Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Манида, Обобщения релятивистской кинематики,
ТМФ, 2011, том 169, номер 2, 323–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6732>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:01:42

© 2011 г.

С. Н. Манида*

ОБОБЩЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКИ

Предложен способ деформации расширенной алгебры Галилея, который приводит к нестандартной реализации группы Пуанкаре с дробно-линейными преобразованиями Фока–Лоренца. Инвариантный параметр в этих преобразованиях имеет размерность длины. Объединение этой деформации со стандартной (с инвариантной скоростью c) приводит к алгебре группы симметрии пространства анти-де Ситтера в координатах Бельтрами. В этом случае действие для свободных точечных частиц содержит две размерные константы R и c . Предельные переходы приводят к обычной ($R \rightarrow \infty$) или к альтернативной ($c \rightarrow \infty$), но тем не менее релятивистской кинематике.

Ключевые слова: принципы относительности, релятивистская кинематика, алгебра Галилея, группа Пуанкаре, пространство анти-де Ситтера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основу всей классической и современной физики составляет концепция инерциальной системы отсчета [1]. Предположение о существовании хотя бы двух таких систем отсчета в изотропном пространстве неизбежно приводит к существованию бесконечного множества таких систем, движущихся друг относительно друга с постоянными скоростями¹⁾. Законы природы должны формулироваться в терминах, ковариантных относительно преобразований из одной инерциальной системы отсчета в другую. Представляется интересным определить общий вид преобразований между произвольными инерциальными системами отсчета, что приведет и к определению общего вида пространств, в которых существуют такие системы отсчета.

С первых лет существования специальной теории относительности было известно [2]–[4], что наиболее общим *линейным* преобразованием такого рода является преобразование Лоренца, а соответствующим пространством – пространство Минковского. При выводе этих преобразований появляется (а не постулируется!) некоторая произвольная константа c , имеющая размерность скорости. Фок [5] показал, что наиболее общий вид таких преобразований – дробно-линейные преобразования.

¹⁾Во избежание недоразумений будем называть скоростью движения системы отсчета скорость определенной точки – начала отсчета пространственных расстояний.

Он же показал, что требование линейности преобразований эквивалентно постулату о постоянстве некоторой скорости c , что согласуется с требованием инвариантности уравнений Максвелла.

В работах [6], [7] на основе трудов Фока был построен явный вид таких дробно-линейных преобразований. Оказалось, что эти преобразования содержат не только константу c , но и некоторую константу размерности длины R , причем c оказывается инвариантной, но не постоянной величиной. Эти результаты были подтверждены рядом авторов [8]–[10] с других точек зрения. Локальная инвариантность уравнений Максвелла при этом достигается автоматически, так как локально дробно-линейные преобразования совпадают с обычными преобразованиями Лоренца.

Пространство, в котором действуют дробно-линейные преобразования Фока–Лоренца, отличается от пространства Минковского, несмотря на то что алгебра генераторов симметрии такого пространства совпадает с алгеброй группы Пуанкаре. Это пространство (в дальнейшем – R -пространство) можно получить из пространства Минковского простым преобразованием

$$\mathbf{r} \Rightarrow \frac{\mathbf{r}R}{tc}, \quad t \Rightarrow -\frac{R^2}{tc^2}. \quad (1)$$

При таком преобразовании стандартная для многих равенств специальной теории относительности величина $\mathbf{v}^2/c^2$ переходит в $(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)^2/R^2$.

Один из интегралов движения для N свободных точечных частиц в специальной теории относительности

$$E = \sum_{n=1}^N \frac{m_n c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_n^2/c^2}}$$

переходит в нерелятивистском пределе $v \ll c$ в

$$E \approx \sum_{n=1}^N m_n c^2 + \sum_{n=1}^N m_n \frac{\mathbf{v}_n^2}{2}. \quad (2)$$

Аналогичный интеграл в R -пространстве имеет вид

$$E = \sum_{n=1}^N \frac{m_n R^2}{\sqrt{1 - (\mathbf{r}_n - \mathbf{v}_n t)^2/R^2}}$$

и переходит в “некосмологическом пределе” $|\mathbf{r} - \mathbf{v}t| \ll R$ в

$$E \approx \sum_{n=1}^N m_n R^2 + \sum_{n=1}^N m_n \frac{(\mathbf{r}_n - \mathbf{v}_n t)^2}{2}. \quad (3)$$

Кажется, что это выражение не имеет никакого отношения к обычной нерелятивистской кинематике. Действительно, сохранение величины

$$\sum_{n=1}^N m_n (\mathbf{r}_n - \mathbf{v}_n t) \quad (4)$$

в нерелятивистской кинематике очевидно – оно порождается симметрией относительно группы однородных преобразований Галилея $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$, $t' = t$ и означает постоянство скорости движения центра масс системы материальных точек. Однако сохранение величины (4) не означает сохранения суммы квадратов в правой части (3). Тем не менее величина (3) сохраняется при упругих столкновениях точечных частиц. Поскольку величина (2) переходит в (3) при преобразовании (1), сохранение величины (3) должно быть связано с преобразованием симметрии, получаемым из сдвигов времени преобразованием (1):

$$t' = t + t_0, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{tt_0}{t + t_0}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} \frac{t_0}{t + t_0}. \quad (5)$$

Траектория свободного движения точечной частицы из начальной точки $\mathbf{r}_0$ со скоростью $\mathbf{v}_0$ имеет вид $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$. Это уравнение можно переписать как $\mathbf{r}/t = \mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0/t$. В таком представлении t заменено на $1/t$, координата $\mathbf{r}$ – на $\mathbf{r}/t$, начальные значения координаты и скорости поменялись местами, но траектория осталась прямой линией. Следовательно, новые переменные $\mathbf{r}/t$, $1/t$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и старые $\mathbf{r}$, t . Такая симметрия у нерелятивистского движения точечных свободных частиц действительно есть. В работе [11] показано, что максимальная непрерывная группа симметрии нерелятивистского инерциального движения 12-мерна.

В настоящей работе рассматриваются пространства, в которых релятивистское инерциальное движение обладает симметриями, аналогичными (5).

В разделе 2 определяется максимальная группа симметрии нерелятивистского инерциального движения – расширенная группа Галилея. Этот раздел носит методический характер. Здесь вводятся понятия, необходимые для дальнейшего изложения.

В разделе 3 приводятся два способа деформации подалгебр алгебры расширенной группы Галилея, введенной в разделе 2. Эти деформации приводят или к алгебре группы Пуанкаре и пространству Минковского, или к алгебре альтернативной (второй) группы Пуанкаре, содержащей дробно-линейные преобразования Фока–Лоренца, и, следовательно, к R -пространству. Дробно-линейные преобразования Фока–Лоренца – это преобразования в координатном пространстве. В работе [12] аналогичные преобразования были применены в импульсном пространстве с инвариантным параметром размерности энергии, которому можно придать значение планковской энергии. Однако в этом подходе возникают проблемы с интерпретацией преобразования для системы частиц.

В разделе 4 проводится комбинированная деформация алгебры Галилея, приводящая к алгебре группы симметрии пространства анти-де Ситтера в координатах Бельтрами. Различные варианты релятивистской кинематики, связанные с пространствами де Ситтера и анти-де Ситтера в координатах Бельтрами, были ранее подробно рассмотрены в работах [13]–[19]. Однако связь симметрии пространства анти-де Ситтера с преобразованиями Фока–Лоренца и с соответствующей группой симметрии ранее не была установлена.

Возможная интерпретация полученных результатов дана в заключении.

2. МАКСИМАЛЬНАЯ ГРУППА СИММЕТРИИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ИНЕРЦИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Хорошо известно, что уравнения движения свободных нерелятивистских частиц в d -мерном пространстве инвариантны относительно непрерывной группы преобразований $\mathcal{G}_0$, состоящей из сдвигов начала отсчета времени T и статической группы Галилея

$$G = SO(d) \ltimes (P_d \otimes K_d)$$

– полупрямого произведения $SO(d)$ (группа d -мерных вращений без отражений) на группу d -мерных трансляций P_d и группу однородных собственных преобразований Галилея K_d .

Поскольку T коммутирует с $SO(d)$, можно записать полную группу как

$$\mathcal{G}_0 = (T \otimes SO(d)) \ltimes (P_d \otimes K_d).$$

Какова максимальная непрерывная группа инвариантности движения нерелятивистских свободных точечных частиц? Ответ на этот вопрос может быть получен прямым решением уравнений Киллинга для действия

$$S = \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} \int \left(\frac{d\mathbf{r}_n}{dt} \right)^2 dt. \quad (6)$$

Рассмотрим однопараметрические бесконечно малые преобразования координат и времени:

$$t' = t + \varepsilon T(\mathbf{r}, t), \quad (7)$$

$$r'_i = r_i + \varepsilon X_i(\mathbf{r}, t), \quad i = 1, \dots, d. \quad (8)$$

Уравнения для функций $T(\mathbf{r}, t)$, $X_i(\mathbf{r}, t)$ получаем из условия инвариантности действия (6) с точностью до константы:

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}})^2(\partial_t T + \partial_j T \dot{r}_j) - \dot{r}_i(\partial_t X_i + \partial_j X_i \dot{r}_j) = \partial_t F + \partial_i F \dot{r}_i, \quad (9)$$

где $F(\mathbf{r}, t)$ – произвольная функция координат и времени. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам $i, j, k, \dots$ и введены обозначения

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial r_i}, \quad \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad \dot{f} \equiv \frac{df}{dt}.$$

Выделяя в уравнении (9) коэффициенты при одинаковых степенях $\dot{r}_i$, получаем систему уравнений

$$\partial_t F = 0, \quad \partial_i T = 0, \quad \partial_t X_i = \partial_i F, \quad \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_t T = \partial_j X_i.$$

Общее решение этой системы

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} c_1 \mathbf{r}^2 + c_4, \quad T(t) = 2c_2 t - c_1 t^2 + c_3, \quad \mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = (c_2 - c_1 t) \mathbf{r}, \quad (10)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные.

Генераторы преобразований (7), (8) с учетом решения (10) принимают вид

$$c_1 \Rightarrow A = tr_i \partial_i + t^2 \partial_t, \quad (11)$$

$$c_2 \Rightarrow M = -r_i \partial_i - 2t \partial_t, \quad (12)$$

$$c_3 \Rightarrow H = -\partial_t. \quad (13)$$

Коммутационные соотношения генераторов (11)–(13)

$$[M, H] = 2H, \quad [M, A] = -2A, \quad [H, A] = M$$

указывают на $SL(2, R)$ -группу симметрии. Действительно, соответствующие конечные преобразования

$$A \Rightarrow t' = \frac{t}{1+at}, \quad r'_i = \frac{r_i}{1+at}, \quad (14)$$

$$M \Rightarrow t' = (1+m)^2 t, \quad r'_i = (1+m)r_i, \quad (15)$$

$$H \Rightarrow t' = t + h, \quad r'_i = r_i \quad (16)$$

можно представить в общем виде как

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad r'_i = \frac{r_i}{\gamma t + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (17)$$

Соответствующие этим преобразованиям сохраняющиеся величины получаем с помощью теоремы Нётер:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (t\dot{\mathbf{r}}_n - \mathbf{r}_n)^2, \quad (18)$$

$$\mathcal{M} = \sum_{n=1}^N m_n (t\dot{\mathbf{r}}_n - \mathbf{r}_n) \dot{\mathbf{r}}_n, \quad (19)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \dot{\mathbf{r}}_n^2. \quad (20)$$

Рассматривая преобразования, аналогичные (7) и (8), но с векторным ε_i или тензорным ε_{ij} параметрами, получим группу пространственных трансляций и однородных преобразований Галилея или группу вращений соответственно, а сохраняющиеся величины представим в виде

$$\mathbf{P} = \sum_{n=1}^N m_n \dot{\mathbf{r}}_n, \quad (21)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{n=1}^N m_n (t\dot{\mathbf{r}}_n - \mathbf{r}_n), \quad (22)$$

$$\mathbf{J}_{ij} = \sum_{n=1}^N m_n ((\dot{\mathbf{r}}_n)_i (t\dot{\mathbf{r}}_n - \mathbf{r}_n)_j - (\dot{\mathbf{r}}_n)_j (t\dot{\mathbf{r}}_n - \mathbf{r}_n)_i). \quad (23)$$

Нестандартное представление для момента импульса (23) введено для того, чтобы подчеркнуть, что все сохраняющиеся величины (18)–(23) оказываются линейными или квадратичными функциями кинематических величин $\dot{\mathbf{r}}_n$ и $\mathbf{r}_{0n} = \mathbf{r}_n - t\dot{\mathbf{r}}_n$.

Окончательный результат: максимальной группой инвариантности нерелятивистского инерциального движения точечной частицы является группа размерности $(d^2 + 3d + 6)/2$ (12-мерная в трехмерном пространстве)

$$\mathcal{G} = (SL(2, R) \otimes SO(d)) \ltimes (P_d \otimes K_d).$$

Впервые этот результат был опубликован в работах [11], [20], хотя еще более тридцати лет назад [21]–[23] было установлено, что группа $\mathcal{G}$ является максимальной группой симметрии решений свободного уравнения Шредингера.

Интересно, что инвариантность относительно преобразования (17) наблюдалась ранее в различных физических задачах. Наиболее близкий пример – нерелятивистское движение точечной заряженной частицы в поле бесконечно тяжелого монополя [24].

Заметим для дальнейшего, что группа преобразований $SL(2, R)$ включает не только обычные сдвиги времени (16) с генератором H , но и сдвиги “обратного” времени (14), порождаемые генератором A :

$$\frac{1}{t'} = \frac{1}{t} + a, \quad \frac{\mathbf{r}'}{t'} = \frac{\mathbf{r}}{t}. \quad (24)$$

Рассмотрим, кроме того, однопараметрическую подгруппу $SO(2)$ группы $SL(2, R)$, порождаемую генератором

$$B \equiv \tau H - \frac{1}{\tau} A, \quad (25)$$

где введена произвольная константа $\tau \neq 0$. Соответствующие генератору B конечные преобразования имеют вид

$$t' = \tau \frac{t \cos \alpha - \tau \sin \alpha}{t \sin \alpha + \tau \cos \alpha}, \quad \mathbf{r}' = \tau \frac{\mathbf{r}}{t \sin \alpha + \tau \cos \alpha}. \quad (26)$$

Эта группа содержит конечные циклические подгруппы C_n , состоящие из степеней элементов σ_n – поворотов на углы $\alpha = 2\pi/n$. Особый интерес среди них представляет группа C_4 , состоящая из степеней “инверсии” σ_4 (преобразование (26) с $\alpha = \pi/2$):

$$\sigma_4: \quad t' = -\frac{\tau^2}{t}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} \frac{\tau}{t}, \quad (27)$$

$$(\sigma_4)^2: \quad t' = t, \quad \mathbf{r}' = -\mathbf{r}, \quad (28)$$

$$(\sigma_4)^3: \quad t' = -\frac{\tau^2}{t}, \quad \mathbf{r}' = -\mathbf{r} \frac{\tau}{t}. \quad (29)$$

Заметим, что $(\sigma_4)^2 = \sigma_2$ – операция отражения пространственных координат. Обычно дискретную операцию (28) добавляют к группе вращений $SO(d)$, получая группу $O(d)$. Проведенный анализ показывает, что дискретное (в обычном галилеевом пространстве-времени) преобразование “четности” (отражение пространственных координат) содержится в непрерывной группе $SL(2, R)$. Таким образом, ясно, что построенные выше преобразования симметрии реализуются не на обычном нерелятивистском пространстве-времени $\mathcal{R}^d \otimes \mathcal{R}$, а скорее на пространстве Мёбиуса [25].

Введем дискретную операцию $\tilde{\sigma}$, осуществляющую отражение времени:

$$t' = -t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}. \quad (30)$$

Операция $\tilde{\sigma}$ не входит в группу $SL(2, R)$, но является симметрией действия (6). Дело в том, что группа $\mathcal{G}$ была построена выше как максимальная *непрерывная* группа инвариантности действия (6).

Домножим произвольный элемент $\Sigma \in SL(2, R)$ на $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\Sigma} = \tilde{\sigma}\Sigma.$$

Поскольку $\tilde{\sigma}^2 = I$, элементы $\tilde{\Sigma}$ образуют группу $\widetilde{SL}(2, R) = \mathbb{Z}_2 \otimes SL(2, R)$, и полная максимальная группа симметрии имеет вид

$$\tilde{\mathcal{G}} = (SO(d) \otimes \widetilde{SL}(2, R)) \ltimes (P_d \otimes K_d).$$

Заметим, что интегралы движения (18)–(23) переходят друг в друга (с точностью до знака и размерных множителей – степеней параметра τ) или остаются неизменными при преобразованиях $(\sigma_4)^n$ и $\tilde{\sigma}(\sigma_4)^n$.

3. ГРУППА СИММЕТРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ИНЕРЦИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Почти очевидно, что некоторые из описанных выше симметрий инерциального движения нарушаются при переходе к релятивистскому случаю. Решая уравнения Киллинга для действия

$$S = - \sum_{n=1}^N m_n c^2 \int \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}_n^2}{c^2}} dt, \quad (31)$$

описывающего движение релятивистской свободной точечной частицы, легко получить известный результат: максимальной группой инвариантности действия (31) является группа Пуанкаре – полупрямое произведение группы Лоренца $O(d, 1)$ и группы пространственно-временных трансляций $P_d \otimes T$. Дискретные преобразования отражения пространственных координат и обращения времени включены в группу $O(d, 1)$. Расширение симметрии относительно сдвигов времени до $SL(2, R)$, как это имеет место в случае группы Галилея, здесь не реализуется.

Рассмотрим подробнее процедуру “релятивизации” группы Галилея $\mathcal{G}_0$ до группы Пуанкаре.

Генераторы группы $\mathcal{G}_0$ представим в следующем виде:

$$K_i = t\partial_i, \quad P_i = -\partial_i, \quad H = -\partial_t, \quad J_i = -\varepsilon_{ijk} r_j \partial_k. \quad (32)$$

Здесь и далее пространство трехмерно ($d = 3$), чтобы тензорные генераторы группы вращений J_{ij} можно было представить в виде псевдовектора $J_i \equiv \varepsilon_{ijk} J_{jk}$.

Алгебра этих генераторов имеет вид

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \varepsilon_{ijk} J_k, & [J_i, K_j] &= \varepsilon_{ijk} K_k, & [J_i, P_j] &= \varepsilon_{ijk} P_k, \\ [J_i, H] &= 0, & [K_i, H] &= -P_i, & [P_i, H] &= 0, \\ [P_i, P_j] &= 0, & [P_i, K_j] &= 0, & [K_i, K_j] &= 0. \end{aligned}$$

Переход к группе Пуанкаре связан с заменой однородного преобразования Галилея однородным преобразованием Лоренца, что эквивалентно замене генератора K_i на генератор

$$L_i = t\partial_i + \frac{1}{c^2}r_i\partial_t, \quad (33)$$

где введена константа c размерности скорости.

Алгебра генераторов $\{J_i; L_i; P_i; H\}$ и есть алгебра группы Пуанкаре (в дальнейшем – первая алгебра Пуанкаре):

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \varepsilon_{ijk}J_k, & [J_i, L_j] &= \varepsilon_{ijk}L_k, & [J_i, P_j] &= \varepsilon_{ijk}P_k, \\ [J_i, H] &= 0, & [L_i, H] &= -P_i, & [P_i, H] &= 0, \\ [P_i, P_j] &= 0, & [P_i, L_j] &= \frac{1}{c^2}\delta_{ij}H, & [L_i, L_j] &= -\frac{1}{c^2}\varepsilon_{ijk}J_k. \end{aligned}$$

Действие (31) инвариантно относительно группы преобразований, порождаемых генераторами $\{J_i; L_i; P_i; H\}$, и дискретных преобразований обращения времени и отражения пространственных координат.

Заметим, что полная группа инвариантности нерелятивистского движения $\mathcal{G}$ содержит не только подгруппу $\mathcal{G}_0$, но и аналогичную подгруппу $\mathcal{G}_1$, порождаемую генераторами $\{J_i; P_i; K_i; A\}$ с алгеброй

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \varepsilon_{ijk}J_k, & [J_i, K_j] &= \varepsilon_{ijk}K_k, & [J_i, P_j] &= \varepsilon_{ijk}P_k, \\ [J_i, A] &= 0, & [K_i, A] &= 0, & [P_i, A] &= -K_i, \\ [P_i, P_j] &= 0, & [P_i, K_j] &= 0, & [K_i, K_j] &= 0. \end{aligned}$$

Деформация этой алгебры до алгебры группы Пуанкаре может быть произведена заменой трансляций P_i на “инвертированные” трансляции

$$F_i = -\partial_i + \frac{1}{R^2}(tr_i\partial_t + r_i r_k \partial_k), \quad (34)$$

где R – константа размерности длины. Термин “инвертированные” использован из-за того, что генератор (34) получается из генератора L_i преобразованием σ_4 или $\tilde{\sigma}_4 = \tilde{\sigma}\sigma_4$ с параметром $\tau = R/c$, как и все генераторы группы $\mathcal{G}_1$ из генераторов группы $\mathcal{G}_0$.

Деформированная алгебра

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \varepsilon_{ijk}J_k, & [J_i, K_j] &= \varepsilon_{ijk}K_k, & [J_i, F_j] &= \varepsilon_{ijk}F_k, \\ [J_i, A] &= 0, & [F_i, A] &= -K_i, & [K_i, A] &= 0, \\ [K_i, K_j] &= 0, & [K_i, F_j] &= \frac{1}{R^2}\delta_{ij}A, & [F_i, F_j] &= -\frac{1}{R^2}\varepsilon_{ijk}J_k \end{aligned}$$

образует второе представление алгебры группы Пуанкаре (в дальнейшем – вторая алгебра Пуанкаре²⁾).

Конечные преобразования, порождаемые генераторами F_i ,

$$t' = \frac{t\sqrt{1 - a^2/R^2}}{1 - (\mathbf{r}\mathbf{a})/R^2}, \quad \mathbf{r}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{a}}{1 - (\mathbf{r}\mathbf{a})/R^2}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \frac{\mathbf{r}_{\perp}\sqrt{1 - a^2/R^2}}{1 - (\mathbf{r}\mathbf{a})/R^2}, \quad (35)$$

²⁾В работе [26] введено аналогичное понятие “второй группы Пуанкаре”, алгебра генераторов которой получается в результате сжатия алгебры де Ситтера при $R \rightarrow 0$.

где введены обозначения

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{n}(\mathbf{r}\mathbf{n}), \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|},$$

составляют преобразования Лоренца для величин

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{t}, \quad \tilde{t} = \frac{R}{t}.$$

Действительно, из формул (35) следует, что

$$\tilde{t}' = \gamma_a \left(\tilde{t} - \frac{(\mathbf{a}\tilde{\mathbf{r}})}{R} \right), \quad \tilde{\mathbf{r}}'_{\parallel} = \gamma_a (\tilde{\mathbf{r}}_{\parallel} - \mathbf{a}\tilde{t}), \quad \tilde{\mathbf{r}}'_{\perp} = \tilde{\mathbf{r}}_{\perp}, \quad (36)$$

где $\gamma_a^{-1} = \sqrt{1 - a^2/R^2}$.

Для построения действия, инвариантного относительно преобразований, порождаемых генераторами $\{J_i; F_i; K_i; A\}$, учтем, что обычное релятивистское действие (31) есть

$$S = - \sum_{n=1}^N m_n c \int \sqrt{ds_n^2}, \quad (37)$$

где

$$ds_n^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}_n^2. \quad (38)$$

Преобразование σ_4 переводит линейный элемент (38) в линейный элемент R -пространства, введенный в работах [6], [7]:

$$d\tilde{s}^2 = \frac{\tau^2}{t^4} [R^2 dt^2 - (t d\mathbf{r} - \mathbf{r} dt)^2], \quad R \equiv c\tau. \quad (39)$$

Подставляя выражение (39) в формулу (37), получаем действие

$$S = - \sum_{n=1}^N m_n R^2 \int \sqrt{1 - \frac{(\dot{\mathbf{r}}_n t - \mathbf{r}_n)^2}{R^2}} \frac{dt}{t^2}. \quad (40)$$

Из инвариантности действия (40) относительно преобразований, порождаемых генераторами $\{A; F_i; K_i; J_i\}$, следует сохранение следующих величин:

$$A \Rightarrow \mathcal{H} = \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}_n t - \mathbf{r}_n)^2/R^2}}, \quad (41)$$

$$K_i \Rightarrow \mathbf{K} = \sum_{n=1}^N \frac{m_n (\dot{\mathbf{r}}_n t - \mathbf{r}_n)}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}_n t - \mathbf{r}_n)^2/R^2}}, \quad (42)$$

$$F_i \Rightarrow \mathbf{P} = \sum_{n=1}^N \frac{m_n \dot{\mathbf{r}}_n}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}_n t - \mathbf{r}_n)^2/R^2}}, \quad (43)$$

$$J_i \Rightarrow \mathbf{J} = \sum_{n=1}^N \frac{m_n (\mathbf{r}_n - t\dot{\mathbf{r}}_n) \times \dot{\mathbf{r}}_n}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}_n t - \mathbf{r}_n)^2/R^2}}. \quad (44)$$

Дисперсионное соотношение следует из выражений (41) и (42):

$$\mathcal{H}^2 - \frac{\mathbf{K}^2}{R^2} = m^2, \quad (45)$$

откуда видно, что в R -пространстве $\mathcal{H}$ – энергия, а $\mathbf{K}$ – импульс системы точечных невзаимодействующих частиц. Заметим, что энергия свободной частицы минимальна, если ее скорость $\dot{\mathbf{r}}$ связана с расстоянием до наблюдателя $\mathbf{r}$ соотношением $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/t$. В дальнейшем такие скорости будем называть “хаббловскими”. Скорость света в этом пространстве, т. е. скорость движения безмассовой частицы, зависит от координат, времени и направления движения ($\mathbf{n}, \mathbf{n}^2 = 1$) [6]:

$$c(\mathbf{r}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \frac{R}{t} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{(\mathbf{r}\mathbf{n})^2}{R^2}} + \mathbf{n} \frac{(\mathbf{r}\mathbf{n})}{t}. \quad (46)$$

Для *величины* скорости света, измеряемой в лаборатории (т. е. при $r = 0$), получаем выражение

$$c(0, t) = \frac{R}{t}. \quad (47)$$

Несмотря на явную “зависимость” скорости света от времени, расстояния, направления, выраженную формулами (46), (47), конкретный световой импульс распространяется вдоль светового конуса с постоянной скоростью. Ни астрофизические наблюдения за спектрами удаленных источников, ни оптические наблюдения в земных лабораториях в принципе не могут зафиксировать зависимость скорости света от времени вида (47), так как в момент времени t_0 в точке $r = 0$ наблюдатель фиксирует свет от источника, находившегося на расстоянии r в некоторый момент времени $t < t_0$. Из равенства (46) получаем $c(r, t) = (R - r)/t$, а из (47) – $c(0, t_0) = R/t_0$. Эти скорости совпадают при $r(t) = R - tR/t_0$, что и означает движение светового импульса с постоянной скоростью $c_0 = R/t_0$. Кроме того, необходимо подчеркнуть, что эта скорость одинакова для всех наблюдателей в данной точке пространства-времени, что и составляет основной постулат специальной теории относительности. Заметим, что в равенствах (40)–(45) есть только одна универсальная константа R , имеющая размерность длины. Никакой константы размерности скорости в этих соотношениях нет, однако они полностью укладываются в наши представления о релятивистской теории.

Пространство, описываемое формулами (39)–(46), обладает симметрией относительно преобразований Галилея, дробно-линейных трансляций пространства (35) и трансляций обратного времени (24). Комбинацией этих преобразований можно построить преобразование координат между двумя системами отсчета, движущимися относительно друг друга с некоторой скоростью $\mathbf{u}$ так, что начала координат совпадут в момент времени t_0 . Это преобразование координат и будет дробно-линейным преобразованием Фока–Лоренца [6], [7] ($\gamma_0 \equiv 1/\sqrt{1 - u^2 t_0^2/R^2}$, где $ut_0 < R$ или $u < c_0$):

$$t' = \frac{t}{\gamma_0 - (\gamma_0 - 1)t/t_0 - \gamma_0 \mathbf{r}\mathbf{u}t_0/R^2}, \quad (48)$$

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \frac{\gamma_0(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{u}(t - t_0))}{\gamma_0 - (\gamma_0 - 1)t/t_0 - \gamma_0 \mathbf{r}\mathbf{u}t_0/R^2}, \quad (49)$$

$$\mathbf{r}'_{\perp} = \frac{\mathbf{r}_{\perp}}{\gamma_0 - (\gamma_0 - 1)t/t_0 - \gamma_0 \mathbf{r}\mathbf{u}t_0/R^2}. \quad (50)$$

4. КОМБИНИРОВАННАЯ ДЕФОРМАЦИЯ АЛГЕБРЫ ГАЛИЛЕЯ

Приведенные выше две деформации алгебры группы Галилея можно объединить. Рассмотрим алгебру генераторов $\{J_i; F_i; L_i; B = (R/c)H - (c/R)A\}$:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \varepsilon_{ijk} J_k, & [J_i, L_j] &= \varepsilon_{ijk} L_k, & [J_i, F_j] &= \varepsilon_{ijk} F_k, \\ [J_i, B] &= 0, & [F_i, B] &= \frac{c}{R} L_i, & [L_i, B] &= -\frac{R}{c} F_i, \\ [L_i, L_j] &= -\frac{1}{c^2} \varepsilon_{ijk} J_k, & [F_i, L_j] &= \frac{1}{Rc} \delta_{ij} B, & [F_i, F_j] &= -\frac{1}{R^2} \varepsilon_{ijk} J_k. \end{aligned}$$

Сокращение Иноню–Вигнера [27], [28] построенной алгебры очевидно. В пределе $R \rightarrow \infty$ получаем первую алгебру Пуанкаре, а в пределе $c \rightarrow \infty$ – вторую алгебру Пуанкаре.

Наличие двух размерных констант R, c позволяет сделать все генераторы и структурные константы алгебры безразмерными. Для этого введем безразмерные представления генераторов

$$\begin{aligned} \hat{L}_i &= cL_i = ct\partial_i + \frac{1}{c}r_i\partial_t, \\ \hat{F}_i &= RF_i = -R\partial_i + \frac{1}{R}(tr_i\partial_t + r_ir_k\partial_k). \end{aligned}$$

В этом представлении коммутационные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \varepsilon_{ijk} J_k, & [J_i, \hat{L}_j] &= \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k, & [J_i, \hat{F}_j] &= \varepsilon_{ijk} \hat{F}_k, \\ [J_i, B] &= 0, & [\hat{F}_i, B] &= \hat{L}_i, & [\hat{L}_i, B] &= -\hat{F}_i, \\ [\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= -\varepsilon_{ijk} J_k, & [\hat{F}_i, \hat{L}_j] &= \delta_{ij} B, & [\hat{F}_i, \hat{F}_j] &= -\varepsilon_{ijk} J_k \end{aligned}$$

и составляют алгебру группы анти-де Ситтера $AdS(d, 2)$.

Конечные преобразования пространства-времени, порождаемые генераторами $\hat{L}_i$ – обычные преобразования Лоренца, генераторами $\hat{F}_i$ – равенства (35), генераторами B – равенства (26).

Введем стандартные обозначения для лоренц-векторов и их произведений:

$$x^\mu = (ct, \mathbf{r}), \quad a^\mu = (a_0, \mathbf{a}), \quad (ax) = a_0 ct - \mathbf{a}\mathbf{r}, \quad a^2 = a_0^2 - \mathbf{a}^2.$$

В этих обозначениях произвольная комбинация преобразований (26) и (35) может быть представлена в виде

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - a^\mu + (\gamma - 1)a^\mu[(ax)/a^2 - 1]}{\gamma(1 + (ax)/R^2)}, \quad \gamma^{-1} = \sqrt{1 - a^2/R^2}. \quad (51)$$

Групповой характер преобразования (51) проверяется прямыми вычислениями. Кроме того, при $a_0 = 0$ преобразование (51) совпадает с (35), а при $\mathbf{a} = 0$, $a_0 = c\tau \operatorname{tg} \alpha$ – с (25).

Возведя равенство (51) в квадрат, получаем

$$x'^2 = \frac{(x - a)^2 + [a^2 x^2 - (ax)^2]/R^2}{(1 + (ax)^2/R^2)^2}. \quad (52)$$

Положив в равенстве (52) $a^\mu = x^\mu + dx^\mu$, получим величину, инвариантную относительно всей группы преобразований $AdS(d, 2)$:

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2(R^2 + x^2) - (x dx)^2}{(R^2 + x^2)^2},$$

или в трехмерных обозначениях

$$ds^2 = \frac{R^4 c^2 dt^2}{(R^2 + c^2 t^2 - \mathbf{r}^2)^2} \left(1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2} - \frac{(\dot{\mathbf{r}}t - \mathbf{r})^2}{R^2} + \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})^2}{R^2 c^2} \right). \quad (53)$$

Действие для свободных точечных частиц принимает вид

$$S = - \sum_{n=1}^N \int \frac{m_n c^2 R^2 dt}{(R^2 + c^2 t^2 - \mathbf{r}_n^2)} \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}_n^2}{c^2} - \frac{(\dot{\mathbf{r}}_n t - \mathbf{r}_n)^2}{R^2} + \frac{(\mathbf{r}_n \times \dot{\mathbf{r}}_n)^2}{R^2 c^2}}. \quad (54)$$

В пределе $c \rightarrow \infty$ действие (54) переходит в действие (38).

Сохраняющиеся величины аналогичны (41)–(44):

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_n^2/c^2 - (\dot{\mathbf{r}}_n t - \mathbf{r}_n)^2/R^2 + (\mathbf{r}_n \times \dot{\mathbf{r}}_n)^2/(Rc)^2}}, \quad (55)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{n=1}^N \frac{m_n (\dot{\mathbf{r}}_n t - \mathbf{r}_n)}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_n^2/c^2 - (\dot{\mathbf{r}}_n t - \mathbf{r}_n)^2/R^2 + (\mathbf{r}_n \times \dot{\mathbf{r}}_n)^2/(Rc)^2}}, \quad (56)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{n=1}^N \frac{m_n \dot{\mathbf{r}}_n}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_n^2/c^2 - (\dot{\mathbf{r}}_n t - \mathbf{r}_n)^2/R^2 + (\mathbf{r}_n \times \dot{\mathbf{r}}_n)^2/(Rc)^2}}, \quad (57)$$

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^N \frac{m_n [\mathbf{r}_n \times \dot{\mathbf{r}}_n]}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_n^2/c^2 - (\dot{\mathbf{r}}_n t - \mathbf{r}_n)^2/R^2 + (\mathbf{r}_n \times \dot{\mathbf{r}}_n)^2/(Rc)^2}}. \quad (58)$$

Из равенств (55)–(58) следует дисперсионное соотношение

$$\mathcal{H}^2 - \frac{\mathbf{P}^2}{c^2} - \frac{\mathbf{K}^2}{R^2} + \frac{\mathbf{J}^2}{c^2 R^2} = m^2, \quad (59)$$

переходящее в (45) в пределе $c \rightarrow \infty$ и в обычное соотношение традиционной теории относительности в пределе $R \rightarrow \infty$.

Из (54) можно получить уравнение световых конусов. В простом случае $\mathbf{r} = 0$ получаем скорость света $c(t)$ из соотношения

$$\frac{1}{c(t)^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{t^2}{R^2}. \quad (60)$$

Предельный переход $c \rightarrow \infty$ в равенствах (53)–(60) приводит непосредственно к равенствам (39)–(45).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На первый взгляд кажется, что пространство-время, описываемое соотношениями (39)–(46), не имеет отношения к окружающему нас миру. Однако если рассматривать области пространства в малой окрестности начала координат $|\mathbf{r}| \ll R$,

промежутки времени Δt в малой окрестности некоторой точки t_0 ($\Delta t \ll t_0$), скорости движения $|\dot{\mathbf{r}}| \gg |\mathbf{r}|/t_0$, равенства (39)–(46) переходят в обычные соотношения релятивистской физики со значением скорости света $c_0 \equiv R/t_0$. Следовательно, R -пространство можно рассматривать как “космологическое” обобщение пространства Минковского, если положить R равным радиусу видимой части Вселенной ($\sim 10^{26}$ м), t_0 – временем, прошедшим после Большого Взрыва ($\sim 10^{10}$ лет или $3 \cdot 10^{18}$ с). При этом все релятивистские формулы стандартной теории относительности справедливы, а поправки к ним будут иметь космологический характер – их порядки равны r/R , $\Delta t/t_0$, и $|\mathbf{r}|/(t_0|\dot{\mathbf{r}}|)$. В последнем выражении величина $|\mathbf{r}|/t_0$ есть “хаббловская” скорость точки $\mathbf{r}$. При этом все соотношения традиционной *релятивистской* физики выполняются, если релятивистские скорости тел заметно превосходят хаббловскую скорость. Для наглядности заметим, что даже на расстояниях порядка размеров Солнечной системы ($\sim 10^{12}$ м) хаббловская скорость составляет такую малую величину ($3 \cdot 10^{-6}$ м/с), при которой никаких релятивистских эффектов не наблюдается.

Если физика, описываемая формулами R -пространства (39)–(46), действительно имеет отношение к нашему миру, надо понять, что может означать предельный переход $c \rightarrow \infty$, переводящий физику пространства анти-де Ситтера в физику R -пространства. В этом случае в нашем мире есть константа R и очень большая (по сравнению с наблюдаемой скоростью света c_0) константа c , и отношение R/c есть малая (по сравнению со временем жизни Вселенной), но фундаментальная константа, которая может быть равна планковскому времени

$$t_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c_0^5}}, \quad (61)$$

которое примерно в 10^{60} раз меньше времени жизни Вселенной. При этом и скорость света в данный момент в 10^{60} раз меньше скорости света в начальный момент существования Вселенной. На этом пути открываются интересные перспективы и для коррекции наших представлений о первых моментах развития Вселенной, и для введения квантово-гравитационных параметров в физику уже на уровне кинематики, а не динамики. Кроме того, скорость c_0 в выражении (61) – физическая скорость света (зависящая от времени в рассматриваемой геометрии). Отсюда следует возможная зависимость и констант $\hbar$, G от времени. Так, например, планковская длина $l_{\text{Pl}} = c_0 t_{\text{Pl}}$ в этой геометрии зависит от времени так же, как и c_0 . Следовательно, в первые моменты существования Вселенной планковская длина могла быть в 10^{60} раз больше, т. е. совпадать с размером всей Вселенной R .

Благодарности. Большая часть этой работы не была бы выполнена без постоянного многолетнего общения, жарких споров и конструктивной критики со стороны А. Н. Васильева.

Список литературы

- [1] Г. Галилей, “Диалог о двух главнейших системах мира – птоломеевой и коперниковой”, *Избранные труды*, т. 1, Наука, М., 1964, 109–586.
- [2] W. von Ignatowsky, *Phys. Z.*, **11** (1910), 972–976.
- [3] W. von Ignatowsky, *Arch. Math. Phys.*, **17** (1910), 1–24.

- [4] P. Frank, H. Rothe, *Ann. Phys.*, **339**:5 (1911), 825–855.
- [5] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Физматгиз, М., 1961.
- [6] S. N. Manida, *Fock-Lorentz transformations and time-varying speed of light*, arXiv: gr-qc/9905046.
- [7] С. Н. Манида, *Вестн. СПбГУ. Сер. 4: Физика, химия*, **2**:12 (2001), 3–17.
- [8] S. S. Stepanov, *Fundamental physical constants and the principle of parametric incompleteness*, arXiv: physics/9909009.
- [9] S. S. Stepanov, *Phys. Rev. D*, **62**:2 (2000), 023507, 7 pp., arXiv: astro-ph/9909311.
- [10] J. Magueijo, *Phys. Rev. D*, **62**:10 (2000), 103521, 15 pp., arXiv: gr-qc/0007036.
- [11] O. Jahn, V. V. Sreedhar, *Am. J. Phys.*, **69**:10 (2001), 1039–1043, arXiv: math-ph/0102011.
- [12] J. Magueijo, L. Smolin, *Phys. Rev. Lett.*, **88**:19 (2002), 190403, arXiv: hep-th/0112090.
- [13] H.-Y. Guo, *Sci. China Ser. A*, **51**:4 (2008), 568–603.
- [14] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, Y. Tian, Z. Xu, B. Zhou, *On de Sitter invariant special relativity and cosmological constant as origin of inertia*, arXiv: hep-th/0405137.
- [15] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, H.-T. Wu, B. Zhou, *The principle of relativity, kinematics and algebraic relations*, arXiv: 0812.0871.
- [16] H.-Y. Guo, H.-T. Wu, B. Zhou, *Phys. Lett. B*, **670**:4–5 (2009), 437–441, arXiv: 0809.3562.
- [17] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, Y. Tian, Z. Xu, B. Zhou, *Class. Quant. Grav.*, **24**:16 (2007), 4009–4035, arXiv: gr-qc/0703078.
- [18] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, Y. Tian, Z. Xu, B. Zhou, *Front. Phys. China*, **2**:3 (2007), 358–363, arXiv: hep-th/0607016.
- [19] H.-Y. Guo, *The Beltrami model of De Sitter space: from Snyder's quantized space-time to de Sitter invariant relativity*, arXiv: hep-th/0607017.
- [20] L. O'Riada, V. V. Sreedhar, *Ann. Phys.*, **293**:2 (2001), 215–227, arXiv: hep-th/0007199.
- [21] U. Niederer, *Helv. Phys. Acta*, **45**:5 (1972), 802–810.
- [22] C. R. Hagen, *Phys. Rev. D*, **5**:2 (1972), 377–388.
- [23] R. Jackiw, *Phys. Today*, **25**:1 (1972), 23–29.
- [24] R. Jackiw, *Ann. Phys.*, **129** (1980), 183–200.
- [25] C. Duval, P. A. Horvathy, *Conformal Galilei groups, Veronese curves, and Newton–Hooke spacetimes*, arXiv: 1104.1502.
- [26] R. Aldrovandi, J. G. Pereira, *A Second Poincaré Group*, arXiv: gr-qc/9809061.
- [27] E. Inonu, E. P. Wigner, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **39**:6 (1953), 510–524.
- [28] E. Inonu, E. P. Wigner, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **40** (1954), 119–121.