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty e^{-|x-1|\frac{\sigma}{s_1}} \Psi(t, \vec{s}) \frac{dt}{s_1}, \quad (11)$$

$$Q(x) = (1 - q) \frac{1}{n} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty s_2 ds_2 ds_3 \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty e^{-(x+t)\frac{\sigma}{s_1}} \Psi(t, \vec{s}) \frac{dt}{s_1}. \quad (12)$$

Соотношение (10) совместно с (8), (11) и (12) представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно U . Займемся преобразованием этого уравнения.

Из (8) и (11) получаем

$$S(x) = \int_0^\infty K(|x - t|) q(t) dt, \quad (13)$$

где

$$K(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \sigma \int_0^\infty e^{-x\frac{\sigma}{s_1}} e^{-\alpha s_1^2} \frac{ds_1}{s_1},$$

$$q(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty s_2 e^{-\alpha[s_2 - U(t)]^2} ds_2.$$

Перейдя к новой переменной интегрирования $p = s_2 - U(t)$, будем иметь

$$q(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty [p + U(t)] e^{-\alpha p^2} dp = U(t),$$

поэтому

$$S(x) = \int_0^\infty K(|x - t|) U(t) dt.$$

Аналогичное выражение получается для функции Q . В результате выражение (10) принимает вид

$$U(x) = \int_0^\infty K(|x - t|) U(t) dt + \varepsilon \int_0^\infty K(x + t) U(t) dt, \quad \varepsilon = 1 - q. \quad (14)$$

Нетрудно проверить, что выполняется условие консервативности

$$\int_{-\infty}^\infty K(x) dx = 1.$$

После нахождения функции $U(x)$ из уравнения (14) искомая функция распределения по скоростям определяется согласно формулам (6)–(8).

Итак, задача (2), (3) для нелинейного интегродифференциального уравнения точно линеаризована. Ее решение сведено к линейному консервативному интегральному уравнению (14) и простым нелинейным соотношениям (6)–(8). Изучению и точному решению консервативного линейного уравнения (14) посвящена работа авторов [5]. Заметим, что вышеизложенные результаты допускают обобщение на случай течения многокомпонентного газа в полупространстве.

Список литературы

- [1] *М. Н. Коган*. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1962.
- [2] *К. Черчиньяни*. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
- [3] *А. В. Латышев, А. А. Юшканов*. ЖВМиМФ. 1991. Т. 31. № 8. С. 1201.
- [4] *Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский*. Физическая кинетика. Т. X. М.: Наука, 1979.
- [5] *Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян*. ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 3. С. 466.

Поступила в редакцию 22.III.2000 г.