Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Боровец, А. Пахол, Дубли Гейзенберга квантованных алгебр Пуанкаре, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 2, 297–306

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6730>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 18:18:46

© 2011 г.

А. Боровец*, А. Пахол*

ДУБЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА КВАНТОВАННЫХ АЛГЕБР ПУАНКАРЕ

Кратко анализируются некоторые общие вопросы, относящиеся к твистовой деформации дубля Гейзенберга. В качестве примеров заново рассмотрены дубли Гейзенберга, основанные на квантованных (хопфовых) алгебрах Пуанкаре.

Ключевые слова: алгебры Хопфа, квантовые деформации, смеш-произведение, дубли Гейзенберга, квантованные алгебры Пуанкаре.

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебру Ли–Пуанкаре можно расширить коммутирующими координатами в пространстве Минковского, используя тот факт, что алгебра Минковского – модульная алгебра Хопфа, и применяя затем конструкцию смеш- (скрестного) произведения. Это, в частности, определяет подалгебру Вейля как смеш-произведение пространственно-временной алгебры (Минковского) с подалгеброй трансляций. То же самое можно сделать в деформированном случае, например при деформации твистом, что приводит к понятию деформированной релятивистской алгебры, описанной в работе [1]. Как мы напомним ниже, деформированный и недеформированный случаи оказываются связанными (нелинейной) заменой генераторов, обеспечивающей изоморфизм соответствующих алгебр. Более замысловатая конструкция может получиться для смеш-произведения двойственной пары алгебр Хопфа, и она известна как дубль Гейзенберга, который изучался в работах [2] в случае κ -алгебры Пуанкаре и будет предметом исследования в настоящей работе.

Изучение структуры пространства-времени на планковском масштабе, где необходимо учитывать поправки за счет квантовой гравитации, является одной из наиболее важных задач, стоящих перед фундаментальной физикой. Один из подходов к описанию природы планковского масштаба состоит в принятии некоммутативной структуры пространства-времени [3]–[5]. Квантовые деформации, которые приводят к некоммутативному пространству-времени, строго связаны с формализмом квантовых групп (алгебр Хопфа) [6]–[8], доставляющим описание деформированных симметрий. Квантовые группы рассматриваются поэтому как некоммутативное обобщение групп симметрии. Векторные поля дают бесконечномерную алгебру Ли и

*Institute for Theoretical Physics, University of Wrocław, Wrocław, Poland.
E-mail: borow@ift.uni.wroc.pl, anna.pachol@ift.uni.wroc.pl

естественно действуют (дифференцированиями) на алгебре функций на многообразии. Однако эта алгебра является одновременно и хопфовой модульной алгеброй над алгеброй Хопфа, порожденной векторными полями, и ее можно деформировать соответствующим твистующим элементом. Деформированная алгебра функций является так называемым некоммутативным пространством-временем (известным также под названием ковариантного квантового пространства) [4], [9] и дает вклад в реализацию идеи Конна о некоммутативных пространствах (многообразиях). Она может оказаться полезной при квантовании гравитации. Примером такой алгебры (хопфова модуля) является κ -некоммутативное пространство-время Минковского [10] с κ -алгеброй Пуанкаре (алгеброй Хопфа) [11]–[13] в качестве группы симметрии. Ковариантное квантовое пространство представляет собой один из способов описания структуры пространства-времени на планковском масштабе. Тем не менее этот подход отличается от альтернативы Допликера–Фреденхагена–Робертса, где эффект квантования пространства-времени вызывается классической гравитацией [3]. В квантово-групповом подходе начинают с деформации релятивистских симметрий и исследуют следствия из этого предположения, например, для теории гравитации. Такая точка зрения позволяет объединить пространственно-временные координаты с квантово-групповыми генераторами с помощью конструкции смеш-произведения (см., например, работы [14], [15] по поводу математических подробностей). Эту новую алгебру в виде смеш-произведения оказывается возможным получить посредством нелинейной замены генераторов из недеформированной (неквантованной) алгебры [1]. В частности, деформированная и недеформированная алгебры Вейля (фазовые пространства) также изоморфны. Это важное свойство с физической точки зрения, потому что оно обеспечивает возможность выбора физически измеримой системы отсчета, связанной с каноническими коммутационными соотношениями (алгебры Вейля). Общий результат, утверждающий наличие изоморфизма между твист-деформированной и недеформированной алгебрами смеш-произведений, был установлен в работе [1]. Такой изоморфизм ранее рассматривался в двойственном виде [16], а также недавно в контексте присоединенного действия в работе [17]. В настоящей работе мы хотим проиллюстрировать этот изоморфизм для дубля Гейзенберга [18], используемого для описания твистованной θ -алгебры Пуанкаре [19], [20] и κ -алгебры Пуанкаре [2].

Начнем с напоминания по поводу понятия ковариантного квантового пространства, а также конструкции дубля Гейзенберга как специального случая смеш-произведения. Позднее мы напомним, что такое твистовая деформация смеш-алгебры, и проиллюстрируем, как твистуется описание алгебры Пуанкаре посредством дубля Гейзенберга в случае θ -твиста. Последним по порядку, но не по важности рассматривается также κ -деформированный дубль Гейзенберга.

2. МОДУЛИ, СМЕШ-ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ДУБЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Говоря “физически”, модульное соотношение между алгебрами соответствует действию группы симметрии на соответствующем пространстве-времени. В деформированном случае данное соотношение остается тем же самым: некоммутативное пространство-время является хопфовой модульной алгеброй над квантовой группой, реализующей симметрию. Некоммутативную алгебру пространства-времени и

квантовую группу можно описывать как (объединить в) одну большую алгебру, называемую смеш-произведением [14], [15]. С физической точки зрения интересно то, что такая деформированная (твистованная) алгебра смеш-произведения изоморфна недеформированной. Поэтому с помощью замены генераторов деформированного (некоммутативного) случая всегда можно выбрать измеримую систему отсчета, обеспечиваемую каноническими переменными. В настоящем разделе мы напомним теорему об этом изоморфизме, а также исследуем его в случае дубля Гейзенберга, который является специальным примером конструкции смеш-произведения. Мы начнем с недеформированной алгебры Пуанкаре и двойственной к ней. Позднее мы напомним θ -твистованную алгебру Пуанкаре [19], [20]. В завершающей части мы также рассмотрим κ -деформированный дубль Гейзенберга алгебры Пуанкаре [2], но в классическом базисе [21], а не в используемом обычно базисе би-смеш-произведения.

Начнем с некоторых определений и обозначений. Алгебра Хопфа $\mathcal{H}$ – унитарная ассоциативная алгебра, снабженная дополнительными структурами такими, как коумножение Δ , коединица ϵ и антипод S .

(Левая) *модульная алгебра* над алгеброй Хопфа $\mathcal{H}$ представляет собой $\mathcal{H}$ -модуль $\mathcal{A}$, который одновременно является унитарной алгеброй, удовлетворяющей условию совместности

$$L \triangleright (f \cdot g) = (L_{(1)} \triangleright f) \cdot (L_{(2)} \triangleright g) \quad (1)$$

между умножением $\cdot: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, копроизведением $\Delta: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, $\Delta(L) = L_{(1)} \otimes L_{(2)}$, и (левым) действием на модуле $\triangleright: \mathcal{H} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, где $L \in \mathcal{H}$, $f, g \in \mathcal{A}$, $L \triangleright 1 = \epsilon(L)$, $1 \triangleright f = f$. Аналогично для *правой $\mathcal{H}$ -модульной алгебры* $\mathcal{A}$ выполнено условие $(f \cdot g) \triangleleft L = (f \triangleleft L_{(1)}) \cdot (g \triangleleft L_{(2)})$, где используется (правое) действие на модуле $\triangleleft: \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}$ и $L \in \mathcal{H}$, $f, g \in \mathcal{A}$, $1 \triangleleft L = \epsilon(L)$, $f \triangleleft 1 = f$.

Соотношение между алгебрами Хопфа и их модулями позволяет единственным образом объединить пространственно-временные координаты с квантово-групповыми генераторами с помощью конструкции смеш-произведения. $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{H}$ (где $\mathcal{A}$ – левый $\mathcal{H}$ -модуль) содержит в качестве подалгебр алгебру пространственно-временных координат, а также алгебру симметрии. Кратко напомним конструкцию так называемого смеш-произведения $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{H}$. Структура алгебры определена здесь на векторном пространстве $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ путем задания умножения

$$(f \otimes L) \rtimes (g \otimes M) = f(L_{(1)} \triangleright g) \otimes L_{(2)} M. \quad (2)$$

Исходные алгебры канонически вкладываются в $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{H}$ в качестве подалгебр посредством $\mathcal{A} \ni f \rightarrow f \otimes 1$ и $\mathcal{H} \ni L \rightarrow 1 \otimes L$. Например, в случае тривиального действия $L \triangleright g = \epsilon(L)g$ получаем, что $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{H}$ изоморфно обычному тензорному произведению алгебр $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$: $(f \otimes L)(g \otimes M) = fg \otimes LM$. В случае правой $\mathcal{H}$ -модульной алгебры $\mathcal{A}$ структура смеш-произведения $\mathcal{H} \ltimes \mathcal{A}$ определена на векторном пространстве $\mathcal{H} \otimes \mathcal{A}$ посредством умножения

$$(L \otimes f) \ltimes (M \otimes g) = LM_{(1)} \otimes (f \triangleleft M_{(2)})g. \quad (3)$$

Специальный класс примеров рассмотренного смеш-произведения алгебр дается *дублем Гейзенберга*. Такое случается, если рассмотренные выше $\mathcal{H}$ и $\mathcal{A}$ составляют двойственную пару алгебр Хопфа¹⁾, т.е. имеется невырожденное билинейное хопфово спаривание между двумя алгебрами Хопфа $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H} \times \mathcal{A} \rightarrow k$ ²⁾. Более точно, обе структуры алгебры Хопфа являются взаимно двойственными в следующем смысле:

$$\langle L_{(1)}, f \rangle \langle L_{(2)}, f' \rangle = \langle L, f \cdot_{\mathcal{A}} f' \rangle, \quad \langle L, f_{(1)} \rangle \langle L', f_{(2)} \rangle = \langle L \cdot_{\mathcal{H}} L', f \rangle, \quad (4)$$

$$\langle L, S_{\mathcal{A}}(f) \rangle = \langle S_{\mathcal{H}}(L), f \rangle, \quad \langle 1, - \rangle = \epsilon_{\mathcal{A}}, \quad \langle -, 1 \rangle = \epsilon_{\mathcal{H}}, \quad (5)$$

где $L, L' \in \mathcal{H}(m_{\mathcal{H}}, \Delta_{\mathcal{H}}, \epsilon_{\mathcal{H}}, S_{\mathcal{H}})$, $f, f' \in \mathcal{A}(m_{\mathcal{A}}, \Delta_{\mathcal{A}}, \epsilon_{\mathcal{A}}, S_{\mathcal{A}})$ и мы используем стандартные свидлеровские обозначения для копроизведения, например $\Delta_{\mathcal{H}}(L) = L_{(1)} \otimes L_{(2)}$.

Левое регулярное действие (квантовой группы) $\mathcal{H}$ на (ковариантном квантовом пространстве, которое само является алгеброй Хопфа) $\mathcal{A} = \mathcal{H}^*$ можно определить как

$$L \triangleright f = \langle L, f_{(2)} \rangle f_{(1)}, \quad (6)$$

где $\Delta_{\mathcal{A}}(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}$; $\forall L \in \mathcal{H}$; $f \in \mathcal{A} = \mathcal{H}^*$. При этом соответствующая алгебра смеш-произведения $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{H}$ называется *дублем Гейзенберга* двойственной пары $\mathcal{A}, \mathcal{H}$, и здесь мы обозначим ее как $\mathfrak{H}(\mathcal{A})$. Произведение в этой алгебре принимает вид $(f \otimes L) \rtimes (g \otimes M) = \langle L_{(1)}, g_{(2)} \rangle f g_{(1)} \otimes L_{(2)} M$. Для *правого регулярного действия* имеется выражение, аналогичное (6): $f \triangleleft L = \langle L, f_{(1)} \rangle f_{(2)}$. Таким образом,

$$\langle LL', a \rangle = \langle L, L' \triangleright a \rangle = \langle L', a \triangleleft L \rangle = \langle 1, L' \triangleright a \triangleleft L \rangle = \epsilon_{\mathcal{A}}(L' \triangleright a \triangleleft L),$$

где $L' \triangleright a \triangleleft L = \langle L', a_{(3)} \rangle \langle a_{(1)}, L \rangle a_{(2)}$ в символических обозначениях $\Delta^2(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)}$. Алгебра смеш-произведения (дубль Гейзенберга) $\mathfrak{H}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \rtimes \mathcal{A}$ определяется в этом случае как $(L \otimes f) \rtimes (M \otimes g) = LM_{(1)} \otimes \langle M_{(2)}, f_{(1)} \rangle f_{(2)} g$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Разумеется, можно взаимно поменять роли, которые играют алгебра Хопфа, представляющая группу симметрии, и алгебры, представляющие соответствующее пространство, и тогда определить (левое) действие алгебры $\mathcal{A}$ на $\mathcal{H} = \mathcal{A}^*$ как

$$f \triangleright L = \langle L_{(2)}, f \rangle L_{(1)} \quad (7)$$

или аналогично (правое) действие алгебры $\mathcal{A}$ на $\mathcal{H} = \mathcal{A}^*$ как

$$L \triangleleft f = \langle L_{(1)}, f \rangle L_{(2)}. \quad (8)$$

Тогда $\mathfrak{H}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \rtimes \mathcal{A} \simeq \mathcal{H} \rtimes \mathcal{A}$ и $\mathfrak{H}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \rtimes \mathcal{H} \simeq \mathcal{A} \rtimes \mathcal{H}$. Более того, алгебры $\mathfrak{H}(\mathcal{A})$ и $\mathfrak{H}(\mathcal{H})$ также изоморфны [18]. Кажется, что разделение между алгеброй симметрии и пространственной алгеброй теряет значение в формулировке, основанной на дубле Гейзенберга.

В качестве примера конструкции дубля Гейзенберга рассмотрим дубль Гейзенберга алгебры Пуанкаре $\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}$, порожденной генераторами $(M_{\mu\nu}, P_{\nu})$, и двойственной алгебры $\mathcal{F}(\text{ISO}(1,3))$ (функции на группе $\text{ISO}(1,3)$), которую порождают $(\Lambda_{\mu}^{\nu}, x^{\nu})$.

¹⁾Иногда для краткости будем писать $\mathcal{A} = \mathcal{H}^*$ или $\mathcal{H} = \mathcal{A}^*$ и называть их двойственными алгебрами Хопфа, хотя строгий смысл это имеет только в конечномерном случае.

²⁾Все рассматриваемые здесь объекты являются k -векторными пространствами, а все отображения являются k -линейными, где k – поле комплексных чисел.

Для алгебры Ли–Пуанкаре $\text{iso}(1, 3)$ легко увидеть конструкцию полупрямого произведения между лоренцевыми $\text{so}(1, 3)$ -генераторами $M_{\mu\nu}$:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\lambda}] = -i\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} - i\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} + i\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda}, \quad (9)$$

и алгеброй трансляций t^n с генераторами импульса $P_\lambda: [P_\mu, P_\nu] = 0$. На уровне универсальных обертывающих алгебр, строго говоря, алгебра Пуанкаре является смеш-произведением $\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)} = T^n \rtimes \mathcal{U}_{\text{so}(1,3)}$, откуда следуют скрестные коммутационные соотношения

$$[M_{\mu\nu}, P_\lambda] = i\eta_{\mu\lambda}P_\nu - i\eta_{\nu\lambda}P_\mu. \quad (10)$$

Алгебру $\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}$ можно снабдить примитивной структурой коалгебры:

$$\Delta(P_\mu) = \Delta_0(P_\mu), \quad \Delta(M_{\mu\nu}) = \Delta_0(M_{\mu\nu}). \quad (11)$$

При

$$\epsilon(P_\mu) = \epsilon(M_{\mu\nu}) = 0, \quad S(P_\mu) = -P_\mu, \quad S(M_{\mu\nu}) = -M_{\mu\nu} \quad (12)$$

она становится (неквантованной) алгеброй Хопфа.

Опишем двойственную алгебру $\mathcal{F}(\text{ISO}(1, 3))$ как алгебру функций на группе Ли $\text{ISO}(1, 3)$. Можно заметить, что $\mathcal{F}(\text{ISO}(1, 3))$ дает другой пример конструкции смеш-произведения: $\mathcal{F}(\text{ISO}(1, 3)) = \mathcal{F}(\mathfrak{X}^4 \rtimes \text{SO}(1, 3))$ с абелевой алгеброй координат $\mathfrak{X}^4 = \{x^\mu: [x^\mu, x^\nu] = 0\}$ в качестве двойственной к T^n . Лоренцев сектор $\mathcal{F}(\text{SO}(1, 3)) = \{\Lambda_\alpha^\beta: [\Lambda_\alpha^\beta, \Lambda_\mu^\nu] = 0: \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}$ дуален к $\mathcal{U}_{\text{so}(1,3)}$. Скрестные коммутационные соотношения на этот раз тривиальны: $[x^\mu, \Lambda_\alpha^\beta] = 0$. (Матричная) структура коалгебры

$$\Delta(\Lambda_\nu^\mu) = \Lambda_\gamma^\mu \otimes \Lambda_\nu^\gamma, \quad \Delta(x^\mu) = \Lambda_\gamma^\mu \otimes x^\gamma + x^\mu \otimes 1 \quad (13)$$

вместе с коединицей $\epsilon(\Lambda_\gamma^\mu) = \delta_\gamma^\mu$, $\epsilon(x^\mu) = 0$ и антиподом $S(\Lambda_\gamma^\mu) = (\Lambda^{-1})_\gamma^\mu$, $S(x^\gamma) = -(\Lambda^{-1})_\gamma^\mu x^\mu$, превращают ее в алгебру Хопфа.

Естественное спаривание (двойственность), индуцируемое соотношениями $\langle P_\mu, x^\nu \rangle = i\delta_\mu^\nu$ и $\langle M_{\alpha\beta}, \Lambda_\nu^\mu \rangle = i\delta_\alpha^\mu \eta_{\beta\nu} - i\delta_\beta^\mu \eta_{\alpha\nu}$, предоставляет в наше распоряжение последний необходимый ингредиент для конструкции дубля Гейзенберга:

$$\mathfrak{H}(\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}) = \mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)} \rtimes \mathcal{F}(\text{ISO}(1, 3)).$$

Левое регулярное действие алгебры $\mathcal{H} = \mathcal{F}(\text{ISO}(1, 3))$ на $\mathcal{A} = \mathcal{H}^* = \mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}$ определяется по двойственности и позволяет получить обычную алгебру Вейля в качестве подалгебры. Соответствующее смеш-произведение $\rtimes$ приводит к скрестным коммутационным соотношениям

$$[M_{\mu\nu}, \Lambda_\beta^\alpha] = -\langle M_{\mu\nu}, \Lambda_\beta^\delta \rangle \Lambda_\delta^\alpha, \quad [P_\mu, x^\nu] = -i\delta_\mu^\nu, \quad (14)$$

$$[P_\nu, \Lambda_\alpha^\beta] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, x^\alpha] = -\langle M_{\mu\nu}, \Lambda_\beta^\alpha \rangle x^\beta, \quad (15)$$

которые вместе с формулами (9), (10) и

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [x^\mu, x^\nu] = 0, \quad [\Lambda_\alpha^\beta, \Lambda_\mu^\nu] = 0, \quad [\Lambda_\alpha^\beta, x^\nu] = 0 \quad (16)$$

описывают алгебру $\mathfrak{H}(\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)})$.

Можно также рассмотреть алгебру, являющуюся смеш-произведением $\mathfrak{X}^4 \rtimes \mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}$, определяемым *классическим действием* $P_\mu \triangleright x^\nu = -i\delta_\mu^\nu$, $M_{\alpha\beta} \triangleright x^\rho = i\delta_\beta^\rho x_\alpha - i\delta_\alpha^\rho x_\beta$ (ср. с работой [1]). Оказывается, что это подалгебра в дубле Гейзенберга $\mathfrak{H}(\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)})$, поскольку она порождается теми же скрестными коммутационными соотношениями между $(P_\mu, M_{\mu\nu})$ и x^μ :

$$[P_\mu, x^\nu] = -i\delta_\mu^\nu, \quad [M_{\mu\nu}, x^\rho] = i\delta_\beta^\rho x_\alpha - i\delta_\alpha^\rho x_\beta. \quad (17)$$

В частности, секторы, связанные с алгеброй Вейля (P_μ, x^ν) (фазовым пространством), в обеих конструкциях одинаковы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Интересно, что, рассматривая эквивалентный дубль Гейзенберга $\mathfrak{H}(\mathcal{F}(\text{ISO}(1,3)))$, в котором поменены роли, играемые $\mathcal{H} = \mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}$ и $\mathcal{A} = \mathcal{H}^* = \mathcal{F}(\text{ISO}(1,3))$, получаем немного другие скрестные коммутационные соотношения:

$$[M_{\mu\nu}, \Lambda_\beta^\alpha] = \langle M_{\mu\nu}, \Lambda_\beta^\delta \rangle \Lambda_\delta^\alpha, \quad [P_\mu, x^\nu] = i\Lambda_\mu^\nu, \quad [M_{\mu\nu}, x^\lambda] = 0. \quad (18)$$

Можно показать, что этот дубль Гейзенберга изоморфен введенному выше, и изоморфизм дается заменой генераторов $x^\mu \rightarrow \Lambda_\alpha^\mu x^\alpha$.

3. ДЕФОРМАЦИЯ

Модульные алгебры Хопфа и алгебры Хопфа можно деформировать, например, подходящим твистующим элементом, что приводит к некоммутативному пространству-времени в качестве ковариантного квантового пространства над деформированной группой симметрии (алгеброй Хопфа). В квантовой алгебре Хопфа имеется недеформированная структура алгебры (коммутаторы) и деформированная структура коалгебры (копроизведение и антипод). Модульная алгебра тогда снабжается твистованным звездочка-произведением, и ее можно представить деформированными (звездочка-)коммутаторами. Вся деформация зависит от формального параметра, который управляет классическим пределом. Одновременная деформация копроизведения в алгебре Хопфа и произведения в хопфовой модульной алгебре с недеформированным действием заставляет нас соответствующим образом деформировать правило Лейбница. Для рассмотренной выше алгебры Хопфа $\mathcal{H}$ можно рассмотреть твистующий два-тензор $\mathcal{F}$ (*твист Дринфельда*) как такой обратимый элемент в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, что

$$\mathcal{F} = f^\alpha \otimes f_\alpha \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, \quad \mathcal{F}^{-1} = \bar{f}^\alpha \otimes \bar{f}_\alpha \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}. \quad (19)$$

В результате деформации квантованная алгебра Хопфа $\mathcal{H}^\mathcal{F}$ имеет недеформированную структуру алгебры (коммутаторы), тогда как копроизведения и антиподы претерпевают деформацию:

$$\Delta^\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}\Delta(\cdot)\mathcal{F}^{-1}, \quad S^\mathcal{F}(\cdot) = uS(\cdot)u^{-1}, \quad (20)$$

где $u = f^\alpha S(f_\alpha)$. $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию 2-коцикла и условиям нормировки [6], [7]

$$\mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes \text{id})\mathcal{F} = \mathcal{F}_{23}(\text{id} \otimes \Delta)\mathcal{F}, \quad (\epsilon \otimes \text{id})\mathcal{F} = 1 = (\text{id} \otimes \epsilon)\mathcal{F}, \quad (21)$$

которые гарантируют коассоциативность деформированного копроизведения $\Delta^{\mathcal{F}}$ и ассоциативность соответствующего твистованного звездочка-произведения в твистованной модульной алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$:

$$f \star g = m \circ \mathcal{F}^{-1} \triangleright (f \otimes g) = (\bar{f}^{\alpha} \triangleright f) \cdot (\bar{f}_{\alpha} \triangleright g), \quad (22)$$

где $f, g \in \mathcal{A}$, при сохранении хопфова действия $\triangleright$ неизменным. $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ сохраняется для хопфова модуля над $\mathcal{H}^{\mathcal{F}}$, поэтому мы можем рассматривать смеш-произведение (и конструкцию дубля Гейзенберга) также и в твистованном случае. В смеш-произведении $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \rtimes \mathcal{H}^{\mathcal{F}}$ выполнены деформированные скрестные коммутационные соотношения, определяемые деформированным копроизведением $\Delta^{\mathcal{F}}$. Оказывается [1], что для любого твиста Дринфелда $\mathcal{F}$ алгебра, построенная как твистованное смеш-произведение $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \rtimes \mathcal{H}^{\mathcal{F}}$, изоморфна исходной (недеформированной) алгебре $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{H}$ (см. также работу [17]).

По поводу полного доказательства мы отошлем читателя к работе [1]. Заметим, что твистованная ситуация в случае дубля Гейзенберга оказывается намного более сложной. Твистование коалгебры $\mathcal{H}$ деформирует копроизведение согласно формулам (20), что влияет на произведение в двойственной алгебре $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. С одной стороны, это новое произведение должно принять вид звездочка-произведения (22), чтобы сохранилось правило Лейбница, а с другой стороны, звездочка-произведение (22) более не двойственно деформированному копроизведению, если сохранять спаривание неизменным. Другими словами, $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ является ковариантным квантовым пространством по отношению к $\mathcal{H}^{\mathcal{F}}$, но оно не может быть двойственной алгеброй Хопфа с тем же спариванием. Мы отложим более подробное исследование этой проблемы до следующего раза. Здесь же мы сосредоточимся на некоторых примерах, доставляемых квантовыми хопфовыми алгебрами Пуанкаре. Проиллюстрируем случай нестандартного θ -твистованного дубля Гейзенберга для алгебры Пуанкаре. Однако позднее мы также покажем, что это работает и в стандартной κ -деформации дубля Гейзенберга.

3.1. θ -твистованная симметрия Пуанкаре. Как уже упоминалось, недеформированная алгебра Пуанкаре $\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}$ содержит генераторы $\{P_{\mu}, M_{\alpha\beta}\}$, а также составляет алгебру Хопфа, определяемую формулами (11), (12). В рамках твистовой деформации можно деформировать ее к новой алгебре Хопфа. В качестве простейшего примера рассмотрим так называемый θ -твист:

$$\mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)} \otimes \mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}: \mathcal{F} = \exp\left(-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}P_{\mu} \otimes P_{\nu}\right).$$

После твистования структура алгебры Хопфа становится твистованной алгеброй Пуанкаре:

$$\Delta_{\theta}(P_{\mu}) = \Delta_0(P_{\mu}), \quad \Delta_{\theta}(M_{\mu\nu}) = \Delta_0(M_{\mu\nu}) - (P\theta)_{\mu} \wedge P_{\nu} + (P\theta)_{\nu} \wedge P_{\mu}, \quad (23)$$

где $(P\theta)_{\mu} = P_{\rho}\theta^{\rho\lambda}\eta_{\lambda\mu}$. Модульную алгебру $\mathcal{F}(\text{ISO}(1,3))$ также можно деформировать в соответствии с работой [22], посредством чего вводится новое умножение $(*_\theta)$ между ее элементами:

$$\mathcal{F}_{\theta}(\text{ISO}(1,3)) = \{[x^{\mu}, x^{\nu}]_{\theta} = i\theta^{\mu\nu} - i\theta^{\rho\sigma}\Lambda_{\rho}^{\mu}\Lambda_{\sigma}^{\nu}; [\Lambda_{\alpha}^{\beta}, \Lambda_{\mu}^{\nu}]_{\theta} = 0, \Lambda^T\eta\Lambda = \eta\}.$$

Структура коалгебры в $\mathcal{F}_\theta(\text{ISO}(1, 3))$ не меняется при θ -твисте, поскольку умножение в $\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}$ остается недеформированным. Поэтому формулы (13) по-прежнему выполняются.

В θ -твистованном дубле Гейзенберга $\mathfrak{H}(\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}^\theta)$ имеются деформированные скрестные коммутационные соотношения

$$[M_{\alpha\beta}, \Lambda_\nu^\mu] = -\langle M_{\alpha\beta}, \Lambda_\rho^\mu \rangle \Lambda_\nu^\rho, \quad [\Lambda_\alpha^\beta, P_\nu] = 0, \quad [P_\mu, x^\nu] = -i\delta_\mu^\nu, \quad (24)$$

$$[M_{\mu\nu}, x^\lambda] = -\langle M_{\mu\nu}, \Lambda_\rho^\lambda \rangle x^\rho + \frac{i}{2} [\theta_\mu^\lambda P_\nu - \theta_\nu^\lambda P_\mu - \delta_\nu^\lambda (P\theta)_\mu + \delta_\mu^\lambda (P\theta)_\nu], \quad (25)$$

к которым добавляются соотношения (9), (10) и

$$[x^\mu, x^\nu]_\theta = i\theta^{\mu\nu} - i\theta^{\rho\sigma} \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu, \quad [P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [\Lambda_\alpha^\beta, \Lambda_\mu^\nu] = 0. \quad (26)$$

Как и в предыдущем случае, алгебра, определяемая смеш-произведением $\mathfrak{X}_\theta^4 \rtimes \mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}^\theta$, задаваемым классическим действием, является подалгеброй в построенном дубле Гейзенберга $\mathfrak{H}(\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}^\theta)$. В ней выполнены скрестные коммутационные соотношения

$$[P_\mu, x^\nu] = -i\delta_\mu^\nu, \quad [M_{\mu\nu}, x^\lambda] = M_{\mu\nu} \triangleright x^\lambda + \frac{i}{2} [\theta_\mu^\lambda P_\nu - \theta_\nu^\lambda P_\mu - \delta_\nu^\lambda (P\theta)_\mu + \delta_\mu^\lambda (P\theta)_\nu]. \quad (27)$$

Однако

$$\mathfrak{X}^4 \rtimes \mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)} \cong \mathfrak{X}_\theta^4 \rtimes \mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}^\theta,$$

где изоморфизм задается заменой генераторов $x^\mu \rightarrow (\bar{f}^\alpha \triangleright x^\mu) \cdot \bar{f}_\alpha = x^\mu + (i/2)\theta^{\mu\nu} P_\nu$. Тем не менее наличие изоморфизма между деформированным $\mathfrak{H}(\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}^\theta)$ и недеформированным $\mathfrak{H}(\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)})$ дублями Гейзенберга остается открытым вопросом ввиду упомянутых выше проблем.

3.2. κ -Деформированная симметрия Пуанкаре. В деформированном случае κ -алгебра Пуанкаре $\mathcal{U}_{\text{iso}(1,3)}^{\text{DJ}}$ задается соотношениями (9), (10) с абелевым трансляционным сектором $[P_\mu, P_\nu] = 0$, как и в недеформированном случае, но структура коалгебры более не примитивна:

$$\begin{aligned} \Delta_\kappa(M_i) &= \Delta_0(M_i) = M_i \otimes 1 + 1 \otimes M_i, \\ \Delta_\kappa(N_i) &= N_i \otimes 1 + \Pi_0^{-1} \otimes N_i - \frac{1}{\kappa} \epsilon_{ijm} P_j \Pi_0^{-1} \otimes M_m, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\kappa(P_i) &= P_i \otimes \Pi_0 + 1 \otimes P_i, \\ \Delta_\kappa(P_0) &= P_0 \otimes \Pi_0 + \Pi_0^{-1} \otimes P_0 + \frac{1}{\kappa} P_m \Pi_0^{-1} \otimes P^m. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь введены обозначения $M_{0i} = iN_i$, $M_{ij} = \epsilon_{ijk} M_k$, $\Pi_0 = (P_0/\kappa + \sqrt{1 - P_\mu P^\mu/\kappa^2})$. Ввиду конструкции дубля Гейзенберга для κ -алгебры Пуанкаре [2] нас интересует $\mathfrak{H}(\mathcal{F}_\kappa(\text{ISO}(1, 3)))$. В алгебре $\mathcal{F}_\kappa(\text{ISO}(1, 3))$, двойственной к κ -алгебре Пуанкаре, деформировано только умножение $(*_\kappa)$, а структура коалгебры остается неизменной. Это новое (деформированное) умножение приводит к κ -алгебре пространства-времени Минковского $\mathcal{U}_h(\mathfrak{an}^3)$ с коммутационными соотношениями между координатами

$$[x^\mu, x^\nu]_\kappa = \frac{i}{\kappa} (\delta_0^\mu x^\nu - \delta_0^\nu x^\mu) \quad (30)$$

и к $\mathcal{F}^\kappa(\mathrm{SO}(1, 3))$, где $[\Lambda_\alpha^\beta, \Lambda_\mu^\nu]_\kappa = 0$. Оба они дают вклад в $\mathcal{F}^\kappa(\mathrm{ISO}(1, 3)) = \mathcal{U}_h(\mathfrak{an}^3) \rtimes \mathcal{F}^\kappa(\mathrm{SO}(1, 3))$ со скрестными соотношениями

$$[\Lambda_\nu^\mu, x^\rho] = -\frac{i}{\kappa}((\Lambda_0^\mu - \delta_0^\mu)\Lambda_\nu^\rho + (\Lambda_\nu^0 - \delta_\nu^0)\eta^{\mu\rho}). \quad (31)$$

Дубль Гейзенберга κ -алгебры Пуанкаре $\mathcal{U}_{\mathrm{io}(1,3)}^{\mathrm{DJ}}$ с двойственной $\mathcal{F}_\kappa(\mathrm{ISO}(1, 3))$ содержит, кроме указанных выше, еще и следующие скрестные соотношения:

$$[M_{ik}, x^\lambda] = -\langle M_{ik}, \Lambda_\rho^\lambda \rangle x^\rho, \quad [M_{0i}, x^\lambda] = -\left\langle M_{0i} + \frac{1}{\kappa} M_{ij} P_j, \Lambda_\rho^\lambda \right\rangle \Pi_0^{-1} x^\rho, \quad (32)$$

$$[M_{ik}, \Lambda_\beta^\alpha] = -\langle M_{ik}, \Lambda_\beta^\rho \rangle \Lambda_\rho^\alpha, \quad [M_{0i}, \Lambda_\beta^\alpha] = -\left\langle M_{0i} + \frac{1}{\kappa} M_{ij} P_j, \Lambda_\beta^\rho \right\rangle \Pi_0^{-1} \Lambda_\rho^\alpha, \quad (33)$$

$$[P_0, x^k] = -\frac{i}{\kappa} P_k \Pi_0^{-1}, \quad [P_k, x_0] = -\frac{i}{\kappa} P_k, \quad (34)$$

$$[P_k, x^j] = -i\delta_k^j, \quad [P_0, x_0] = -\frac{i}{\kappa} P_0 - i\Pi_0^{-1}. \quad (35)$$

Можно заметить, что приведенный набор соотношений отличается от скрестных коммутационных соотношений в алгебре $\mathcal{U}_h(\mathfrak{an}^3) \rtimes \mathcal{U}_{\mathrm{io}(1,3)}^{\mathrm{DJ}}$, которая изучалась в работе [1] и называется деформированной релятивистской алгеброй. Исследование возможного изоморфизма между деформированным и недеформированным дублями Гейзенберга

$$\mathfrak{H}(\mathcal{F}(\mathrm{ISO}(1, 3))) \cong \mathfrak{H}(\mathcal{F}_\kappa(\mathrm{ISO}(1, 3)))$$

также откладывается до следующих исследований.

Благодарности. Работа поддержана со стороны MNiSW (грант № NN202 318534). А. Борович благодарит организаторов III Международной конференции “Модели квантовой теории поля”, посвященной 70-летию А. Н. Васильева, за гостеприимство, творческую атмосферу и многочисленные обсуждения.

Список литературы

- [1] A. Borowiec, A. Pachoł, *SIGMA*, **6** (2010), 086, 31 pp., arXiv: 1005.4429.
- [2] J. Lukierski, A. Nowicki, “Heisenberg double description of kappa-Poincaré algebra and kappa-deformed phase space”, *Proceeding of the XXI International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, Group 24: Physical and mathematical aspects of symmetries (Goslar, Germany, July 15–20, 1996), eds. V. K. Dobrev, H. D. Doebner, Heron Press, Sofia, 1997, 186–192, arXiv: q-alg/9702003; G. Amelino-Camelia, J. Lukierski, A. Nowicki, *Phys. Atomic Nuclei*, **61**:11 (1998), 1811–1815, arXiv: hep-th/9706031; P. Kosinski, P. Maslanka, *The duality between κ -Poincaré algebra and κ -Poincaré group*, arXiv: hep-th/9411033; S. Giller, C. Gonera, P. Kosiński, P. Maślanka, *Acta Phys. Pol. B*, **27**:9 (1996), 2171–2177; P. Zaug, *J. Phys. A*, **28**:9 (1995), 2589–2604, arXiv: hep-th/9409100.
- [3] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, *Phys. Lett. B*, **331**:1–2 (1994), 39–44; *Commun. Math. Phys.*, **172**:1 (1995), 187–220, arXiv: hep-th/0303037.
- [4] P. Aschieri, C. Blohmann, M. Dimitrijević, F. Meyer, P. Schupp, J. Wess, *Classical Quantum Gravity*, **22**:17 (2005), 3511–3532, arXiv: hep-th/0504183.
- [5] P. Aschieri, M. Dimitrijević, F. Meyer, *Classical Quantum Gravity*, **23**:6 (2006), 1883–1911, arXiv: hep-th/0510059.

- [6] V. Drinfeld, “Quantum groups”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berkeley, California, USA, August 3–11, 1986), AMS, Providence, RI, 1987, 798–820; В. Г. Дринфельд, *Докл. АН СССР*, **283**:5 (1985), 1060–1064.
- [7] V. Chari, A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [8] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, **155**, Springer, New York, 1995.
- [9] C. Blohmann, *J. Math. Phys.*, **44**:10 (2003), 4736–4755, arXiv:math.QA/0209180; “Realization of q deformed space-time as star product by a Drinfeld twist”, *Proceedings of the 24th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics.*, Group 24: Physical and mathematical aspects of symmetries (Paris, France, July 15–20, 2002), IOP Conference Series, **173**, eds. J. P. Gazeau, R. Kerner, J. P. Antoine, S. Metens, J. Y. Thibon, IOP, Bristol, UK, 2003, 443–446, arXiv:math.QA/0402199; N. Aizawa, R. Chakrabarti, *J. Math. Phys.*, **45**:4 (2004), 1623–1638, arXiv:math/0311161.
- [10] S. Zakrzewski, *J. Phys. A*, **27**:6 (1994), 2075–2082.
- [11] S. Majid, H. Ruegg, *Phys. Lett. B*, **334**:3–4 (1994), 348–354, arXiv:hep-th/9405107.
- [12] J. Lukierski, A. Nowicki, H. Ruegg, V. N. Tolstoy, *Phys. Lett. B*, **264**:3–4 (1991), 331–338; J. Lukierski, H. Ruegg, *Phys. Lett. B*, **329**:2–3 (1994), 189–194, arXiv:hep-th/9310117.
- [13] J. Lukierski, H. Ruegg, W. J. Zakrzewski, *Ann. Physics*, **243**:1 (1995), 90–116, arXiv:hep-th/9312153.
- [14] A. Klimyk, K. Schmudgen, *Quantum Groups and Their Representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer, Berlin, 1997.
- [15] R. J. Blattner, M. Cohen, S. Montgomery, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **298** (1986), 671–711; R. J. Blattner, S. Montgomery, *Pacific J. Math.*, **137**:1 (1989), 37–54; Y. Doi, M. Takeuchi, *Commun. Algebra*, **14**:5 (1986), 801–817; Y. Doi, *Commun. Algebra*, **17**:12 (1989), 3053–3085; M. Cohen, D. Fischman, S. Montgomery, *J. Algebra*, **133**:2 (1990), 351–372; A. Borowiec, W. Marcinek, *J. Math. Phys.*, **41**:10 (2000), 6959–6975, arXiv:math-ph/0007031.
- [16] S. Majid, “Cross product quantisation, nonabelian cohomology and twisting of Hopf algebras”, *Generalized Symmetries in Physics* (Clausthal, 1993), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994, 13–41, arXiv:hep-th/9311184.
- [17] P. Kulish, A. Mudrov, *Lett. Math. Phys.*, **95**:3 (2011), 233–247, arXiv:1011.4758.
- [18] J.-H. Lu, *Duke Math. J.*, **74**:3 (1994), 763–776; R. M. Kashaev, *Алгебра и анализ*, **8**:4 (1996), 63–74, arXiv:q-alg/9503005; Z. Skoda, *Heisenberg double versus deformed derivatives*, arXiv:0909.3769.
- [19] M. Chaichian, P. P. Kulish, K. Nishijima, A. Tureanu, *Phys. Lett. B*, **604**:1–2 (2004), 98–102, arXiv:hep-th/0408069.
- [20] M. Chaichian, P. Prešnajder, A. Tureanu, *Phys. Rev. Lett.*, **94**:15 (2005), 151602, 4 pp., arXiv:hep-th/0409096.
- [21] A. Borowiec, A. Pachol, *J. Phys. A*, **43**:4 (2010), 045203, 10 pp., arXiv:0903.5251.
- [22] P. Podles, S. L. Woronowicz, *Commun. Math. Phys.*, **178**:1 (1996), 61–82, arXiv:hep-th/9412059.