Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Андрианов, М. А. Курков, Черные дыры в мире
бран: некоторые точные решения, *ТМФ*, 2011, том 169,
номер 2, 307–322

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6731>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:57:39

© 2011 г.

А. А. Андрианов*, М. А. Курков*

ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ В МИРЕ БРАН: НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Дан краткий обзор методов и результатов построения многомерных решений с горизонтом событий, порождаемых материей, локализованной на бране. Исследуется частное точное решение типа черной звезды с геометрией Шварцшильда–Тангерлини в балке. Изучен тензор внешней кривизны, который согласно условиям Израэля диктует распределение материи на бране. Вычислены все компоненты четырехмерного тензора Римана, описывающего внутреннюю геометрию поверхности браны, а также исследованы их асимптотики на больших расстояниях от центра, пределы на горизонте и асимптотики в окрестности сингулярности пятимерной черной дыры в случае, когда брана ее пересекает.

Ключевые слова: многомерные пространства, мир бран, черные дыры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Возможности обнаружения пространственных измерений, дополнительных к нашим трем, активно обсуждаются последние годы в связи с теоретическими идеями о том, что гравитация становится значительно сильнее в дополнительных измерениях [1] и ее проявления могут быть зарегистрированы при высоких энергиях на коллайдерах. Чтобы не войти в противоречие с экспериментальными ограничениями на масштабы дополнительных измерений, приходится предположить, что материя и излучение локализованы в нашем пространстве и, следовательно, наш мир расположен на бране [2], [3]. В этом сценарии дополнительные измерения обнаруживают себя существенно в гравитационных эффектах. В частности, если масштаб Планка в пространстве дополнительных измерений меньше характерных энергий коллайдера, то теоретически становится вероятным образование микроскопических черных дыр [4] и других объектов с горизонтом событий [5].

Математически корректное описание процесса рождения черной дыры в процессах столкновений при сверхвысоких энергиях все еще отсутствует ввиду его чрезвычайной сложности. Одной из главных сложностей этого описания [4], [6] является характеристика геометрии процесса рождения многомерной черной дыры в ситуации, когда материя (частицы и ядра) сосредоточена в нашем трехмерном мире – на

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: andrianov@bo.infn.it, katok86@mail.ru

бране. В настоящей работе мы предлагаем возможное решение этой проблемы, в котором материя распределена на бране, а в объемлющем пространстве существует лишь гравитация многомерной черной дыры с горизонтом событий, пересекающим наш мир.

Существуют два основных подхода к проблеме построения решений с горизонтом событий, порожденных материей на бране [6], [7]. Один опирается на точные решения в объемлющем пространстве вне браны и его проекцию на брану, согласованную с заданной на ней материей (условия согласования Израэля [8]). Однако само присутствие браны нарушает максимальную симметрию решений и их нахождение становится весьма трудным. Другой подход использует проекцию многомерного уравнения Эйнштейна на брану (уравнение Широидзу–Маэда–Сасаки (ШМС) [9]) и последующее продолжение его решения в объемлющее пространство (в современной терминологии *балк*, см., например, [10]). Поскольку в уравнение ШМС входит проекция многомерного конформного тензора Вейля, зависящая от метрики вне браны, то продолжение его решений в балк неоднозначно и, более того, отсутствие материи в балке ничем не гарантировано. В обоих случаях распределение материи на бране связано со скачком ее внешней кривизны (ее определение см. в [11]).

Поясним детали этих подходов. Ограничимся рассмотрением одного дополнительного измерения. В этом случае в гауссовой нормальной системе координат дополнительное измерение z может быть обустроено в окрестности браны в направлении, ортогональном ей. Выберем координаты на бране $\{x_\mu\}$ и локализуем ее, для определенности, при $z = 0$.

Уравнения Эйнштейна в пятимерном пространстве, содержащем брану, имеют вид

$${}^{(5)}G_{AB} = \kappa_5 T_{AB}, \quad (1)$$

где тензор энергии-импульса в пятимерной формулировке определяется распределением материи на бране с четырехмерным тензором энергии-импульса $\tau_{\mu\nu}(x)$:

$$T_{AB} = \Lambda g_{AB} + \delta_A^\mu \delta_B^\nu \tau_{\mu\nu}(x) \delta(z). \quad (2)$$

В настоящей работе мы рассматриваем асимптотически плоский балк, для которого космологическая постоянная $\Lambda = 0$. Кроме того, нас интересуют решения с замкнутым горизонтом событий, поддерживающие пространство Минковского на больших расстояниях. Они порождаются тензором энергии-импульса, убывающим на расстояниях, значительно больших размера горизонта.

Условия согласования Израэля [8] геометрии балка и распределения материи на бране принимают вид

$$[g_{\mu\nu}K - K_{\mu\nu}]_{z=0}^{z=+0} = \kappa_5 \tau_{\mu\nu}, \quad (3)$$

где $\kappa_5 = 1/M_*^3$, M_* – пятимерный масштаб Планка, $g_{\mu\nu}(x)$ обозначает индуцированную метрику на бране в точке $z = 0$, $K_{\mu\nu}$ – тензор внешней кривизны поверхности браны, $K \equiv K_\mu^\mu$. Если в гауссовой нормальной системе координат геометрия балка симметрична относительно браны (геометрия орбифлекса), то скачок тензора внешней кривизны однозначно связан с ее односторонним пределом, $[K_{\mu\nu}]_{-0}^{+0} = 2K_{\mu\nu}|^{+0}$.

В пространстве орбифлекса можно вывести четырехмерную модификацию уравнений Эйнштейна для метрики на бране, которая использует тензор внешней кривизны и его производные. Новые уравнения ШМС являются редукцией пятимерных

уравнений Эйнштейна [9],

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} = \kappa_5^2 \Sigma_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \equiv \kappa_4 S_{\mu\nu}, \quad \kappa_4 \equiv \frac{1}{M_{Pl}^2}. \quad (4)$$

Здесь эффективный тензор энергии-импульса на бране $S_{\mu\nu}$ квадратичен по исходному тензору $\tau_{\mu\nu}$ при отсутствии космологических постоянных в балке и на бране:

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{24} (-2\tau\tau_{\mu\nu} + 6\tau_\mu^\sigma \tau_{\sigma\nu} + g_{\mu\nu} (-3\tau^{\sigma\rho} \tau_{\sigma\rho} + \tau^2)), \quad (5)$$

где $\tau \equiv \tau_\mu^\mu$. Производные тензора внешней кривизны не определяются по распределению материи на бране и группируются в проекцию конформного тензора Вейля,

$$E_{\mu\nu} = {}^{(5)}C_{\mu 5 \nu}^5, \quad E_\mu^\mu = 0. \quad (6)$$

Этот тензор описывает поток гравитационной энергии из балка и в балк.

Таким образом, в первом подходе [7] (иногда называемом “displace-cut-reflect”¹⁾) используется пятимерное решение уравнений Эйнштейна (1) в вакууме, например типа Шварцшильда–Тангерлини [5], [13], которое описывает геометрию балка. Затем в пятимерном пространстве проводится гиперповерхность (для статических решений (3+1)-мерная). Для реализации браны часть пространства по одну сторону от гиперповерхности удаляется. Далее осуществляется отражение относительно нормали к гиперповерхности, которое создает вторую половину балка. При этом гиперповерхность становится браной, заполненной материей, т.е. мы имеем звезду, и распределение материи связано с формой гиперповерхности через условия согласования Израэля [8]. Тем самым сама форма гиперповерхности однозначно находится по форме тензора энергии-импульса (например, по заданному уравнению состояния). К достоинствам этого подхода стоит отнести то, что построенное таким образом решение является точным как на бране, так и в балке. Тем не менее до сих пор не удалось найти этим способом решения, которое воспроизводит (3+1)-мерный закон Ньютона на бране.

В рамках этого подхода был исследован [14] случай балка с геометрией Шварцшильда–анти-де Ситтера и тензором энергии-импульса $\tau_{\mu\nu}$ идеальной жидкости, удовлетворяющим энергетическим условиям. Было доказано, что при таких условиях всякая гиперповерхность, используемая при построении решения, не пересекает горизонта событий исходного объекта, а может лишь касаться его. Таким образом, горизонт событий не образуется на бране.

Во втором подходе [10], вместо нахождения точного пятимерного решения, находится точное решение уравнения ШМС (4) с выбранной моделью для тензора $E_{\mu\nu}$, а затем делается “лифтинг” в пятое измерение, т.е. восстанавливается (приближенно, в виде ряда) такое пятимерное решение, которое соответствовало бы метрике, построенной на бране. В этом подходе нельзя гарантировать отсутствие материи в балке: могут быть и черные струны. Более того, в этом подходе нельзя определить с достаточной точностью, как устроен горизонт, поскольку решение известно лишь в виде ряда. Следовательно, нельзя сделать определенных выводов и о термодинамике такого объекта.

¹⁾ Отметим, что метод “displace-cut-reflect” впервые был введен в астрофизике [12] для моделирования спиральных галактик.

Преимуществом данного подхода является полный контроль ситуации на бране, т. е. того, что регистрирует наблюдатель, живущий на бране. Кроме того, удастся обеспечить поведение гравитационного потенциала $\sim 1/r$, воспроизводя тем самым закон Ньютона на больших расстояниях.

Мы будем следовать первому подходу, опираясь на известные точные решения пятимерных уравнений Эйнштейна. Отметим, что исходные точные решения соответствуют материи, сосредоточенной на множестве меры нуль, например черные дыры типа Шварцшильда–Тангерлини, т. е. распределение массы имеет дельта-образную особенность. Однако на ускорителях черные объекты могут рождаться лишь в результате эволюции высокоэнергетических распределений кварков и глюонов на бране [15], которые, разумеется, являются гладкими. Таким образом, необходимо преобразовать вакуумные точные решения уравнений Эйнштейна в решения, описывающие на бране объекты с гладким распределением материи, расположенной как вне, так и внутри горизонта (черные дыры [16]). С точки зрения наружного наблюдателя их коллапс будет происходить бесконечно долго, поэтому имеет смысл рассматривать его квазистатически.

Наконец, в случае, если размер образовавшегося объекта много меньше характерного размера дополнительного измерения, можно с хорошей точностью считать дополнительное измерение бесконечным.

Итак, в настоящей работе мы изучаем следующую задачу: для заданной массы пятимерного объекта требуется построить точные асимптотически плоские решения, соответствующие статической черной звезде, порожденной материей, распределенной на бране достаточно гладко, т. е. без дельта-образных особенностей.

В разделе 2 сформулированы элементы нашей конструкции, опирающиеся на геометрию орбифлекса. В разделе 3 построена подходящая система координат, с помощью которой найдено частное точное решение типа черной звезды с геометрией Шварцшильда–Тангерлини в балке. В разделе 4 исследованы асимптотики замены координат на бране в окрестности сингулярности для случая браны, пересекающей сингулярность исходной черной дыры. В разделе 5 получены интегральные представления для компонент матрицы Якоби перехода от шварцшильдовых координат к гауссовым, которые можно выразить через эллиптические и элементарные функции. Оказывается, что все компоненты четырехмерного тензора Римана, описывающего внутреннюю геометрию поверхности постоянного y , выражаются через указанные выше производные, и удастся найти асимптотики компонент тензора Римана в окрестности сингулярности, которые приведены в приложении. В разделе 6 изучен тензор внешней кривизны, который согласно условиям Израэля диктует распределение материи на бране. В разделе 7 сформулированы результаты построения нашей конструкции и обсуждается ее возможная физическая интерпретация. Настоящая работа является существенным дополнением к ранее опубликованной [16].

2. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ТИПА ЧЕРНОЙ ЗВЕЗДЫ

Для того чтобы построить решение типа черной звезды на бране, рассмотрим такую метрику $g_{AB}(x, y)$, которая является вакуумным решением пятимерных уравнений Эйнштейна (тензор Эйнштейна $G_{\mu\nu} = 0$ везде, за исключением множества меры нуль), и, кроме того, она имеет горизонт событий и удовлетворяет приведенным

ниже предположениям. Выберем гиперповерхность, параметризованную координатами x_μ , так, чтобы координата y была постоянна вдоль этой гиперповерхности. Индексы $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Сделаем следующие предположения.

1. Индуцированная метрика $g_{\mu\nu}(x, y)$ является асимптотически плоской для всякой гиперповерхности $y = \text{const}$ и наследует горизонт.

2. Вектор нормали, ортогональный гиперповерхности, является пространственноподобным в каждой точке гиперповерхности $y = \text{const}$ (как вне, так и внутри горизонта).

3. В выбранной системе координат $g_{5B} = 0$ и оставшиеся компоненты метрики удовлетворяют симметрии орбифолда $g_{AB}(x, y) = g_{AB}(x, -y)$. Следовательно, обе метрики $g_{AB}(x, y)$ и $g_{AB}(x, -y)$ совместны с уравнениями Эйнштейна.

Для того чтобы на одной из этих гиперповерхностей построить брану, заполненную материей, мы вырежем часть пространства, сохраняя геометрию орбифолда:

$$g_{AB}(x, y) \implies g_{AB}(x, |z| + a), \quad (7)$$

где a – произвольная вещественная постоянная, а новая координата z меняется в пределах $-\infty < z < \infty$, т. е. брана построена при $z = 0$. В этом подходе метрика $g_{AB}(x, z, a)$ остается вакуумным решением пятимерных уравнений Эйнштейна (1) в балке ($z \neq 0$).

В нашем случае индуцированная метрика на бране $z = 0$ есть $g_{\mu\nu}(x, a)$, в то время как распределение материи на бране индуцируется условиями согласования Израэля (3).

Применением описанную выше схему для нахождения частного точного решения.

3. ВЫБОР ПОДХОДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Для приготовления подходящей системы координат начинаем с метрики, описывающей пятимерную статическую нейтральную черную дыру в шварцшильдовых координатах $\{t, r, \theta_1, \theta_2, \theta\}$:

$$g_{AB} = -\text{diag}\left[-U(r), \frac{1}{U(r)}, R^2, R^2 \cos^2 \theta_1, r^2\right], \quad (8)$$

где $U(r) = 1 - M/r^2$, величина M связана с радиусом Шварцшильда-Тангерлини как $M \equiv r_{\text{Sch-T}}^2$ и обозначение $R = r \cos \theta$ введено для краткости. Эти координаты имеют следующие интервалы изменения: $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$, $-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2$, $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Введем гауссовы нормальные координаты по отношению к гиперповерхности $\theta = 0$. Нормированный вектор нормали имеет вид $n^A = [0, 0, 0, 0, 1/r]$, и поэтому нужное преобразование координат затрагивает лишь две координаты $r = r(\rho, y)$, $\theta = \theta(\rho, y)$. Эти функции находятся из решения уравнений на геодезические

$$\frac{d^2 r}{dy^2} + \frac{M}{r(-r^2 + M)} \left(\frac{dr}{dy}\right)^2 + \frac{(-r^2 + M)}{r} \left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2 = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dy} \frac{d\theta}{dy} = 0 \quad (10)$$

с начальными условиями

$$r(0) = \rho, \quad \left. \frac{dr}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \left. \frac{d\theta}{dy} \right|_{y=0} = \frac{1}{r}. \quad (11)$$

Из уравнения (10) и начальных условий (11) следует, что

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{\rho}{r^2}, \quad \theta = \rho \int_0^y (r(x, \rho))^{-2} dx. \quad (12)$$

Подставив (12) в (9), получим уравнение, которое вместе с начальными условиями (11) определяет зависимость $r(\rho, y)$:

$$\frac{d^2 r}{dy^2} + \frac{M}{r(-r^2 + M)} \left(\frac{dr}{dy} \right)^2 + \frac{\rho^2(-r^2 + M)}{r^5} = 0. \quad (13)$$

Из уравнения (13) с начальными условиями (11), воспользовавшись (12), получим решение системы уравнений (9), (10) в интегральной форме:

$$y = \pm \int_{\rho}^r \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - M)(x^2 - \rho^2)}} dx, \quad \theta = \pm \rho \int_{\rho}^r \frac{1}{\sqrt{(x^2 - M)(x^2 - \rho^2)}} dx. \quad (14)$$

Равенства (14) (при фиксированном знаке) неявно определяют зависимость $r(\rho, y)$. Поскольку y должно быть вещественным, из формулы (14) видно, что при $r < \sqrt{M}$ (в дальнейшем будем называть такую ситуацию *внутри горизонта*) имеет место неравенство $r < \rho < \sqrt{M}$. Если же $r > \sqrt{M}$ (далее *вне горизонта*), то выполнено неравенство $\sqrt{M} < \rho < r$.

Заметим, что интегралы в (14) положительны вне горизонта и отрицательны внутри горизонта. Поэтому при заданном y знак в этих формулах следует выбирать такой же, как знак y вне горизонта и противоположный знаку внутри горизонта. Ниже в разделе 5 мы исследуем ситуацию на горизонте и покажем, что при таком выборе знаков компоненты матрицы Якоби перехода к гауссовым нормальным координатам непрерывны на горизонте.

Окончательно наша замена выглядит так:

$$|y| = \int_{\rho}^r \frac{\text{sign}(r - \rho) x^2}{\sqrt{(x^2 - M)(x^2 - \rho^2)}} dx, \quad \theta = \int_{\rho}^r \frac{\text{sign}((r - \rho)y)}{\sqrt{(x^2 - M)(x^2 - \rho^2)}} dx, \quad (15)$$

где внутри горизонта $r < \rho < \sqrt{M}$ и вне горизонта $\sqrt{M} < \rho < r$.

Интегралы в (15) могут быть переписаны в терминах стандартных эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода [17]. Мы воспользуемся обозначениями

$$K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx, \quad F(z, k) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx$$

для полного и неполного эллиптических интегралов 1-го рода и обозначениями

$$E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad E(z, k) = \int_0^z \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

для полного и неполного эллиптических интегралов 2-го рода. Они удобны для построения асимптотик функций $r(\rho, y)$ и $\theta(\rho, y)$ в окрестности сингулярности $r = 0$ (см. раздел 4). В частности, внутри горизонта

$$\begin{aligned} |y| &= \sqrt{M} \left[K\left(\frac{\rho}{\sqrt{M}}\right) - F\left(\frac{r}{\rho}, \frac{\rho}{\sqrt{M}}\right) - E\left(\frac{\rho}{\sqrt{M}}\right) + E\left(\frac{r}{\rho}, \frac{\rho}{\sqrt{M}}\right) \right], \\ \theta &= \text{sign}(y) \frac{\rho}{\sqrt{M}} \left[K\left(\frac{\rho}{\sqrt{M}}\right) - F\left(\frac{r}{\rho}, \frac{\rho}{\sqrt{M}}\right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

а вне горизонта

$$\begin{aligned} |y| &= \rho \left[K\left(\frac{\sqrt{M}}{\rho}\right) - F\left(\frac{\rho}{r}, \frac{\sqrt{M}}{\rho}\right) - E\left(\frac{\sqrt{M}}{\rho}\right) + \right. \\ &\quad \left. + E\left(\frac{\rho}{r}, \frac{\sqrt{M}}{\rho}\right) \right] + \frac{\sqrt{(r^2 - \rho^2)(r^2 - M)}}{r}, \\ \theta &= \text{sign}(y) \left[K\left(\frac{\sqrt{M}}{\rho}\right) - F\left(\frac{\rho}{r}, \frac{\sqrt{M}}{\rho}\right) \right]. \end{aligned}$$

В разделе 5 получены аналогичные интегральные представления для компонент матрицы Якоби перехода от шварцшильдовых координат к гауссовым, которые можно выразить через эллиптические и элементарные функции.

В новых координатах метрика выглядит следующим образом:

$$g_{AB} = -\text{diag} \left[-U(r), \frac{r^2 r_\rho^2}{\rho^2 U(r)}, R^2, R^2 \cos^2 \theta_1, 1 \right], \quad (17)$$

где $r = r(\rho, y)$, $\theta = \theta(\rho, y)$, $R = r \cos \theta$, $r_\rho \equiv \partial r / \partial \rho$.

Исследуем область изменения построенных координат. Рассмотрим первое равенство (16) в пределе $r = 0$ как уравнение относительно ρ :

$$|y| = \sqrt{M} \left(K\left(\frac{\rho_{\min}}{\sqrt{M}}\right) - E\left(\frac{\rho_{\min}}{\sqrt{M}}\right) \right). \quad (18)$$

При любом заданном y оно всегда имеет решение $\rho_{\min}$, лежащее в промежутке от 0 до $\sqrt{M}$. Можно убедиться, что $\rho_{\min}$ монотонно растет с ростом $|y|$.

Таким образом, при заданном $y \neq 0$ решение ρ меняется не от нуля. На первый взгляд ρ меняется от $\rho_{\min}$, однако, вообще говоря, это не так. Действительно, рассмотрим равенство (16) в пределе $r = 0$ и подставим в него $\rho = \rho_{\min}$. Можно показать, что при фиксированном y с ростом ρ переменная θ монотонно убывает (для положительных y), поэтому левую часть получившегося равенства имеет смысл называть $\theta_{\max}$ (в смысле максимума модуля),

$$\theta_{\max} \equiv \text{sign}(y) \frac{\rho_{\min}}{\sqrt{M}} K\left(\frac{\rho_{\min}}{\sqrt{M}}\right). \quad (19)$$

Между тем, исходная координата θ пробегала значения от $-\pi/2$ до $\pi/2$. При малых y угол $\theta_{\max}$ действительно попадает в этот интервал. Однако существуют такие критическое значение $y = y_c$ и соответствующее значение $\rho_{\min}(y_c) \equiv \rho_c$, что $|\theta_{\max}(y)| > \pi/2$ для $y > y_c$. Величина ρ_c , очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\rho_c}{\sqrt{M}} K\left(\frac{\rho_c}{\sqrt{M}}\right), \quad \rho_c \simeq 0.79272\sqrt{M}. \quad (20)$$

Из (18) мы немедленно получаем критическое значение

$$y_c \simeq 0.69868\sqrt{M}. \quad (21)$$

Всякая брана $y = a$ при $|a| < y_c$ пересекает начало координат $r = 0$, и поэтому тензор энергии-импульса T_{AB} , порожденный (7), наследует точечную дельта-образную сингулярность в начале координат, а ρ меняется вдоль такой поверхности от $\rho_{\min}$ до ∞ . Для $|a| > y_c$ браны пересекают $\theta = \pi/2$ и не проходят через $r = 0$. На таких бранах минимальное значение $\rho \equiv \rho_0$ больше $\rho_{\min}$. Для заданного y можно найти ρ_0 и соответствующее значение r_0 , решив следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \frac{\rho_0}{\sqrt{M}} \left[K\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{M}}\right) - F\left(\frac{r_0}{\rho_0}, \frac{\rho_0}{\sqrt{M}}\right) \right], \\ |y| &= \sqrt{M} \left[K\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{M}}\right) - F\left(\frac{r_0}{\rho_0}, \frac{\rho_0}{\sqrt{M}}\right) - E\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{M}}\right) + E\left(\frac{r_0}{\rho_0}, \frac{\rho_0}{\sqrt{M}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее мы будем в основном изучать браны, которые не пересекают сингулярность при $r = 0$, т. е. полагать $|a| > y_c$, для того чтобы избежать дельта-образных сингулярностей в распределении материи, поскольку мы предполагаем, что черные дыры на ускорителях должны порождаться гладким распределением плотности материи.

Посмотрим, как выглядит горизонт в новых координатах. Переменная ρ всегда лежит между r и $\sqrt{M}$, поэтому горизонт $r = \sqrt{M}$ соответствует $\rho = \sqrt{M}$. Из (15) при $r = \rho = \sqrt{M}$ следует, что на горизонте $\theta = y/\sqrt{M}$. Учитывая область изменения переменной θ , заключаем, что в новых переменных горизонт представляет собой часть цилиндрической поверхности радиуса $\rho = \sqrt{M}$, обрезанную по высоте в следующих пределах: $-\pi/2\sqrt{M} < y < \pi/2\sqrt{M}$.

Прежде чем изучать черные звезды, порожденные гладким распределением материи на бране, обсудим, что произойдет, если взять²⁾ $0 < a < y_c$. В этом случае часть сингулярности исходного объекта останется внутри балка и размер этой части будет определяться углом $\theta_{\max}$. Тогда $\theta_{\max} \rightarrow \pi/2$ при $a \rightarrow y_c$ и размер вырезанной части уменьшается до нуля. Можно показать, что $\rho_{\min} \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$ и никакая часть сингулярности не удаляется вообще. С помощью интеграла Комара [11] можно также показать, что суммарная масса, т. е. сумма точечной и распределенной гладко частей, не зависит от a и равняется массе исходной черной дыры. Таким образом, при $0 < a < y_c$ часть материи находится в точке, а часть распределена гладко. Исследуем подробнее, как устроена наша замена координат для случая $\rho \rightarrow \rho_{\min}$ при $0 < a < y_c$.

4. АСИМПТОТИКИ $r(\rho)$ И $\theta(\rho)$ ПРИ ФИКСИРОВАННОМ y В ОКРЕСТНОСТИ СИНГУЛЯРНОСТИ

Рассмотрим брану такую, что $y = a < y_c$. В этом случае $\rho \rightarrow \rho_{\min}$ при $r \rightarrow 0$, т. е. сингулярность исходного (пятимерного) пространства лежит на этой поверхности. Для функций $r(\rho, y)$, $\theta(\rho, y)$, заданных неявно формулами (16), можно построить явные асимптотики при $\rho \rightarrow \rho_{\min}$.

²⁾Можно показать, что необходимым и достаточным условием положительности плотности массы рассматриваемого объекта в каждой точке является условие $a > 0$.

Для нахождения интересующей нас асимптотической зависимости $r(\rho)$ поступим следующим образом. Разложим правую часть первого равенства (16) в ряд по r в окрестности нуля до первой нетривиальной степени r :

$$|y| = \sqrt{M} \left(K\left(\frac{\rho}{\sqrt{M}}\right) - E\left(\frac{\rho}{\sqrt{M}}\right) \right) - \frac{1}{3\rho\sqrt{M}} r^3 + O(r^5). \quad (23)$$

Правую часть (23) разложим теперь по степеням $(\rho - \rho_{\min})$:

$$\begin{aligned} |y| = & \sqrt{M} \left(K\left(\frac{\rho_{\min}}{\sqrt{M}}\right) - E\left(\frac{\rho_{\min}}{\sqrt{M}}\right) \right) - \frac{1}{3\rho_{\min}\sqrt{M}} r^3 + \\ & + \frac{\sqrt{M} \rho_{\min} E(\rho_{\min}/\sqrt{M})}{M - \rho_{\min}^2} (\rho - \rho_{\min}) + O(r^5) + \\ & + O(r^3(\rho - \rho_{\min})) + O((\rho - \rho_{\min})^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку $\rho_{\min}$ удовлетворяет (18), то из (24) имеем

$$\begin{aligned} 0 = & - \frac{\sqrt{M} \rho_{\min} E(\rho_{\min}/\sqrt{M})}{M - \rho_{\min}^2} (\rho - \rho_{\min}) + \frac{1}{3\rho_{\min}\sqrt{M}} r^3 + \\ & + O(r^5) + O(r^3(\rho - \rho_{\min})) + O((\rho - \rho_{\min})^2). \end{aligned} \quad (25)$$

Далее методом итераций находим требуемую асимптотику:

$$r = \sqrt[3]{3M} \sqrt[3]{\frac{\rho_{\min}^2 E(\rho_{\min}/\sqrt{M})}{M - \rho_{\min}^2}} \sqrt[3]{\rho - \rho_{\min}} + O((\rho - \rho_{\min})^{4/3}). \quad (26)$$

Отметим, что при выводе (26) предполагалось, что $y \neq 0$, поскольку в противном случае разложение (24) не имело бы места, так как $\rho_{\min} = 0$ при $y = 0$.

Получим аналогичную асимптотику для $\theta(\rho)$. Разлагая (16) в ряд по r в окрестности нуля, а затем по ρ в окрестности $\rho_{\min}$, находим

$$|\theta| = \frac{\rho_{\min}}{\sqrt{M}} K\left(\frac{\rho_{\min}}{\sqrt{M}}\right) - \frac{r}{\sqrt{M}} + O(r^3) + O(\rho - \rho_{\min}). \quad (27)$$

Подставляя (26) в (27), получаем окончательно

$$|\theta| = \frac{\rho_{\min}}{\sqrt{M}} K\left(\frac{\rho_{\min}}{\sqrt{M}}\right) - \sqrt[3]{3M} \sqrt[3]{\frac{\rho_{\min}^2 E(\rho_{\min}/\sqrt{M})}{M - \rho_{\min}^2}} \sqrt[3]{\rho - \rho_{\min}} + O(\rho - \rho_{\min}). \quad (28)$$

5. КОМПОНЕНТЫ МАТРИЦЫ ЯКОБИ И НЕКОТОРЫХ ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

В этом разделе речь пойдет о производных величин r и θ как функций ρ и y . Из (15) видно, что производная r по y имеет вид

$$r_y = \text{sign}((r - \rho)y) \frac{\sqrt{(r^2 - M)(r^2 - \rho^2)}}{r^2}. \quad (29)$$

Для производной θ по y (см. (12)) получим

$$\theta_y = \frac{\rho}{r^2}. \quad (30)$$

Для производных r_ρ и θ_ρ имеем соответственно

$$\begin{aligned} r_\rho &= \frac{\rho}{r} + \frac{\sqrt{(r^2 - M)(r^2 - \rho^2)}}{r^2} \int_\rho^r \frac{M\rho}{\sqrt{(x^2 - M)(x^2 - \rho^2)}(x^2 - M)} dx, \\ \theta_\rho &= \left(\frac{\sqrt{(r^2 - M)(r^2 - \rho^2)}}{r(r^2 - M)} - \int_\rho^r \frac{(-2\rho^2 + x^2)(-2x^2 + M)r^2 - M\rho^2 x^2}{\sqrt{(x^2 - M)(x^2 - \rho^2)}(x^2 - M)r^2 x^2} dx \right) \times \\ &\quad \times \text{sign}((r - \rho)y). \end{aligned} \quad (31)$$

Теперь мы знаем все компоненты матрицы Якоби перехода к гауссовым нормальным координатам. Поскольку внедиагональные элементы метрики в новых координатах равны нулю, то при произвольной замене $r = r(\rho, y)$, $\theta = \theta(\rho, y)$ в метрике Шварцшильда–Тангерлини компонента $g_{y\rho}$ может стать отличной от нуля. Необходимым и достаточным условием обращения ее в нуль является тождество

$$\theta_\rho \theta_y (M - r^2) = r_\rho r_y. \quad (32)$$

Нам понадобится также смешанная производная

$$\begin{aligned} r_{\rho y} &= -\text{sign}((r - \rho)y) \times \\ &\quad \times \left(\int_\rho^r \frac{M\rho(r^2 \rho^2 + Mr^2 - 2M\rho^2)}{r^5 \sqrt{(-x^2 + M)(-x^2 + \rho^2)}(-x^2 + M)} dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{(r^2 - M)(r^2 - \rho^2)}\rho(2M - r^2)}{r^4(-r^2 + M)} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Ситуация на горизонте. Рассмотрим, что получится, если на бране при фиксированном $y = a$ перейти к пределу $\rho \rightarrow \sqrt{M}$. Из формулы (15) видно, что в этом случае $r \rightarrow \sqrt{M}$. Можно показать, что существует конечный предел

$$B \equiv \lim_{\rho \rightarrow \sqrt{M}} \frac{r - \rho}{\rho - \sqrt{M}} = \frac{1}{2} \left(\text{ch} \left(\frac{2y}{\sqrt{M}} \right) - 1 \right). \quad (34)$$

Через величину B можно выразить пределы на горизонте частных производных, рассмотренных в (29)–(33). Из (29)–(31), (33), (34) можно получить, что соответствующие пределы на горизонте существуют и равны вне зависимости от того, с какой стороны от горизонта $\rho \rightarrow \sqrt{M}$. На горизонте имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \sqrt{M}} \frac{r_y}{\rho - \sqrt{M}} &= 2 \text{sign}(y) \frac{\sqrt{B(1+B)}}{\sqrt{M}}, & \theta_y &= \frac{1}{\sqrt{M}}, \\ r_\rho &= 1 + B, & \theta_\rho &= -\frac{\sqrt{B(1+B)}}{\sqrt{M}}, & r_{\rho y} &= 2 \text{sign}(y) \frac{\sqrt{B(1+B)}}{\sqrt{M}}. \end{aligned} \quad (35)$$

6. ТЕНЗОР ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИИ ДЛЯ БРАНЫ $y = a$

Поскольку метрика (17) записана в гауссовых нормальных координатах, для внешней кривизны $K_{\mu\nu}$ верно равенство

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y}. \quad (36)$$

Дифференцируя (17) по y , получаем

$$K_{\mu\nu} = \text{diag} \left\{ -\frac{r_y M}{r^3}, -\frac{r^3 r_\rho (-r^2 r_\rho r_y + 2r_\rho r_y M - r^3 r_{\rho y} + r r_{\rho y} M)}{\rho^2 (-r^2 + M)^2}, \right. \\ \left. r \cos \theta (r_y \cos \theta - r \theta_y \sin \theta), r \cos \theta \cos^2 \theta_1 (r_y \cos \theta - r \theta_y \sin \theta) \right\}. \quad (37)$$

Вычислим след $K_{\mu\nu}$. Из (17) и (37) находим

$$K = \frac{-3r_y r_\rho \cos \theta - r r_{\rho y} \cos \theta + 2r_\rho r \theta_y \sin \theta}{r_\rho r \cos \theta}. \quad (38)$$

Величина K , по-видимому, знакопостоянна, и ее знак равен знаку a . Этот факт можно точно проверить в окрестности сингулярности, на горизонте и при больших ρ . При всех остальных ρ знакопостоянство K удастся проверить численно, при фиксированных y . Приведем старшие члены указанных выше асимптотик. При больших ρ имеем

$$K = \frac{4M^2 y^3}{3\rho^8} \left(1 + O\left(\frac{y^2}{\rho^2}\right) \right). \quad (39)$$

На горизонте справедливо

$$K|_{\rho=\sqrt{M}} = \frac{-2 \text{sign}(y) \sqrt{B(B+1)} \cos(y/\sqrt{M}) + 2(B+1) \sin(y/\sqrt{M})}{\sqrt{M} (B+1) \cos(y/\sqrt{M})}. \quad (40)$$

С помощью (34) можно убедиться, что знак этого выражения совпадает со знаком y . Наконец, при $\rho \rightarrow \rho_{\min}$ верна асимптотика

$$K \simeq \text{sign}(y) \frac{\rho_{\min}}{r^2}. \quad (41)$$

Тензор энергии-импульса T_{AB} , сосредоточенный на бране в пятимерном пространстве, определяется условиями Израэля (3). Знак следа тензора энергии-импульса T_{AB} совпадает со знаком τ , а последний, в свою очередь, совпадает со знаком K , который при положительных a также положителен. Справедливость этого утверждения проверяется для асимптотик в окрестности сингулярности, на горизонте и на бесконечности из формул (39), (40) и (41). В остальных же областях это проверено лишь численно.

При положительных a величина $\tau_0^0 > 0$, что является необходимым для выполнения энергетических условий. Действительно, это следует из формулы (3) и того, что $K_0^0 < 0$ и $\tau > 0$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что методом вырезания пространства в гауссовых нормальных координатах с последующим склеиванием границ можно явно построить геометрию многомерной черной звезды с горизонтом событий, порожденной материей, гладко распределенной в нашем трехмерном пространстве – на бране.

В этом подходе для заданной полной массы профили возможных конфигураций распределения определяются единственным параметром a . Предполагается следующая физическая интерпретация этого параметра: при столкновении партонов на коллайдере образуется фajerбол, и если плотность материи достаточна для образования ловушечной поверхности [4], то часть материи окажется вне горизонта, а часть – внутри него. Далее фajerбол будет испаряться, переходить в квазиравновесную конфигурацию типа сферически-симметричной черной дыры, рассмотренной в настоящей работе, и затем коллапсировать. Процесс коллапса, по-видимому, можно рассматривать квазистатически, т. е. профиль распределения массы, определяемый параметром a , будет медленно изменяться со временем, $\dot{a} \ll 1$, в атомной системе единиц. Меньшим a соответствует более плотное распределение, а большим a – более разреженное. Таким образом, можно ожидать адиабатическую эволюцию от больших значений a к меньшим.

Для того чтобы плотность массы была положительной, параметр a также должен быть положительным [16]. Для параметра a существует критическое значение y_c такое, что при $0 < a < y_c$ получившаяся черная дыра порождена частично гладким распределением материи на бране, а частично – точечным распределением в центре. Наиболее интересна ситуация, когда $y_c < a < \sqrt{\pi}/2$. В этом случае гравитация браны целиком порождается гладким распределением материи и, кроме того, есть горизонт событий.

Рассматриваемый метод можно обобщить на случай компактного дополнительного измерения [18], [19], а также на случай линейчатой геометрии [20] в надежде получить на бране закон Ньютона на больших расстояниях. Кроме того, интересно рассмотреть случаи заряженных и вращающихся черных объектов, включая черные кольца [21].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Асимптотики геометрических характеристик поверхности браны $y = a$

Первые несколько членов разложения в ряд функции $r(\rho, y)$ выглядят следующим образом:

$$r(\rho, y) = \rho - \frac{\rho^2(M - \rho^2)}{2\rho^5}y^2 - \frac{(7M - 3\rho^2)(M - \rho^2)}{24\rho^7}y^4 + O(y^6). \quad (42)$$

Аналогичное разложение справедливо для $\theta(\rho, y)$,

$$\theta(\rho, y) = \frac{y}{\rho} + \frac{M - \rho^2}{3\rho^5}y^3 + \frac{-7\rho^2M + 4M^2 + 3\rho^4}{15\rho^9}y^5 + O(y^7). \quad (43)$$

Рассмотрим внутреннюю геометрию поверхности постоянного y . Метрика на ней дается выражением (17). Найдем компоненты тензора Римана. Для их вычисления нам потребуются выражения для $r_{\rho\rho}$ и $\theta_{\rho\rho}$. С помощью соотношения (32) все компоненты тензора Римана можно выразить через производные $r_{\rho y}$ и $\theta_{\rho y}$. Первая нам уже известна (см. (33)), а последнюю легко выразить через r_ρ . Дифференцируя по ρ формулу (30), получаем

$$\theta_{\rho y} = \frac{1}{r^2} - \frac{2\rho}{r^3} r_\rho. \quad (44)$$

Следующие шесть независимых компонент отличны от нуля:

$$\begin{aligned} R_{0101} &= -\frac{(-4r_\rho\rho + r)Mr_\rho}{r^4\rho}, \\ R_{0202} &= \frac{(-r^2 + M)\rho^2 M \cos\theta (-\theta_\rho r \sin\theta + r_\rho \cos\theta)}{r^6 r_\rho}, \\ R_{2323} &= -\cos^2\theta \cos^2\theta_1 \left(r^2 - \frac{\rho^2(r^2 - M)(\theta_\rho r \sin\theta - r_\rho \cos\theta)^2}{r^2 r_\rho^2} \right), \\ R_{1212} &= \cos\theta \left(\cos\theta \left(\frac{rr_\rho}{\rho} - r^2\theta_\rho^2 - r_\rho^2 \right) - r^2 \sin\theta \left(\frac{\theta_\rho}{\rho} + A \right) \right) - \\ &\quad - \frac{r_\rho \cos\theta(r_\rho M \cos\theta - r^3\theta_\rho \sin\theta)}{-r^2 + M}, \\ R_{0303} &= \cos^2\theta_1 R_{0202}, \quad R_{1313} = \cos^2\theta_1 R_{1212}, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$A = \frac{(r_{\rho y}\theta_y - \theta_{\rho y}r_y + 2\theta_y^2\theta_\rho r)\theta_\rho}{\theta_y r_y}.$$

Приведенные выше выражения можно выразить через эллиптические интегралы. Разлагая получившиеся выражения в ряд по степеням r в окрестности нуля, а затем используя известную асимптотику (26), можно показать, что при $|y| < y_c$ в окрестности сингулярности верны следующие асимптотики (компоненты R_{0303} и R_{1313} находим из (45)):

$$\begin{aligned} R_{0101} &\simeq \frac{4\sqrt[3]{M}(M - \rho_{\min}^2)^{2/3}\sqrt[3]{3}}{27\rho_{\min}^{4/3}(E(\rho_{\min}/\sqrt{M}))^{2/3}(\rho - \rho_{\min})^{8/3}}, \\ R_{0202} &\simeq \frac{\cos^2\theta_{\max}(M - \rho_{\min}^2)^2}{9\rho_{\min}^2(E(\rho_{\min}/\sqrt{M}))^2(\rho - \rho_{\min})^2}, \\ R_{2323} &\simeq -\frac{\sqrt[3]{M}\rho_{\min}^{2/3}\cos^4\theta_{\max}\cos^2\theta_1\sqrt[3]{3}(M - \rho_{\min}^2)^{2/3}}{3(E(\rho_{\min}/\sqrt{M}))^{2/3}(\rho - \rho_{\min})^{2/3}}, \\ R_{1212} &\simeq -\frac{2\cos^2\theta_{\max}\rho_{\min}^{4/3}M^{2/3}(E(\rho_{\min}/\sqrt{M}))^{2/3}3^{2/3}}{9(M - \rho_{\min}^2)^{2/3}(\rho - \rho_{\min})^{4/3}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Соответствующие разложения по степеням y имеют вид

$$\begin{aligned} R_{0101} &= \frac{3M}{\rho^4} \left(1 + \frac{(-10\rho^2 + 17M)y^2}{3\rho^4} + O\left(\frac{y^2}{\rho^2}\right) \right), \\ R_{0202} &= \frac{(-\rho^2 + M)M}{\rho^4} \left(1 + \frac{(3M - 2\rho^2)y^2}{\rho^4} + O\left(\frac{y^2}{\rho^2}\right) \right), \\ R_{2323} &= -\cos^2 \theta_1 M \left(1 + \frac{(-2\rho^2 + M)y^2}{\rho^4} + O\left(\frac{y^2}{\rho^2}\right) \right), \\ R_{1212} &= \frac{M}{\rho^2 - M} \left(1 + \frac{(-4\rho^2 + 5M)y^2}{\rho^4} + O\left(\frac{y^2}{\rho^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (47)$$

На горизонте компоненты тензора Римана имеют компоненты

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{\sqrt{M} (\cos(y/\sqrt{M}) + \cos(y/\sqrt{M})B + |\sin(y/\sqrt{M})| \sqrt{1+B} \sqrt{B}) \cos(y/\sqrt{M})}{2(\rho - \sqrt{M})^{-1}}, \\ R_{2323} &= -M \left(\cos\left(\frac{y}{\sqrt{M}}\right) \right)^2 \cos^2 \theta_1, \\ R_{0202} &= \frac{-2(\cos(y/\sqrt{M}) + \cos(y/\sqrt{M})B + |\sin(y/\sqrt{M})| \sqrt{1+B} \sqrt{B}) \cos(y/\sqrt{M})}{\sqrt{M} (\rho - \sqrt{M})^{-1}}, \\ R_{0101} &= \frac{(3 + 4B)(1 + B)}{M}. \end{aligned} \quad (48)$$

Вычислим теперь аналогичные асимптотики для скалярной кривизны. В окрестности сингулярности

$$R \simeq \frac{2(M - \rho_{\min}^2)^2}{9M\rho_{\min}^2 (E(\rho_{\min}/\sqrt{M}))^2 (\rho - \rho_{\min})^2}, \quad (49)$$

в окрестности бесконечности

$$R = \frac{4M^2 y^2}{\rho^8} \left(1 + \frac{8(-\rho^2 + M)y^2}{3\rho^4} + \frac{(91M^2 - 176M\rho^2 + 84\rho^4)y^4}{15\rho^8} + O\left(\frac{y^6}{\rho^6}\right) \right) \quad (50)$$

и на горизонте

$$R = -2 \frac{B + 1 - \cos^2 y - 4|\sin y| \sqrt{1+B} \sqrt{B} \cos y}{(1+B) \cos^2 y}. \quad (51)$$

Мы видим, что в окрестности бесконечности и в окрестности сингулярности (при $|y| < y_c$) скалярная кривизна отрицательна. Между тем, на горизонте она может иметь любой знак в зависимости от величины $|y|$. Верно следующее заключение: существует область изменения $|y|$, лежащая между y_c и $\pi\sqrt{M}/2$ (напомним, что это максимальное значение $|y|$, для которого поверхность постоянного y пересекает горизонт решения Шварцшильда–Тангерлини), для которой скалярная кривизна на горизонте отрицательна.

Рассмотрим теперь случай, когда $y_c < |y| < \pi\sqrt{M}/2$. В этом случае ρ меняется не от $\rho_{\min}$ (которое мы определяли условием $r(\rho_{\min}, y) = 0$), а от ρ_0 , определяемого условием

$$|\theta(\rho_0, y)| = \frac{\pi}{2}. \quad (52)$$

В этом случае r не обращается в нуль, однако θ обращается в $\pi/2$, и поскольку в выражениях для скалярной кривизны $\cos \theta$ появляется в знаменателе, эти величины оказываются сингулярными в точке $\rho = \rho_0$ (индексом “0” мы обозначаем величины, взятые в точке ρ_0). Для скалярной кривизны имеем

$$R \simeq -\frac{2(\rho_0^2 M \theta_{\rho_0}^2 - \rho_0^2 r_0^2 \theta_{\rho_0}^2 + r_0^2 r_{\rho_0}^2)}{r_0^4 \theta_{\rho_0}^2 r_{\rho_0}^2 (\rho - \rho_0)^2}. \quad (53)$$

Скалярная кривизна получилась отрицательной. Знак величины K , характеризующей след пятимерного тензора энергии-импульса, совпадает со знаком y (так же, как и для случая $y < y_c$). Действительно, в правой части (38) только третье слагаемое числителя дает вклад в рассматриваемую асимптотику, откуда и следует сделанное утверждение.

Благодарности. Авторы признательны И. Я. Арефьевой и О. В. Теряеву за обсуждения и полезные предложения по использованию наших результатов. Работа поддержана РФФИ (гранты № 09-01-12179-офи-м, 09-02-00073а), а также СПбГУ (грант № 11.0.64.2010). Кроме того, А. А. Андрианов поддержан CUR Generalitat de Catalunya (грант № 2009SGR502), а М. А. Курков благодарен за финансовую поддержку Фонду Д. Зимина “Династия”.

Список литературы

- [1] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. R. Dvali, *Phys. Lett. B*, **429**:3–4 (1998), 263–272, arXiv: hep-ph/9803315; I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *Phys. Lett. B*, **436**:3–4 (1998), 257–263, arXiv: hep-ph/9804398.
- [2] V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B*, **125**:2–3 (1983), 139–143; 136–138; B. A. Рубаков, *УФН*, **171** (2001), 913–938; **173** (2003), 219–226.
- [3] K. Akama, “Pregeometry”, *Gauge Theory and Gravitation*, Lectures Notes in Physics, **176**, eds. K. Kikkawa, N. Nakanishi, H. Nariai, Springer, Berlin, 1983, 267–271.
- [4] T. Banks, W. Fischler, *A model for high energy scattering in quantum gravity*, arXiv: hep-th/9906038; I. Ya. Aref’eva, *ЭЧАЯ*, **31**:7A (2000), 169–180, arXiv: hep-th/9910269; **41**:6 (2010), 1562–1578, arXiv: 0912.5481; S. Dimopoulos, G. Landsberg, *Phys. Rev. Lett.*, **87**:16 (2001), 161602, 4 pp., arXiv: hep-ph/0106295; S. B. Giddings, S. Thomas, *Phys. Rev. D*, **65**:5 (2002), 056010, 12 pp., arXiv: hep-ph/0106219.
- [5] R. Emparan, H. S. Reall, *Living Rev. Relativ.*, **11** (2008), 2008-6, 87 pp.
- [6] R. Gregory, “Braneworld black holes”, *Physics of Black Holes: A Guided Tour*, Lectures Notes in Physics, **769**, ed. E. Papantonopoulos, Springer, Berlin, 2009, 259–298, arXiv: 0804.2595.
- [7] P. Kanti, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **189**:1 (2009), 012020, 17 pp., arXiv: 0903.2147.
- [8] W. Israel, *Il Nuovo Cimento B*, **44**:1 (1966), 1–14; Erratum, **48**:2 (1967), 463–463; *Nuovo Cimento Suppl.*, **44** (1966), 4349; C. Lanczos, *Phys. Z.*, **23** (1922), 539–543.
- [9] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, *Phys. Rev. D*, **62**:2 (2000), 024012, 6 pp., arXiv: gr-qc/9910076.
- [10] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, V. Rezanian, *Phys. Lett. B*, **487**:1–2 (2000), 1–6, arXiv: hep-th/0003061; C. Germani, R. Maartens, *Phys. Rev. D*, **64**:12 (2001), 124010, 6 pp., arXiv: hep-th/0107011; R. Casadio, A. Fabbri, L. Mazzacurati, *Phys. Rev. D*, **65**:8 (2002), 084040, 5 pp., arXiv: gr-qc/0111072; K. A. Bronnikov, V. N. Melnikov, H. Dehnen, *Phys. Rev. D*, **68**:2 (2003), 024025, 9 pp., arXiv: gr-qc/0304068.
- [11] R. M. Wald, *General Relativity*, Univ. Chicago Press, Chicago, London, 1984.

- [12] Г. Г. Кузьмин, *Астрон. журн.*, **33**:1 (1956), 27–45.
- [13] F. R. Tangherlini, *Il Nuovo Cimento*, **27** (1963), 636–651.
- [14] S. Creek, R. Gregory, P. Kanti, B. Mistry, *Class. Quant. Grav.*, **23**:23 (2006), 6633–6657, arXiv: hep-th/0606006.
- [15] D. M. Gingrich, *Phys. Rev. D*, **81**:5 (2010), 057702, 4 pp., arXiv: 1001.0626; *J. Phys. G*, **37**:4 (2010), 105008, arXiv: 0912.0826.
- [16] A. A. Andrianov, M. A. Kurkov, *Phys. Rev. D*, **82**:10 (2010), 104027, 5 pp., arXiv: 1008.2705.
- [17] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 3: *Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье*, Наука, М., 1967.
- [18] P. Binétruy, C. Deffayet, D. Langlois, *Nucl. Phys. B*, **565**:1–2 (2000), 269–287, arXiv: hep-th/9905012.
- [19] N. A. Obers, “Black holes in higher-dimensional gravity”, *Physics of Black Holes: A Guided Tour*, Lectures Notes in Physics, **769**, ed. E. Papantonopoulos, Springer, Berlin, 2009, 211–258, arXiv: 0802.0519.
- [20] L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.*, **83**:17 (1999), 3370–3373, arXiv: hep-ph/9905221; **83**:23, 4690–4693; C. Galfard, C. Germani, A. Ishibashi, *Phys. Rev. D*, **73**:6 (2006), 064014, 10 pp., arXiv: hep-th/0512001.
- [21] R. Emparan, H. S. Reall, *Phys. Rev. D*, **65**:8 (2002), 084025, 26 pp., arXiv: hep-th/0110258.