Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, Ш. М. Латипов, О существовании и аналитичности собственных значений двухканальной молекулярно-резонансной модели, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 3, 341–351

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6734>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:02:42

© 2011 г.

С. Н. Лакаев^{*†}, Ш. М. Латипов^{*}

О СУЩЕСТВОВАНИИ И АНАЛИТИЧНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХКАНАЛЬНОЙ МОЛЕКУЛЯРНО-РЕЗОНАНСНОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрено семейство операторов $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d := (-\pi, \pi]^d$, ассоциированное гамильтонианом системы, состоящей из не более чем двух частиц на d -мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, взаимодействующих как с помощью парного контактного потенциала ($\mu > 0$), так и с помощью операторов рождения и уничтожения ($\gamma > 0$). Доказано существование единственного собственного значения оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, или его отсутствие в зависимости как от параметров взаимодействий γ , $\mu \geq 0$, так и от квазиимпульса системы $k \in \mathbb{T}^d$. Показана аналитичность соответствующего собственного вектора. Установлено, что собственное значение и собственный вектор являются аналитическими функциями квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^d$ в области существования $G \subset \mathbb{T}^d$.

Ключевые слова: гамильтониан, оператор рождения, собственные значения, связанное состояние, решетка.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ – двухканальное гильбертово пространство, состоящее из одномерного гильбертова пространства $\mathcal{H}_0 = C^1$ (канал 1) и ядерного гильбертова пространства $\mathcal{H}_1 = L_e^2(\mathbb{T}^d)$ – четных, квадратично-интегрируемых функций на d -мерном ($d \geq 1$) торе $\mathbb{T}^d$ (канал 2). Элементы пространства $\mathcal{H}$ представляются как векторы $u = (f_0, f_1)$, где $f_0 \in \mathcal{H}_0$, $f_1 \in \mathcal{H}_1$. Скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = (f_0, g_0) + (f_1, g_1)$$

в $\mathcal{H}$ естественно определяется через скалярные произведения

$$(f_0, g_0)_{\mathcal{H}_0} = f_0 \cdot \bar{g}_0, \quad (f_1, g_1)_{\mathcal{H}_1} = \int_{\mathbb{T}^d} f_1(t) \bar{g}_1(t) dt.$$

Пусть $E(k)$, $k = (k^{(1)}, \dots, k^{(d)}) \in \mathbb{T}^d$, – скалярный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$ по формуле

$$E(k)f_0 = \varepsilon(k)f_0, \quad f_0 \in \mathcal{H}_0,$$

---

^{*}Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: sherdorlatipov@mail.ru

[†]Самаркандское отделение АН РУз, Самарканд, Узбекистан. E-mail: slakaev@mail.ru

где $\varepsilon(k) = \sum_{i=1}^d (1 - \cos k^{(i)})$, а $H_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, – двухчастичный дискретный оператор Шредингера, ассоциированный гамильтонианом системы двух одинаковых частиц (бозонов), взаимодействующих с помощью парного контактного потенциала $\mu \geq 0$.

Оператор $H_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1$ по формуле

$$H_\mu(k) = H_0(k) - \mu V,$$

где $H_0(k)$ – оператор умножения на функцию $\varepsilon_k(\cdot)$:

$$\begin{aligned} (H_0(k)f_1)(q) &= \varepsilon_k(q)f_1(q), \\ \varepsilon_k(q) &= \varepsilon\left(\frac{k}{2} - q\right) + \varepsilon\left(\frac{k}{2} + q\right) = 2 \sum_{i=1}^d \left(1 - \cos \frac{k^{(i)}}{2} \cos q^{(i)}\right), \quad f_1 \in \mathcal{H}_1, \end{aligned} \quad (1)$$

и V – неотрицательный интегральный оператор ранга один:

$$(Vf_1)(q) = \alpha_0(f_1, \alpha_0)_{\mathcal{H}_1} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f_1(s) ds, \quad \alpha_0 \equiv (2\pi)^{-d/2}, \quad f_1 \in \mathcal{H}_1.$$

Рассмотрим семейство операторов $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, ассоциированное гамильтонианом системы, состоящей из не более чем двух частиц на d -мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, взаимодействующих как с помощью парного контактного потенциала ($\mu > 0$), так и с помощью операторов рождения и уничтожения ($\gamma > 0$).

Оператор $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $\gamma, \mu \in [0, +\infty)$, действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ по формуле

$$H_{\gamma\mu}(k) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(k)f_0 + C_\gamma^* f_1 \\ C_\gamma f_0 + (H_\mu(k)f_1)(q) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $C_\gamma^* f_1 = \gamma(f_1, \alpha_0)_{\mathcal{H}_1}$ и $C_\gamma f_0 = \gamma(f_0, \alpha_0)_{\mathcal{H}_0}$ – операторы рождения и уничтожения соответственно. Легко проверить, что $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $\gamma, \mu \in [0, +\infty)$, является ограниченным и самосопряженным оператором в $\mathcal{H}$.

В работе [1] была рассмотрена аналогичная, не зависящая от параметра $k \in \mathbb{T}^d$, молекулярно-резонансная модель и изучены ее собственные значения и резонансы. В работе [2] рассмотрен гамильтониан системы, состоящей из не более чем трех частиц, и показано существование виртуальных уровней у модельного оператора $H_{\gamma 0}(k)$, что влечет наличие бесконечного числа связанных состояний (собственных значений) гамильтониана.

В работе [3] для широкого класса двухчастичных дискретных операторов Шредингера $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $d \geq 3$, ассоциированных гамильтонианом системы двух частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, показано, что если неотрицательный оператор $H(0)$ имеет виртуальный уровень или собственное значение на дне существенного спектра, то при всех ненулевых значениях $k \in \mathbb{T}^d$, $d \geq 3$, оператор $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, имеет собственное значение, лежащее левее существенного спектра. Двухчастичный дискретный оператор Шредингера $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, характеризуется еще и тем, что если $H(0)$ имеет собственное значение, то $H(k)$ также имеет собственное значение при всех ненулевых значениях квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^d$ (см. теорему 5.4 в работе [3]).

В настоящей работе доказано существование единственного собственного значения оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, или его отсутствие в зависимости как от параметров

взаимодействий $\gamma, \mu \geq 0$, так и от квазиимпульса системы $k \in \mathbb{T}^d$. Показана аналитичность соответствующего собственного вектора. Кроме того, доказано, что собственное значение и соответствующий собственный вектор являются аналитическими функциями квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^d$ в области существования $G \subset \mathbb{T}^d$. В частности, в теореме 4 при $d \geq 3$ установлено, что оператор $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, имеет собственное значение в некоторой окрестности множества векторов $k = (k^{(1)}, \dots, k^{(d)})$, у которых каждая координата равна либо нулю, либо π , и не имеет собственных значений при других значениях квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^d$.

Этот результат отличает рассматриваемую модель $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, от двухчастичного дискретного оператора Шредингера $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, и является следствием наличия взаимодействий с помощью операторов рождения и уничтожения.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Так как разность операторов $H_{\gamma\mu}(k)$ и $H_{0\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, является оператором ранга два, то в силу известной теоремы Вейля [4] существенный спектр оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, совпадает с существенным спектром $\sigma_{\text{ess}}(H_{0\mu}(k))$ оператора $H_{0\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, а именно верны равенства

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\gamma\mu}(k)) = \sigma_{\text{ess}}(H_{0\mu}(k)) = \sigma_{\text{ess}}(h_{\mu}(k)) = \sigma(h_0(k)) = [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)],$$

где

$$\varepsilon_{\min}(k) = \min_{q \in \mathbb{T}^d} \varepsilon_k(q) = 2 \sum_{i=1}^d \left(1 - \cos \frac{k^{(i)}}{2}\right), \quad \varepsilon_{\max}(k) = \max_{q \in \mathbb{T}^d} \varepsilon_k(q) = 2 \sum_{i=1}^d \left(1 + \cos \frac{k^{(i)}}{2}\right).$$

Одним из основных результатов работы является следующая теорема, утверждающая существование и аналитичность единственного собственного значения и соответствующего собственного вектора оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, при $d = 1, 2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $d = 1, 2$ и $\gamma \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\gamma + \mu > 0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{T}^d$ оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{\gamma\mu}(k) < \varepsilon_{\min}(k)$. Соответствующий собственный вектор $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$ имеет вид

$$f_{0,k} = \frac{-c\gamma}{\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu}(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu}(k)} + \mu \right) \frac{c}{\varepsilon_k(q) - E_{\gamma\mu}(k)}$$

и является аналитическим на $\mathbb{T}^d$, где $c \neq 0$ – нормирующий множитель.

Более того, отображение $E_{\gamma\mu}: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $k \rightarrow E_{\gamma\mu}(k)$ является четной и вещественно-аналитической функцией на $\mathbb{T}^d$, а отображение $f: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathcal{H}$, $k \rightarrow f_k \in \mathcal{H}$ – векторнозначным аналитическим отображением на $\mathbb{T}^d$.

Пусть $0 \leq n \leq d$. Для любого фиксированного $0 \leq \chi \leq \pi$ определим следующие множества:

$$\Pi_{n,\chi} = \{k = (k^{(1)}, \dots, k^{(d)}) \in \mathbb{T}^d: \text{ровно } n \text{ координат у вектора } k \text{ равны } \chi\},$$

$$\Pi_{\chi}^{(3)} = \bigcup_{n=0}^{d-3} \Pi_{n,\chi}, \quad \tilde{\Pi}_{\xi,\eta} = \bigcup_{i=0}^d (\Pi_{i,\xi} \cap \Pi_{d-i,\eta}), \quad \xi \neq \eta.$$

Таким образом, $\Pi_\chi^{(3)}$ – множество векторов $k = (k^{(1)}, \dots, k^{(d)}) \in \mathbb{T}^d$, у которых по крайней мере три координаты отличны от χ , и $\tilde{\Pi}_{\xi, \eta}$ – множество векторов $k = (k^{(1)}, \dots, k^{(d)}) \in \mathbb{T}^d$, у которых все координаты равны либо ξ , либо η . Обозначим через $\tilde{\Pi}_{\xi, \eta}^\perp$ множество векторов $k = (k^{(1)}, \dots, k^{(d)}) \in \mathbb{T}^d$, у которых хотя бы одна координата отлична от ξ и η , т.е. $\tilde{\Pi}_{\xi, \eta}^\perp = \mathbb{T}^d \setminus \tilde{\Pi}_{\xi, \eta}$.

Следующая теорема утверждает наличие собственных значений оператора $H_{\gamma\mu}(k)$ в случае $d \geq 3$ и $\varepsilon_{\min}(k) = \varepsilon(k)$, т.е. при $k \in \tilde{\Pi}_{0, \pi}$.

ТЕОРЕМА 2. При любых $\gamma > 0$, $\mu \geq 0$ и $k \in \tilde{\Pi}_{0, \pi}$ оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение, лежащее левее $\varepsilon_{\min}(k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $L_e^1(\mathbb{T}^d)$ – банахово пространство четных интегрируемых функций на $\mathbb{T}^d$. Заметим, что если для некоторого $k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0, \pi}^\perp$ уравнение $H_{\gamma\mu}(k)f_k = \varepsilon_{\min}(k)f_k$ имеет ненулевое решение $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k})$, то для его координат $f_{0,k}$ и $f_{1,k}$ выполняются следующие соотношения:

1) $f_{0,k} \in \mathcal{H}_0$, $f_{1,k}(q) \in L_e^1(\mathbb{T}^d) \setminus L_e^2(\mathbb{T}^d)$ при $k \in \{\Pi_{d-3, \pi} \cup \Pi_{d-4, \pi}\} \cap \tilde{\Pi}_{0, \pi}^\perp$, где $\Pi_{-1, \pi} = \emptyset$;

2) $f_{0,k} \in \mathcal{H}_0$, $f_{1,k}(q) \in L_e^2(\mathbb{T}^d)$ при $k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0, \pi}^\perp$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если выполняются соотношения из п. 1 замечания 1, говорят, что дно (левый край) существенного спектра $\varepsilon_{\min}(k)$ является *виртуальным уровнем* оператора $H_{\gamma\mu}(k)$.

Следующая теорема утверждает, что левый край существенного спектра оператора $H_{\gamma\mu}(k)$ не является ни виртуальным уровнем, ни собственным значением в случае $\varepsilon(k) = \varepsilon_{\min}(k)$, т.е. при $k \in \tilde{\Pi}_{0, \pi}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $d \geq 1$, $\gamma > 0$ и $\mu \geq 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

А. Если $k \in \tilde{\Pi}_{0, \pi} \setminus \{\tilde{\pi}\}$, где $\tilde{\pi} = (\pi, \dots, \pi)$, т.е. каждая из координат вектора k равна либо нулю, либо π , то число $z = \varepsilon_{\min}(k)$ не является ни собственным значением, ни виртуальным уровнем оператора $H_{\gamma\mu}(k)$.

Б. Если $k = \tilde{\pi} = (\pi, \dots, \pi)$, то число $z = \varepsilon_{\min}(k)$ является собственным значением оператора $H_{\gamma\mu}(k)$ бесконечной кратности. Более того, все соответствующие собственные векторы ортогональны единичному вектору $1 \in \mathcal{H}_1$.

Обозначим через $a(k, z)$ вещественно-аналитическую в $\mathbb{T}^d \times (\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_{\gamma\mu}(k)))$ функцию:

$$a(k, z) := (\alpha_0, r_0(k, z)\alpha_0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - z}. \quad (3)$$

Для каждого фиксированного $k \in \mathbb{T}^d$ определим аналитическую в $\mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ функцию (определитель Фредгольма)

$$\Delta_{\gamma\mu}(k; z) = 1 - \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - z} + \mu \right) a(k, z). \quad (4)$$

Пусть $d \geq 3$. Тогда для любого $k \in \Pi_\pi^{(3)}$ существует конечный предел (см. ниже лемму 4)

$$a(k, \varepsilon_{\min}(k)) = \lim_{z \rightarrow \varepsilon_{\min}(k) - 0} a(k; z) > 0,$$

и, следовательно, для любого $k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$ существует конечный предел

$$\Delta_{\gamma\mu}(k) = \lim_{z \rightarrow \varepsilon_{\min}(k) - 0} \Delta_{\gamma\mu}(k; z) = \Delta_{\gamma\mu}(k; \varepsilon_{\min}(k)).$$

Отметим, что $\Delta_{\gamma\mu}(\cdot)$ является вещественно-аналитической функцией на $\Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp \subset \mathbb{T}^d$ (см. утверждение А леммы 4). Для любого $k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$ определим $\Delta_{\gamma\mu}^*(k)$ следующим образом:

$$\Delta_{\gamma\mu}^*(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon_{\min}(k) - [\gamma^2 + \mu(\varepsilon(k) - \varepsilon_{\min}(k))]a(k, \varepsilon_{\min}(k)), \quad (5)$$

где

$$\varepsilon(k) - \varepsilon_{\min}(k) = \sum_{i=1}^d 2 \cos \frac{k_i}{2} \left(1 - \cos \frac{k_i}{2} \right).$$

ЛЕММА 1. Пусть $d \geq 3$, $k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$. Число $z = \varepsilon_{\min}(k)$ является виртуальным уровнем при $k \in \{\Pi_{d-3,\pi} \cup \Pi_{d-4,\pi}\} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$ и собственным значением при $k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$ оператора $H_{\gamma\mu}(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_{\gamma\mu}^*(k) = 0$.

Для любых $\gamma, \mu, \gamma + \mu > 0$ имеют место соотношения

$$\Delta_{\min}(\gamma, \mu) = \inf_{k \in \Pi_\pi^{(3)}} \Delta_{\gamma\mu}(k) = -\infty,$$

$$\Delta_{\max}(\gamma, \mu) = \max_{k \in \Pi_\pi^{(3)}} \Delta_{\gamma\mu}(k) < +\infty.$$

Введем следующие множества:

$$G_{\gamma\mu}^0 = \{k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp : \Delta_{\gamma\mu}(k) = 0\},$$

$$G_{\gamma\mu}^< = \{k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp : \Delta_{\gamma\mu}(k) < 0\},$$

$$G_{\gamma\mu}^> = \{k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp : \Delta_{\gamma\mu}(k) > 0\}.$$

Заметим, что непустое множество $G_{\gamma\mu}^0 \subset \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$ является поверхностью (многообразием) коразмерности 1, а $G_{\gamma\mu}^< \subset \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$ и $G_{\gamma\mu}^> \subset \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$ — открытыми связными множествами в $\mathbb{T}^d$.

Следующая теорема утверждает наличие или отсутствие собственных значений и виртуальных уровней оператора $H_{\gamma\mu}(k)$ в случае $\varepsilon(k) < \varepsilon_{\min}(k)$, т.е. при $k \in \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$.

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что $d \geq 3$. Справедливы следующие утверждения.

А. Пусть $\gamma, \mu \geq 0$, $\gamma + \mu > 0$, $k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$ и $\Delta_{\max}(\gamma, \mu) < 0$, тогда $G_{\gamma\mu}^< = \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$.

Б. Для любого $k \in G_{\gamma\mu}^<$ оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{\gamma\mu}(k) < \varepsilon_{\min}(k)$. Соответствующий собственный вектор $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$ имеет вид

$$f_{0,k} = \frac{-c\gamma}{\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu}(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu}(k)} + \mu \right) \frac{c}{\varepsilon_k(q) - E_{\gamma\mu}(k)}$$

и является аналитическим в $\mathbb{T}^d$, где $c \neq 0$ — нормирующий множитель. При этом функция $E_{\gamma\mu}(\cdot)$ является четной аналитической функцией в $G_{\gamma\mu}^<$. Отображение

$f: G_{\gamma\mu}^< \longrightarrow \mathcal{H}, k \longrightarrow f_k \in \mathcal{H}$ является векторнозначным аналитическим отображением.

В. Пусть $\gamma, \mu \geq 0$, $\gamma + \mu > 0$ и $k \in G_{\gamma\mu}^0$. Тогда число $z = \varepsilon_{\min}(k)$ является виртуальным уровнем при $k \in [\Pi_{d-3,\pi} \cup \Pi_{d-4,\pi}] \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$ (собственным значением при $k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$) оператора $H_{\gamma\mu}(k)$. Соответствующее виртуальное (связанное) состояние f_k имеет вид $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k})$,

$$f_{0,k} = \frac{-c\gamma}{\varepsilon(k) - \varepsilon_{\min}(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - \varepsilon_{\min}(k)} + \mu \right) \frac{c}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)},$$

где $c \neq 0$ — нормирующий множитель.

Г. Пусть $\gamma > 0$, $\mu \geq 0$ и $k \in G_{\gamma\mu}^0 \cup G_{\gamma\mu}^>$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ не имеет собственного значения, лежащего левее точки $\varepsilon_{\min}(k)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\gamma = 0$. Для любого $k \in \Pi_\pi^{(3)}$ определим положительное число

$$\mu_0(k) = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)} \right)^{-1}.$$

Тогда при всех $\mu > \mu_0(0)$ условие утверждения А теоремы 4 выполняется, и, следовательно, оператор $H_{0\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{0\mu}(k) < \varepsilon_{\min}(k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что утверждение А теоремы 4 выполняется при достаточно больших $\gamma, \mu > 0$, а утверждение Г теоремы 4 выполняется при достаточно малых $\gamma, \mu \geq 0$, $\mu + \gamma > 0$. Таким образом, при малых взаимодействиях $\gamma, \mu \geq 0$, $\mu + \gamma > 0$, оператор $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$, не имеет собственного значения, лежащего левее существенного спектра.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

ЛЕММА 2. А. Для любого $k \in \mathbb{T}^d$ функция $a(k, \cdot)$ положительна и монотонно возрастает на интервале $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ и для любого $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ она вещественно-аналитична на $\mathbb{T}^d$.

Б. Для любых $\gamma, \mu \in [0, +\infty)$, $k \in \mathbb{T}^d$ функция (4) монотонно убывает на интервале $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$.

В. Для любых $\gamma, \mu \in [0, +\infty)$, $k \in \mathbb{T}^d$ нули функций $\Delta_{\gamma\mu}^*(k; \cdot)$ и $\Delta_{\gamma\mu}(k; \cdot)$ совпадают на $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$, и функция $\Delta_{\gamma\mu}^*(k; \cdot)$ на интервале $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ имеет не более одного нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения А, Б леммы очевидны. Докажем утверждение В. При всех $z \in (-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ функция $\Delta_{\gamma\mu}^*(k; z)$ представляется в виде

$$\Delta_{\gamma\mu}^*(k; z) = (\varepsilon(k) - z) \Delta_{\gamma\mu}(k; z),$$

поэтому нули функций $\Delta_{\gamma\mu}^*(k; \cdot)$ и $\Delta_{\gamma\mu}(k; \cdot)$ совпадают на $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$. Из того факта, что $\Delta_{\gamma\mu}(k; \cdot)$ монотонно убывает на интервале $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$, следует, что функция $\Delta_{\gamma\mu}^*(k; \cdot)$ имеет не более одного нуля на этом интервале. ■

Связь между собственными значениями самосопряженного оператора $H_{\gamma\mu}(k)$ и нулями функции $\Delta_{\gamma\mu}^*(k; z)$ устанавливается в следующей лемме.

ЛЕММА 3. Для любых $\gamma, \mu \in [0, +\infty)$ число $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ является собственным значением оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, тогда и только тогда, когда $\Delta_{\gamma\mu}^*(k; z) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_{\gamma\mu}(k))$ есть собственное значение оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, и пусть $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}$ — соответствующая собственная вектор-функция. Тогда f_0 и f_1 удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} (\varepsilon(k) - z)f_0 &= -\gamma(f_1, \alpha_0), \\ (\varepsilon_k(q) - z)f_1(q) &= \mu\alpha_0(f_1, \alpha_0) - \gamma\alpha_0 f_0. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу равенства $\sigma_{\text{ess}}(H_{\gamma\mu}(k)) = [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ для любых $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ и $q \in \mathbb{T}^d$ имеет место неравенство

$$\varepsilon_k(q) - z \neq 0, \quad k \in \mathbb{T}^d.$$

Из второго уравнения системы (6) для f_1 имеем

$$f_1(q) = \frac{\mu\alpha_0 c - \gamma\alpha_0 f_0}{\varepsilon_k(q) - z}, \quad (7)$$

где $c = (f_1, \alpha_0)$. Подставляя выражение (7) для $f_1(\cdot)$ в первое равенство (6), получим, что система уравнений (6) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система линейных уравнений

$$\begin{aligned} (\varepsilon(k) - z)f_0 + \gamma c &= 0, \\ \gamma f_0 a(k, z) + c(1 - \mu a(k, z)) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

имеет ненулевое решение, т.е. когда определитель $\Delta_{\gamma\mu}^*(k; z)$ этой системы равен нулю, т.е. $\Delta_{\gamma\mu}^*(k; z) = 0$. Следовательно, собственная функция имеет вид

$$f = (f_0, f_1), \quad f_0 = \frac{-\gamma c}{\varepsilon(k) - z}, \quad f_1(q) = \frac{\mu\alpha_0 c - \gamma\alpha_0 f_0}{\varepsilon_k(q) - z}. \quad (9)$$

Достаточность. Пусть для некоторых $k \in \mathbb{T}^d$ и $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ выполняется равенство $\Delta_{\gamma\mu}^*(k; z) = 0$. Тогда вектор $f = (f_0, f_1)$ вида (9) удовлетворяет системе уравнений (6), т.е. число $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ является собственным значением оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если n координат вектора $k \in \mathbb{T}^d$ равны числу π , то $\mathcal{E}_k(\cdot) - \varepsilon_{\min}(k)$ можно рассматривать как функцию, определенную на $\mathbb{T}^{d-n}$ и имеющую невырожденный минимум в $\mathbb{T}^{d-n}$. Поэтому в следующей лемме без ограничения общности предположим, что $k \in \Pi_{0,\pi}$.

ЛЕММА 4. А. Пусть $d \geq 3$. Тогда для любого $k \in \Pi_{0,\pi}$ функция

$$a(k, \varepsilon_{\min}(k)) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)}$$

является аналитической в $\Pi_{0,\pi}$.

Б. Пусть $d \geq 1$, $k \in \Pi_{0,\pi}$ и $z < \varepsilon_{\min}(k)$. Тогда функция $a(k, z)$ представляется в виде

$$a(k, z) = -\frac{\Phi_0(k)}{2}(z - \varepsilon_{\min}(k))^m \ln(\varepsilon_{\min}(k) - z) + \\ + (z - \varepsilon_{\min}(k))^{m+1} \ln(\varepsilon_{\min}(k) - z) \Phi_{11}(k, z) + \nu(k) + \Phi_2(k, z)$$

при $d = 2m + 2$ и

$$a(k, z) = \frac{\pi \Phi_0(k)}{2} \frac{(z - \varepsilon_{\min}(k))^m}{\sqrt{\varepsilon_{\min}(k) - z}} + \\ + (\varepsilon_{\min}(k) - z)^{m+1/2} \Phi_{12}(k, z) + \nu(k) + \Phi_2(k, z)$$

при $d = 2m + 1$. Здесь

$$\Phi_0(k) = \frac{c}{\sqrt{\cos(k_1/2) \dots \cos(k_d/2)}}, \quad c = \text{const}, \\ \Phi_{12}(k, z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l(k) (\varepsilon_{\min}(k) - z)^{l/2}$$

и $\Phi_{11}(k, \cdot)$ и $\Phi_2(k, \cdot)$, $k \in \Pi_{0,\pi}$, — аналитические функции в некоторой δ -окрестности $V_\delta(\varepsilon_{\min}(k))$ точки $z = \varepsilon_{\min}(k)$, $\Phi_2(k, \varepsilon_{\min}(k)) = 0$, а $b_l(k)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, — некоторые действительные числа (см. [5]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Легко видеть, что для любого $k \in \Pi_{0,\pi}$ точка $q_0 = 0 \in \Pi_{0,\pi}$ является единственной невырожденной точкой минимума функции $\mathcal{E}_k(q)$. Поэтому в силу леммы Морса с параметром существует взаимно однозначное регулярное отображение $q = \phi_k(x)$ некоторого шара $W_\beta(0)$ радиуса $\beta > 0$ с центром в начале координат на окрестность $U_\delta(0) \in \Pi_{0,\pi}$ точки $q_0 = 0$ такое, что

$$\varepsilon_k(q) - z = \varepsilon_{\min}(k) - z + \sum_{j=1}^d x_j^2.$$

Функцию $a(k, z)$ можно представить, как сумму следующих двух функций:

$$a(k, z) = \int_{U_\delta(0)} \frac{d\eta}{\mathcal{E}_k(q) - z} + \int_{\mathbb{T}^d \setminus U_\delta(0)} \frac{d\eta}{\mathcal{E}_k(q) - z} = G_1(k, z) + G_2(k, z), \quad (10)$$

где $G_2(\cdot; z)$, $z < \varepsilon_{\min}(k)$, и $G_2(k, \cdot)$, $k \in \Pi_{0,\pi}$, — аналитические функции в $\Pi_{0,\pi}$ и на $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ соответственно. Докажем, что функция $G_1(k, \varepsilon_{\min}(k))$ аналитична в $\Pi_{0,\pi}$.

В первом интеграле равенства (10), делая замену переменных $q = \phi_k(x)$, где

$$\phi_k: W_\beta(0) \rightarrow U_\delta(0), \quad q_j \mapsto \arccos\left(1 - \frac{x_j^2}{2 \cos(k_j/2)}\right),$$

получим

$$G_1(k, z) = \int_{W_\beta(0)} \frac{1}{\varepsilon_{\min}(k) - z + \sum_{j=1}^d x_j^2} \times \\ \times \frac{2 dx_1}{\sqrt{2 \cos(k_1/2)} \sqrt{2 - x_1^2/2 \cos(k_1/2)}} \cdots \frac{2 dx_d}{\sqrt{2 \cos(k_d/2)} \sqrt{2 - x_d^2/2 \cos(k_d/2)}}.$$

$z = E_{\gamma\mu}(k)$ на этом интервале. Следовательно, согласно леммам 2 и 3 оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{\gamma\mu}(k) < \varepsilon_{\min}(k)$.

Вещественная аналитичность функции $E_{\gamma\mu}(k)$ на $\mathbb{T}^d$ следует из того факта, что $E_{\gamma\mu}(k)$ является единственным решением уравнения $\Delta_{\gamma\mu}(k; z) = 0$, а также из того, что функция $\Delta_{\gamma\mu}(k; \cdot)$ вещественно-аналитична в $\mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ и функция $\Delta_{\gamma\mu}(\cdot; z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ вещественно-аналитична на торе $\mathbb{T}^d$. Так как $\Delta_{\gamma\mu}(\cdot; z)$ – аналитическая и четная функция на $\mathbb{T}^d$, то $E_{\gamma\mu}(\cdot)$ является четной вещественно-аналитической функцией.

Заметим, что число $E_{\gamma\mu}(k) \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ есть собственное значение оператора $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{aligned} (\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu}(k))f_0 &= -\gamma(f_1, \alpha_0), \\ (\varepsilon_k(q) - E_{\gamma\mu}(k))f_1(q) &= \mu\alpha_0(f_1, \alpha_0) - \gamma\alpha_0 f_0 \end{aligned} \quad (12)$$

имеет нетривиальное решение $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$, где

$$f_{0,k} = \frac{-\gamma c}{\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu}(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu}(k)} + \mu \right) \frac{c}{\varepsilon_k(q) - E_{\gamma\mu}(k)}, \quad (13)$$

$c \neq 0$ – нормирующий множитель. Из выражения (13) для $f_{0,k}$ и $f_{1,k}$ и из аналитичности функции $E_{\gamma\mu}(\cdot)$ на $\mathbb{T}^d$ можно заключить, что отображение $f: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathcal{H}$, $k \rightarrow f_k \in \mathcal{H}$ является аналитическим отображением на $\mathbb{T}^d$. Аналитичность отображения $f: k \rightarrow f_k \in \mathcal{H}$ следует из аналитичности компонент $f_{0,k}$ и $f_{1,k}$ вектора f_k . ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $k \in \tilde{\Pi}_{0,\pi}$ и $z < \varepsilon_{\min}(k)$. В силу лемм 2 и 4 при фиксированных $\gamma > 0$, $\mu \geq 0$ имеют место равенства

$$\lim_{z \rightarrow \varepsilon_{\min}(k) - 0} \Delta_{\gamma\mu}(k; z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_{\gamma\mu}(k; z) = 1.$$

Поскольку непрерывная функция $\Delta_{\gamma\mu}(k; \cdot)$ монотонно убывает и меняет на интервале $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ знак, то из утверждения В леммы 2 следует, что уравнение $\Delta_{\gamma\mu}^*(k; z) = 0$ имеет единственное решение $z = E_{\gamma\mu}(k)$ на этом интервале. Следовательно, согласно лемме 3 оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{\gamma\mu}(k) < \varepsilon_{\min}(k)$. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. А. Пусть вектор $k \neq \vec{\pi}$ такой, что каждая из его координат равна либо нулю, либо π . Предположим, что число $z = \varepsilon_{\min}(k)$ является решением уравнения

$$H_{\gamma\mu}(k)f = \varepsilon_{\min}(k)f, \quad f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad f_0 \in \mathbb{C}, \quad f \in L^1(\mathbb{T}^d) \text{ или } L^2(\mathbb{T}^d).$$

Тогда система уравнений (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} f_1(q) &= 0, \\ [\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)]f_1(q) &= -\gamma\alpha_0 f_0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\alpha_0 \neq 0$. Учитывая первое равенство, из второго уравнения получим, что

$$f_1(q) = -\frac{\gamma\alpha_0 f_0}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)},$$

где $\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k) \geq 0$ – непрерывная функция, не равная тождественно нулю. Но эта функция удовлетворяет первому уравнению системы (14) только при $f_0 = 0$. Следовательно, $f_1 = 0$. Это означает, что число $z = \varepsilon_{\min}(k)$ не является ни собственным значением, ни виртуальным уровнем оператора $H_{\gamma\mu}(k)$.

Б. Если $k = \vec{\pi}$, то система уравнений (6) имеет вид

$$\begin{aligned}\gamma(f_1, \alpha_0) &= 0, \\ \gamma\alpha_0 f_0 &= 0.\end{aligned}\tag{15}$$

В силу того что $\alpha_0 \neq 0$, отсюда следует утверждение Б теоремы. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Утверждение А теоремы очевидно. Утверждение Б доказывается аналогично теореме 1.

Докажем утверждение В. Так как разложение функции $\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)$ в окрестности невырожденного минимума $q = 0$ начинается с $q^2 = q_1^2 + \dots + q_d^2$, несобственные интегралы

$$\int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{[\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)]^n}, \quad \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{q^{2n}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходятся или расходятся одновременно (см. доказательство леммы 4). Отсюда следует, что $f_{1,k} \in L_e^1(\mathbb{T}^d) \setminus L_e^2(\mathbb{T}^d)$ при $k \in [\Pi_{d-3,\pi} \cup \Pi_{d-4,\pi}] \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$, и $f_{1,k} \in L_e^2(\mathbb{T}^d)$ при $k \in \Pi_\pi^{(3)} \cap \tilde{\Pi}_{0,\pi}^\perp$. Второе утверждение следует из определения виртуального уровня и множества $G_{\gamma\mu}^0$.

Г. Из определения $G_{\gamma\mu}^>$ и $G_{\gamma\mu}^0$ следует, что при $k \in G_{\gamma\mu}^> \cup G_{\gamma\mu}^0$ имеет место неравенство $\Delta_{\gamma\mu}(k, \varepsilon_{\min}(k)) \geq 0$. Далее, имеет место представление $\Delta_{\gamma\mu}^*(k, z) = (\varepsilon(k) - z)\Delta_{\gamma\mu}(k, z)$, а функция $\Delta_{\gamma\mu}(k, z)$ монотонно убывает на интервале $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$. Поэтому в силу леммы 2 уравнение $\Delta_{\gamma\mu}^*(k, z) = 0$ не имеет решения на этом интервале и согласно лемме 3 оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ не имеет собственного значения на интервале $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$. ■

Благодарности. Авторы приносят глубокую благодарность Р. А. Минлосу за внимание и обсуждения, а также рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

- [1] A. K. Motovilov, W. Sandhas, V. B. Belyaev, *J. Math. Phys.*, **42**:6 (2001), 2490–2506.
- [2] S. Albeverio, S. N. Lakaev, T. H. Rasulov, *J. Stat. Phys.*, **127**:2 (2007), 191–220.
- [3] S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov, *Commun. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 91–115, arXiv:math-ph/0501013.
- [4] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [5] С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **91**:1 (1992), 51–65.

Поступила в редакцию 17.12.2010