Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Дудникова, Вывод гидродинамических уравнений для решетчатых систем, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 3, 352–367

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6735>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:17:29

© 2011 г.

Т. В. Дудникова*

ВЫВОД ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕТЧАТЫХ СИСТЕМ

Изучается динамика решетчатых систем в $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. Предполагается, что начальные данные – случайные функции. Вводится семейство начальных мер $\{\mu_0^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$. Предполагается, что меры μ_0^ε являются локально однородными или “мало меняются” при пространственных сдвигах порядка $o(\varepsilon^{-1})$ и неоднородными при сдвигах порядка ε^{-1} ; кроме того, корреляции мер μ_0^ε убывают равномерно по ε на больших расстояниях. Для любых $\tau \in \mathbb{R} \setminus 0$, $r \in \mathbb{R}^d$ и $\kappa > 0$ рассматриваются распределения случайного решения в моменты времени $t = \tau/\varepsilon^\kappa$ в точках, близких к $[r/\varepsilon] \in \mathbb{Z}^d$. Основная цель – изучение асимптотики этих распределений при $\varepsilon \rightarrow 0$ и вывод предельных гидродинамических уравнений типа Эйлера и Навье–Стокса.

Ключевые слова: гармонические кристаллы, задача Коши, случайные начальные данные, слабая сходимость мер, гауссовские меры, гидродинамический предел, уравнение Эйлера, уравнение Навье–Стокса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена математическим проблемам обоснования статистической физики и продолжает работы [1], [2], в которых приведен вывод гидродинамических уравнений из гамильтоновых уравнений движения системы частиц. Один из подходов к решению этой задачи заключается в изучении гидродинамического поведения различных упрощенных моделей взаимодействия частиц, например одномерных твердых стержней [3], одномерных осцилляторов на решетке [4]–[6]. Отметим также большое количество работ, посвященных моделям стохастической динамики (см., например, работы [7]–[9] и ссылки в них). Подробное обсуждение результатов можно найти в обзорных работах [10]–[13].

В настоящей работе в качестве модели рассматриваются гармонические кристаллы в $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. В гармоническом приближении кристалл характеризуется отклонениями $u(z, t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $z \in \mathbb{Z}^d$, атомов кристалла от их положения равновесия. Поле $u(z, t)$ удовлетворяет дискретному волновому уравнению. Гармонические кристаллы можно рассматривать как обобщение на многомерный случай модели одномерных осцилляторов на решетке (см. работы [4]–[6], [14]).

*Электростальский политехнический институт, Электросталь, Московская обл., Россия.
E-mail: tdudnikov@mail.ru

Вывод гидродинамических уравнений связан с проблемой сходимости к равновесной мере. Для рассматриваемой модели такая сходимость была доказана в работах [15], [16]. Кратко сформулируем данный результат. Предполагается, что начальные данные – это случайная функция с распределением μ_0 . На меру μ_0 налагаются следующие условия: μ_0 обладает нулевым средним, имеет конечную среднюю плотность энергии и удовлетворяет условию перемешивания. Мы изучаем распределение μ_t случайного решения $u(\cdot, t)$ в моменты времени $t \in \mathbb{R}$. В работе [15] доказано, что меры μ_t при $t \rightarrow \infty$ слабо сходятся к некоторой предельной мере, которая является гауссовской. Для одномерной цепочки гармонических осцилляторов этот результат был доказан в работе [14], сходимость к равновесному распределению была доказана также для систем, описываемых уравнениями в частных производных [17], [18], и для кристалла, взаимодействующего со скалярным волновым полем [19].

Для вывода гидродинамических уравнений применяется специальная так называемая гидродинамическая предельная процедура. Она заключается в следующем. Вводится малый параметр $\varepsilon > 0$, задающий отношение между масштабами измерений в “макро-” и “микроскопических” переменных пространства и времени, и рассматривается семейство начальных мер $\{\mu_0^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$, удовлетворяющих некоторым условиям (см. условия **V1** и **V2** в разделе 1.2). В частности, предполагается, что, во-первых, меры μ_0^ε являются локально пространственно-однородными или “мало меняются” при сдвигах порядка меньше ε^{-1} и неоднородными при сдвигах порядка ε^{-1} ; во-вторых, корреляции мер μ_0^ε убывают равномерно по ε на больших расстояниях.

Для вывода уравнений типа Эйлера в работе [1] используется так называемое гиперболическое изменение масштаба, т. е. $t = \tau/\varepsilon$ и $z = [r/\varepsilon]$, где через t, z обозначаются микроскопические переменные, а через τ, r – макроскопические переменные времени и пространства ($[\cdot]$ – целая часть числа). Для любых $\tau \in \mathbb{R} \setminus 0$ и $r \in \mathbb{R}^d$ мы изучаем распределение $\mu_{\tau/\varepsilon, r/\varepsilon}^\varepsilon$ случайного решения $u(z, t)$ в точках пространства, близких к точке $[r/\varepsilon]$, и в моменты времени τ/ε . Доказано (см. теорему 3.3 в [1]), что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{\tau/\varepsilon, r/\varepsilon}^\varepsilon = \mu_{\tau, r}, \quad (1.1)$$

где $\mu_{\tau, r}$ – некоторая гауссовская мера. В частности, в работе [1] были выведены точные формулы для корреляционной матрицы $q_{\tau, r}(z - z')$ предельной меры $\mu_{\tau, r}$, из которых вытекает, что полученная в результате преобразования Фурье матричнозначная функция $\hat{q}_{\tau, r}(\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}^d$, где $\mathbb{T}^d$ – d -мерный тор $\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$, является решением следующего уравнения:

$$\partial_\tau f(\tau, r, \theta) = iC(\theta)\nabla\Omega(\theta) \cdot \nabla_r f(\tau, r, \theta), \quad r \in \mathbb{R}^d, \quad \tau > 0, \quad (1.2)$$

где $C(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1}(\theta) \\ -\Omega(\theta) & 0 \end{pmatrix}$ и $\Omega(\theta)$, грубо говоря, является дисперсионным соотношением кристалла (более детально результаты (1.1) и (1.2) сформулированы в п. 2.1 настоящей работы). Здесь и ниже через ∂_τ обозначается частная производная по τ , через $\nabla_r f$ – градиент функции f по переменной $r \in \mathbb{R}^d$, а точкой обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$. Уравнение (1.2) можно рассматривать как аналог уравнения Эйлера для нашей модели. Аналогичные уравнения были выведены в работе [4] в случае $d = n = 1$. Эти результаты были обобщены в статьях [1] и [2] на случай

гармонических кристаллов во всем пространстве $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, и в полупространстве $\mathbb{Z}_+^d = \{z \in \mathbb{Z}^d : z_1 > 0\}$ соответственно.

Основной результат настоящей работы – это вывод уравнения для “следующего приближения” к уравнению Эйлера (1.2). Чтобы получить дополнительный член порядка ε в (1.2), мы изучаем поведение распределений решения $u(z, t)$ в моменты времени порядка τ/ε^2 и после соответствующей замены переменных выводим уравнение типа Навье–Стокса (точную формулировку результата см. ниже в теореме 3 и в следствии 2). В случае $d = n = 1$ эти результаты были получены в работе [5]. Поэтому при доказательстве (см. раздел 3) будет использован как подход работы [5], так и методы работ [1], [15], разработанные для многомерных гармонических кристаллов. В приложении приводятся “поправки” более высокого порядка (порядка ε^k , $k \geq 2$) к уравнению (1.2).

1.1. Модель. Мы изучаем динамику гармонических кристаллов в $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$:

$$\begin{aligned} \ddot{u}(z, t) &= - \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} V(z - z') u(z', t), & z \in \mathbb{Z}^d, & \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(z, 0) &= u_0(z), \quad \dot{u}(z, 0) = u_1(z), & z \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $u(z, t) = (u_1(z, t), \dots, u_n(z, t))$, $u_0(z) = (u_{01}(z), \dots, u_{0n}(z)) \in \mathbb{R}^n$ и аналогично для $u_1(z)$, $V(z)$ – матрица взаимодействия (или сила) с элементами $V_{kl}(z)$, $k, l = 1, \dots, n$.

Введем следующие обозначения:

$$Y(t) = (Y^0(t), Y^1(t)) \equiv (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t)), \quad Y_0 = (Y_0^0, Y_0^1) \equiv (u_0(\cdot), u_1(\cdot)).$$

Тогда задача (1.3) принимает вид

$$\dot{Y}(t) = \mathcal{A}Y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad Y(0) = Y_0. \quad (1.4)$$

Здесь $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathcal{V} & 0 \end{pmatrix}$, где через $\mathcal{V}$ обозначен оператор свертки с матричным ядром V , $\mathcal{V}u = \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} V(z - z') u(z')$. Формально (1.4) – это линейная гамильтонова система с функцией Гамильтона

$$H(Y) = \frac{1}{2} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \left(|u_1(z)|^2 + \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} u_0(z) \cdot V(z - z') u_0(z') \right), \quad Y = (u_0, u_1).$$

Предполагается, что начальные данные Y_0 задачи (1.4) принадлежат фазовому пространству $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. По определению фазовое пространство $\mathcal{H}_\alpha$ – это гильбертово пространство $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ -значных функций от $z \in \mathbb{Z}^d$ с нормой

$$\|Y\|_\alpha^2 = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |Y(z)|^2 (1 + |z|^2)^\alpha < \infty.$$

На матрицу V налагаются следующие условия.

Е1. Существуют константы $C, \gamma > 0$ такие, что $|V_{kl}(z)| \leq C e^{-\gamma|z|}$ для всех $z \in \mathbb{Z}^d$, $k, l = 1, \dots, n$.

Е2. Матрица $V(z)$ действительная и симметричная, т. е. $V_{lk}(-z) = V_{kl}(z) \in \mathbb{R}$ для всех $z \in \mathbb{Z}^d$, $k, l = 1, \dots, n$.

Обозначим через $\widehat{V}(\theta)$ преобразование Фурье матрицы $V(z)$:

$$\widehat{V}(\theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} V(z) e^{iz \cdot \theta}, \quad \theta \in \mathbb{T}^d.$$

Из условий **E1** и **E2** вытекает, что $\widehat{V}(\theta)$ – действительно-аналитическая, эрмитова, матричнозначная функция от $\theta \in \mathbb{T}^d$.

E3. Матрица $\widehat{V}(\theta)$ неотрицательно определена для любых $\theta \in \mathbb{T}^d$.

Обозначим через $\Omega(\theta)$ эрмитову неотрицательно-определенную матрицу

$$\Omega(\theta) = (\widehat{V}(\theta))^{1/2} \geq 0. \quad (1.5)$$

Через $\omega_\sigma(\theta)$, $\sigma = 1, \dots, s$, обозначим собственные значения матрицы $\Omega(\theta)$, которые пронумерованы так, что $0 \leq \omega_1(\theta) < \omega_2(\theta) < \dots < \omega_s(\theta)$, $s \leq n$, и через $\Pi_\sigma(\theta)$ – соответствующие спектральные проекторы.

ЛЕММА 1 (см. лемму 2.2 в [15]). Пусть выполнены условия **E1** и **E2**. Тогда существует замкнутое множество $C_* \subset \mathbb{T}^d$ такое, что:

- 1) мера Лебега множества C_* равна нулю;
- 2) собственные значения $\omega_\sigma(\theta)$, $\sigma = 1, \dots, s$, имеют постоянную кратность на множестве $\mathbb{T}^d \setminus C_*$;
- 3) на множестве $\mathbb{T}^d \setminus C_*$ справедливо следующее спектральное разложение: $\Omega(\theta) = \sum_{\sigma=1}^s \omega_\sigma(\theta) \Pi_\sigma(\theta)$, где $\Pi_\sigma(\theta)$ – действительно-аналитическая функция переменной θ .

Обозначим через $\nabla^2 \omega_\sigma(\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}^d \setminus C_*$, матрицу вторых частных производных функции $\omega_\sigma(\theta)$.

E4. Функции $D_\sigma(\theta) = \det(\nabla^2 \omega_\sigma(\theta))$, $\theta \in \mathbb{T}^d \setminus C_*$, не равны тождественно нулю при любом $\sigma = 1, \dots, s$.

Положим

$$C_0 = \{\theta \in \mathbb{T}^d: \det \widehat{V}(\theta) = 0\}, \quad C_\sigma = \{\theta \in \mathbb{T}^d \setminus C_*: D_\sigma(\theta) = 0\}. \quad (1.6)$$

Заметим, что лебегова мера множеств C_σ , $\sigma = 0, 1, \dots, s$, равна нулю [15].

E5. Для любых $\sigma \neq \sigma'$ функции $\omega_\sigma(\theta) \pm \omega_{\sigma'}(\theta)$ при $\theta \in \mathbb{T}^d \setminus C_*$ не равны тождественно ненулевым константам.

E6. $\|\widehat{V}^{-1}(\theta)\| \in L^1(\mathbb{T}^d)$.

Очевидно, что если $C_0 = \emptyset$, то условие **E6** выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия **E1–E6** выполнены, в частности, в случае кристалла с взаимодействием в соседних точках [15], в котором матрица взаимодействия $V(z) = (V_{kl}(z))_{k,l=1}^n$ имеет вид

$$V_{kl}(z) = 0 \quad \text{при} \quad k \neq l, \quad V_{kk}(z) = \begin{cases} -\gamma_k & \text{при} \quad |z| = 1, \\ 2d\gamma_k + m_k^2 & \text{при} \quad z = 0, \\ 0 & \text{при} \quad |z| \geq 2, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\gamma_k > 0$ и $m_k \geq 0$. В этом случае уравнение (1.3) принимает вид

$$\ddot{u}_k(z, t) = (\gamma_k \Delta_L - m_k^2) u_k(z, t), \quad k = 1, \dots, n,$$

где через Δ_L мы обозначили дискретный оператор Лапласа на решетке $\mathbb{Z}^d$,

$$\Delta_L u(z) := \sum_{e, |e|=1} (u(z+e) - u(z)).$$

Следовательно, собственные значения матрицы $\Omega(\theta)$ имеют вид

$$\omega_k(\theta) = \sqrt{2\gamma_k(1 - \cos \theta_1) + \dots + 2\gamma_k(1 - \cos \theta_d) + m_k^2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что условия **E1–E5** выполнены, и $\mathcal{C}_* = \emptyset$. Если $m_k > 0$ для всех k , то множество $\mathcal{C}_0$ пусто, и условие **E6** выполнено. Если $m_k = 0$ для некоторого k , то $\mathcal{C}_0 = \{0\}$. В этом случае условие **E6** эквивалентно условию $\omega_k^{-2}(\theta) \in L^1(\mathbb{T}^d)$. Поэтому условия **E1–E6** выполнены, если 1) $d \geq 3$ или 2) $d = 1, 2$ и $m_k > 0$ для всех k .

ЛЕММА 2 (см. предложение 2.5 в [15]). Пусть выполнены условия **E1** и **E2** и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда:

- 1) для любого $Y_0 \in \mathcal{H}_\alpha$ существует единственное решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\alpha)$ задачи Коши (1.4);
- 2) для любого $t \in \mathbb{R}$ оператор $U(t): Y_0 \mapsto Y(t)$ непрерывен на $\mathcal{H}_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы основано на следующей формуле для решения $Y(t)$ задачи (1.4):

$$Y(t) = \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{G}_t(z - z') Y_0(z'), \quad (1.7)$$

где функция Грина $\mathcal{G}_t(z)$ имеет вид

$$\mathcal{G}_t(z) := F_{\theta \rightarrow z}^{-1} [e^{\hat{A}(\theta)t}] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-iz \cdot \theta} e^{\hat{A}(\theta)t} d\theta \quad (1.8)$$

с матрицей

$$\hat{A}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\hat{V}(\theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{T}^d. \quad (1.9)$$

1.2. Семейство начальных мер. Обозначим через $\{\mu_0^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ семейство начальных мер. Чтобы сформулировать основные условия **V1** и **V2** для корреляционных функций начальных мер, введем $(2n \times 2n)$ -матричнозначную функцию $R(r, z) = (R^{ij}(r, z))_{i,j=0}^1$, $r \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{Z}^d$, удовлетворяющую следующим условиям.

I1. Для любых фиксированных $r \in \mathbb{R}^d$ и $i, j = 0, 1$ справедлива следующая оценка: существуют константы $C > 0$ и $\gamma > d$ такие, что

$$|R^{ij}(r, z)| \leq C(1 + |z|)^{-\gamma}, \quad z \in \mathbb{Z}^d. \quad (1.10)$$

I2. Для любого фиксированного $r \in \mathbb{R}^d$ элементы матрицы $\hat{R}(r, \theta)$ удовлетворяют условиям

$$\hat{R}^{00}(r, \theta) \geq 0, \quad \hat{R}^{11}(r, \theta) \geq 0, \quad \hat{R}^{01}(r, \theta) = \hat{R}^{10}(r, \theta)^*, \quad \theta \in \mathbb{T}^d.$$

I3. Для любых $r \in \mathbb{R}^d$ и $\theta \in \mathbb{T}^d$ матрица $\hat{R}(r, \theta)$ неотрицательно определена.

14. Для любых $\theta \in \mathbb{T}^d$ функция $\hat{R}(\cdot, \theta)$ принадлежит классу C^d , а функция

$$r \mapsto \sup_{\theta \in \mathbb{T}^d} \max_{i,j=0,1} \max_{\substack{\alpha_k=0,1, \\ k=1,\dots,d}} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_d}}{\partial r_1^{\alpha_1} \dots \partial r_d^{\alpha_d}} \hat{R}^{ij}(r, \theta) \right|$$

равномерно ограничена на ограниченных множествах.

Для вывода уравнения типа Навье–Стокса мы налагаем дополнительное условие.

14'. Для любого $\theta \in \mathbb{T}^d$ функция $\hat{R}(\cdot, \theta) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, и существуют константы $C > 0$ и $N > d$ такие, что $\sup_{\theta \in \mathbb{T}^d} |\hat{R}(s, \theta)| \leq C(1 + |s|)^{-N}$ при $s \in \mathbb{R}^d$. Здесь через $\tilde{R}(s, \theta)$ обозначается преобразование Фурье функции $\hat{R}(r, \theta)$ по r :

$$\tilde{R}(s, \theta) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{is \cdot r} \hat{R}(r, \theta) dr, \quad s \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in \mathbb{T}^d. \quad (1.11)$$

Это условие может быть ослаблено (см. условие D' в [5] для случая $d = 1$). Можно предположить, что для каждого $\theta \in \mathbb{T}^d$ функция $\hat{R}(\cdot, \theta)$ допускает представление $\hat{R}(r, \theta) = (2\pi)^{-d} \int e^{-is \cdot r} \mu(\theta, ds)$, где $\mu(\theta, ds)$ – некоторая борелевская (комплексно-значная) мера на $\mathbb{R}^d$, зависящая от параметра $\theta \in \mathbb{T}^d$. Кроме того, существуют константы $C > 0$ и $\delta > d$ такие, что для любого $N \in \mathbb{N}$ полная вариация меры $\mu(\theta, \cdot)$ на множестве $|s| \geq N$ оценивается следующим образом:

$$\sup_{\theta \in \mathbb{T}^d} |\mu(\theta, \cdot)|_{|s| \geq N} \leq C(1 + N)^{-\delta}.$$

Обозначим через $\mathbf{E}_0^\varepsilon$ математическое ожидание по мере μ_0^ε и через

$$Q_\varepsilon^{ij}(z, z') = \mathbf{E}_0^\varepsilon(Y^i(z) \otimes Y^j(z')), \quad \varepsilon > 0, \quad z, z' \in \mathbb{Z}^d, \quad i, j = 0, 1,$$

– корреляционные функции меры μ_0^ε . Предположим, что $\mathbf{E}_0^\varepsilon(Y(z)) = 0$, и функции $Q_\varepsilon^{ij}(z, z')$ удовлетворяют следующим условиям.

V1. Для любого $\varepsilon > 0$ и для всех $z, z' \in \mathbb{Z}^d$, $i, j = 0, 1$,

$$|Q_\varepsilon^{ij}(z, z') - R^{ij}(\varepsilon z, z - z')| \leq \min\{C(1 + |z - z'|)^{-\gamma}, \varepsilon b|z - z'|\},$$

где C, b, γ – положительные константы, причем C, γ взяты из оценки (1.10).

V2. Для любого $\varepsilon > 0$ и при всех $z, z' \in \mathbb{Z}^d$, $i, j = 0, 1$ имеет место неравенство $|Q_\varepsilon^{ij}(z, z')| \leq C(1 + |z - z'|)^{-\gamma}$ с теми же константами C и γ , что в оценке (1.10).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть μ_t^ε – вероятностная борелевская мера на $\mathcal{H}_\alpha$, которая является распределением случайного решения $Y(t)$: $\mu_t^\varepsilon(B) = \mu_0^\varepsilon(U(-t)B)$, где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$ и $t \in \mathbb{R}$.

Определим корреляционные функции мер μ_t^ε следующим образом:

$$Q_{\varepsilon,t}^{ij}(z, z') = \int (Y^i(z) \otimes Y^j(z')) \mu_t^\varepsilon(dY) = \mathbf{E}_0^\varepsilon(Y^i(z, t) \otimes Y^j(z', t)), \quad i, j = 0, 1,$$

где $z, z' \in \mathbb{Z}^d$, а $Y^i(z, t)$ – компоненты случайного решения $Y(t) = (Y^0(\cdot, t), Y^1(\cdot, t))$ задачи (1.4).

Пусть T_h , $h \in \mathbb{Z}^d$ – группа пространственных сдвигов: $T_h Y(x) = Y(x - h)$, $x \in \mathbb{Z}^d$. Для всех $\tau \neq 0$, $r \in \mathbb{R}^d$ и $\kappa > 0$ определим меры $\mu_{\tau/\varepsilon^\kappa, r/\varepsilon}^\varepsilon$ следующим образом:

$$\mu_{\tau/\varepsilon^\kappa, r/\varepsilon}^\varepsilon(B) = \mu_{\tau/\varepsilon^\kappa}^\varepsilon(T_{[r/\varepsilon]}B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (см. работу [1]). Пусть $\kappa < 1$. Тогда меры $\mu_{\tau/\varepsilon^\kappa, r/\varepsilon}^\varepsilon$ слабо сходятся к некоторой предельной мере μ_r при $\varepsilon \rightarrow 0$ на пространстве $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha < -d/2$. По определению это означает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f(Y) \mu_{\tau/\varepsilon^\kappa, r/\varepsilon}^\varepsilon(dY) = \int f(Y) \mu_r(dY)$$

для любого ограниченного непрерывного функционала f на $\mathcal{H}_\alpha$. Кроме того доказано, что предельная мера μ_r является гауссовской и не зависит от τ , преобразование Фурье ее корреляционной матрицы имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^s \Pi_\sigma(\theta) (\hat{R}(r, \theta) + C_\sigma(\theta) \hat{R}(r, \theta) C_\sigma^*(\theta)) \Pi_\sigma(\theta),$$

где $\Pi_\sigma(\theta)$ – спектральный проектор, введенный в лемме 1, и

$$C_\sigma(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_\sigma^{-1}(\theta) \\ -\omega_\sigma(\theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = 1, \dots, s. \quad (2.1)$$

2.1. Уравнение типа Эйлера. Пусть $\kappa = 1$, т. е. пространство и время “сжаты” в одном и том же отношении. В этом пункте мы изучим поведение мер $\mu_{\tau/\varepsilon, r/\varepsilon}^\varepsilon$ и их корреляционных функций при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Введем матрицу $q_{\tau, r}(z)$ при $\tau \neq 0$, $r \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{Z}^d$. Ее преобразование Фурье имеет вид

$$\hat{q}_{\tau, r}(\theta) = \sum_{\sigma=1}^s \Pi_\sigma(\theta) (\mathbf{M}_+^\sigma(\tau, r; \theta) + i \mathbf{M}_-^\sigma(\tau, r; \theta)) \Pi_\sigma(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C}_*, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_+^\sigma(\tau, r; \theta) &= \frac{R_+^\sigma(\tau, r; \theta) + C_\sigma(\theta) R_+^\sigma(\tau, r; \theta) C_\sigma^*(\theta)}{2}, \\ \mathbf{M}_-^\sigma(\tau, r; \theta) &= \frac{C_\sigma(\theta) R_-^\sigma(\tau, r; \theta) - R_-^\sigma(\tau, r; \theta) C_\sigma^*(\theta)}{2} \end{aligned}$$

и

$$R_\pm^\sigma(\tau, r; \theta) = \frac{\hat{R}(r + \nabla \omega_\sigma(\theta) \tau, \theta) \pm \hat{R}(r - \nabla \omega_\sigma(\theta) \tau, \theta)}{2}.$$

ТЕОРЕМА 1 (см. теорему 4.1 в [1]). Пусть выполнены условия **I1–I4**, **V1**, **V2** и **E1–E6**. Тогда для любых $r \in \mathbb{R}^d$, $z, z' \in \mathbb{Z}^d$, $\tau \neq 0$ существует предел корреляционных функций мер $\mu_{\tau/\varepsilon, r/\varepsilon}^\varepsilon$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon}([r/\varepsilon] + z, [r/\varepsilon] + z') = q_{\tau, r}(z - z').$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Положим $f_\sigma(\tau, r; \theta) = \Pi_\sigma(\theta) \hat{q}_{\tau, r}(\theta) \Pi_\sigma(\theta)$, $\sigma = 1, \dots, s$. Тогда функция $f_\sigma(\tau, r; \theta)$ является решением уравнения типа Эйлера:

$$\partial_\tau f_\sigma(\tau, r; \theta) = i C_\sigma(\theta) \nabla \omega_\sigma(\theta) \cdot \nabla_r f_\sigma(\tau, r; \theta), \quad r \in \mathbb{R}^d, \quad \tau > 0, \quad (2.3)$$

$$f_\sigma(0, r; \theta) = \frac{1}{2} \Pi_\sigma(\theta) (\hat{R}(r, \theta) + C_\sigma(\theta) \hat{R}(r, \theta) C_\sigma^*(\theta)) \Pi_\sigma(\theta). \quad (2.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предположим, что в дополнение к условиям **V1** и **V2** меры μ_0^ε удовлетворяют условию перемешивания [1]. Тогда для любых $\tau \neq 0$ и $r \in \mathbb{R}^d$ меры $\mu_{\tau/\varepsilon, r/\varepsilon}^\varepsilon$ слабо сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторой гауссовской мере на пространстве $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha < -d/2$ (см. теорему 3.3 в [1]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае $\kappa \in [1, 2)$ корреляционные матрицы мер $\mu_{\tau/\varepsilon^\kappa, r/\varepsilon}^\varepsilon$ сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к тем же матрицам $q_{\tau, r}(z - z')$, которые введены в теореме 1. Этот результат может быть доказан аналогично теореме 1.

Результаты теоремы 1 и следствия 1 могут быть сформулированы с использованием матриц Вигнера. Положим $(\mathcal{V}^k u)(x) = F_{\theta \rightarrow x}^{-1} [\hat{\mathcal{V}}^k(\theta) \hat{u}(\theta)]$, $k \in \mathbb{R}$, и

$$a(x) := \frac{\mathcal{V}^{1/4} u_0(x) + i \mathcal{V}^{-1/4} u_1(x)}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}^n, \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

Определим матрицу Вигнера (порядка $n \times n$) следующим образом:

$$W^\varepsilon(\tau, r; \theta) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} e^{i\theta \cdot y} \mathbf{E}_{\tau/\varepsilon}^\varepsilon (a^*([r/\varepsilon + y/2]) \otimes a([r/\varepsilon - y/2])), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

В силу свойств мер μ_0^ε легко доказать, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W^\varepsilon(0, r; \theta) = W(0, r; \theta),$$

где

$$\begin{aligned} W(0, r; \theta) = & \frac{1}{2} (\Omega^{1/2} \hat{R}^{00}(r, \theta) \Omega^{1/2} + \Omega^{-1/2} \hat{R}^{11}(r, \theta) \Omega^{-1/2} + \\ & + i \Omega^{1/2} \hat{R}^{01}(r, \theta) \Omega^{-1/2} - i \Omega^{-1/2} \hat{R}^{10}(r, \theta) \Omega^{1/2}). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2 (см. теорему 3.2 в [1]). Пусть выполнены условия **V1**, **V2** и **E1–E6**. Тогда для любых $r \in \mathbb{R}^d$ и $\tau \neq 0$ существует предел (в смысле обобщенных функций)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W^\varepsilon(\tau, r; \theta) = W^P(\tau, r; \theta),$$

где

$$W^P(\tau, r; \theta) = \sum_{\sigma=1}^s \Pi_\sigma(\theta) W(0, r - \tau \nabla \omega_\sigma(\theta); \theta) \Pi_\sigma(\theta).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Предельные корреляционные матрицы $\hat{q}_{\tau, r}(\theta) = (\hat{q}_{\tau, r}^{ij}(\theta))$ (см. равенство (2.2)) выражаются через $W^P(\tau, r; \theta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega(\theta) \hat{q}_{\tau, r}^{00}(\theta) &= \Omega(\theta)^{-1} \hat{q}_{\tau, r}^{11}(\theta) = \frac{W^P(\tau, r; \theta) + W^P(\tau, r; -\theta)^*}{2}, \\ \hat{q}_{\tau, r}^{01}(\theta) &= -\hat{q}_{\tau, r}^{10}(\theta) = -\frac{i(W^P(\tau, r; \theta) - W^P(\tau, r; -\theta)^*)}{2}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Матрица $f_\sigma \equiv \Pi_\sigma(\theta) W^P(\tau, r; \theta) \Pi_\sigma(\theta)$, $\sigma = 1, \dots, s$, удовлетворяет уравнению транспорта энергии [1]

$$\begin{aligned} \partial_\tau f_\sigma(\tau, r; \theta) + \nabla \omega_\sigma(\theta) \cdot \nabla_r f_\sigma(\tau, r; \theta) &= 0, & r \in \mathbb{R}^d, & \quad \tau > 0, \\ f_\sigma(0, r; \theta) &= \Pi_\sigma(\theta) W(0, r; \theta) \Pi_\sigma(\theta), & r \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

2.2. Уравнение типа Навье–Стокса. В этом пункте мы изучим асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ корреляционных функций мер $\mu_{\tau/\varepsilon^\kappa, r/\varepsilon}^\varepsilon$ при $\kappa = 2$ и получим следующий член разложения по ε в уравнении (2.3). Введем матрицу $g_\varepsilon(\tau, r; z)$, $z \in \mathbb{Z}^d$, $r \in \mathbb{R}^d$, $\tau \neq 0$, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\hat{g}_\varepsilon(\tau, r; \theta) = \frac{1}{4} \sum_{\sigma=1}^s \Pi_\sigma(\theta) \left[\sum_{+, -} (I \mp iC_\sigma(\theta)) A_{\varepsilon, \sigma}^\mp(\tau, r; \theta) (I \pm iC_\sigma^*(\theta)) \right] \Pi_\sigma(\theta), \quad (2.5)$$

где $\theta \in \mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C}_*$, матрицы $C_\sigma(\theta)$ определены в (2.1),

$$A_{\varepsilon, \sigma}^\mp(\tau, r; \theta) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{R}(r \mp \nabla \omega_\sigma(\theta) \tau / \varepsilon - x, \theta) K_\sigma^\mp(\tau, x, \theta) dx, \quad (2.6)$$

$$K_\sigma^\mp(\tau, x, \theta) = F_{y \rightarrow x}^{-1} [e^{\pm i(\tau/2)y \cdot (\nabla^2 \omega_\sigma(\theta))y}], \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (2.7)$$

(см. также формулу (3.13) ниже).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия **I1–I4'**, **V1**, **V2** и **E1–E6**. Тогда для любых $\tau \neq 0$, $r \in \mathbb{R}^d$ и $z, z' \in \mathbb{Z}^d$ корреляционные функции мер $\mu_{\tau/\varepsilon^2, r/\varepsilon}^\varepsilon$ обладают следующей асимптотикой:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2}([r/\varepsilon] + z, [r/\varepsilon] + z') - g_\varepsilon(\tau, r; z - z')) = 0, \quad (2.8)$$

где матрица $g_\varepsilon(\tau, r; z)$ определена выше.

Эта теорема доказана в разделе 3.

Положим $\tau = \varepsilon t$. Заметим, что из формул (2.5), (2.6) следует $\hat{g}_\varepsilon(\varepsilon t, r; \theta)|_{\varepsilon=0} = \hat{q}_{t, r}(\theta)$, где $\hat{q}_{t, r}(\theta)$ определена в (2.2). Введем следующие обозначения:

$$\nabla^k \omega_\sigma(\theta) \cdot \nabla_r^k f(r) := \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^d \frac{\partial^k \omega_\sigma(\theta)}{\partial \theta_{i_1} \dots \partial \theta_{i_k}} \frac{\partial^k f}{\partial r_{i_1} \dots \partial r_{i_k}}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $r \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, $\sigma = 1, \dots, s$, $\theta \in \mathbb{T}^d$. Из формулы (2.5) вытекает, что матричнозначная функция $f_\sigma \equiv f_\sigma^\varepsilon(t, r; \theta) = \Pi_\sigma(\theta) \hat{g}_\varepsilon(\varepsilon t, r; \theta) \Pi_\sigma(\theta)$ является решением следующего уравнения:

$$\partial_t f_\sigma = iC_\sigma(\theta) \left(\nabla \omega_\sigma(\theta) \cdot \nabla_r f_\sigma + \frac{i\varepsilon}{2} \nabla^2 \omega_\sigma(\theta) \cdot \nabla_r^2 f_\sigma \right) \quad (2.10)$$

с начальным условием (2.4). Это уравнение можно рассматривать как аналог уравнения Навье–Стокса для нашей модели.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Сначала объясним основную идею доказательства. Доказательство опирается на метод “вырезания критических точек” [1], [15], [16] и технику из работы [5], где результат доказан в случае $d = n = 1$. Заметим, что в работе [5] налагается более сильное условие на матрицу V , чем условия **E3**, **E4**. А именно, предполагается, что

$\omega(\theta) > 0$, и множество $\{\theta \in [-\pi, \pi]: \omega''(\theta) = \omega'''(\theta) = 0\}$ пусто. При этих условиях в работе [14] доказана следующая равномерная оценка функции Грина:

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}^d} |\mathcal{G}_t(x)| \leq C(1 + |t|)^{-1/3}. \quad (3.1)$$

Эта оценка, основанная на методе стационарной фазы, играет важную роль в доказательстве, приведенном в работе [5]. Однако если $n > 1$, то функции ω_σ могут быть негладкими, а если $d > 1$, то множество, на котором $\det(\nabla^2 \omega_\sigma(\theta)) = 0$, может иметь сложную структуру. Поэтому равномерная оценка для $\mathcal{G}_t(x)$, подобная (3.1), вообще говоря, невозможна. Чтобы преодолеть эту трудность, введем множество $\mathcal{C} \subset \mathbb{T}^d$ лебеговой меры ноль, которое включает все точки, где либо функции $\omega_\sigma(\theta)$ негладкие, либо их гессиан равен нулю, и разложим функцию $\mathcal{G}_t(x)$ на два слагаемых: $\mathcal{G}_t(x) = \mathcal{G}_t^f(x) + \mathcal{G}_t^g(x)$, где $\hat{\mathcal{G}}_t^f(\theta)$ имеет носитель в окрестности множества $\mathcal{C}$, а $\hat{\mathcal{G}}_t^g(\theta) = 0$ – в окрестности $\mathcal{C}$. Далее мы докажем, что вклад $\mathcal{G}_t^f(x)$ незначителен (см. (3.5)) и $\sup_x |\mathcal{G}_t^g(x)| \sim (1 + |t|)^{-d/2}$ (см. лемму 4). Эта асимптотика играет важную роль, так как заменяет оценку (3.1), а также упрощает некоторые шаги доказательства из работы [5]. В итоге доказательство сходимости (2.8) сводится к нахождению асимптотики (при $\varepsilon \rightarrow 0$) для

$$Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2}^g([r/\varepsilon] + z, [r/\varepsilon] + z') \equiv (\mathcal{G}_{\tau/\varepsilon^2}^g * Q_\varepsilon * \mathcal{G}_{\tau/\varepsilon^2}^g)([r/\varepsilon] + z, [r/\varepsilon] + z')$$

с использованием подхода из работы [5] и методов из работ [1], [15], [16].

3.1. Оценки начальной корреляции. Пусть $p \geq 1$, $n \geq 1$. Обозначим через $\ell^p \equiv \ell^p(\mathbb{Z}^d) \otimes \mathbb{R}^n$ пространство последовательностей $f(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$ с нормой $\|f\|_{\ell^p} = (\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |f(z)|^p)^{1/p}$.

ЛЕММА 3. Пусть выполнено условие **V2**. Тогда справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} |Q_\varepsilon^{ij}(z, z')| &\leq C < \infty && \text{для всех } z \in \mathbb{Z}^d, \\ \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |Q_\varepsilon^{ij}(z, z')| &\leq C < \infty && \text{для всех } z' \in \mathbb{Z}^d, \end{aligned} \quad i, j = 0, 1,$$

где константа C не зависит от $z, z' \in \mathbb{Z}^d$ и $\varepsilon > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любых $\Phi, \Psi \in \ell^2$

$$|\langle Q_\varepsilon(z, z'), \Phi(z) \otimes \Psi(z') \rangle| \leq C \|\Phi\|_{\ell^2} \|\Psi\|_{\ell^2},$$

где константа C не зависит от $\varepsilon > 0$.

3.2. Метод стационарной фазы. Из формул (1.8) и (1.9) следует, что $\hat{\mathcal{G}}_t(\theta)$ имеет вид

$$\hat{\mathcal{G}}_t(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t) \Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где $\Omega = \Omega(\theta)$ – эрмитова матрица, определенная в (1.5). Следовательно, из третьего утверждения леммы 1, формул

$$\cos(\omega_\sigma t) = \frac{e^{i\omega_\sigma t} + e^{-i\omega_\sigma t}}{2}, \quad \sin(\omega_\sigma t) = \frac{e^{i\omega_\sigma t} - e^{-i\omega_\sigma t}}{2i}$$

и равенства (2.1) вытекает, что $\mathcal{G}_t(x)$ может быть переписана в виде

$$\mathcal{G}_t(x) = \sum_{\sigma=1}^s \sum_{+,-} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-ix \cdot \theta} e^{\pm i\omega_\sigma(\theta)t} a_\sigma^\pm(\theta) d\theta, \quad (3.3)$$

где $a_\sigma^\pm(\theta) = \Pi_\sigma(\theta)(I \mp iC_\sigma(\theta))/2$. Для того чтобы применить метод стационарной фазы к интегралу (3.3), требуется гладкость функций $a_\sigma^\pm(\theta)$ и $\omega_\sigma(\theta)$ по θ . Поэтому выберем некоторые гладкие ветви этих функций и вырежем их сингулярности. Положим

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_* \bigcup_{\sigma=1}^s \left(\mathcal{C}_\sigma \bigcup_{i=1}^d \left\{ \theta \in \mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C}_* : \frac{\partial^2 \omega_\sigma(\theta)}{\partial \theta_i^2} = 0 \right\} \right),$$

где множество $\mathcal{C}_*$ введено в лемме 1, множества $\mathcal{C}_0$ и $\mathcal{C}_\sigma$ определены в (1.6). Очевидно, что $\text{mes } \mathcal{C} = 0$ [15]. Зафиксируем $\delta > 0$ и выберем разбиение единицы:

$$f(\theta) + g(\theta) = 1, \quad \theta \in \mathbb{T}^d, \quad (3.4)$$

где f и g – неотрицательные функции на $C_0^\infty(\mathbb{T}^d)$ такие, что

$$\text{supp } f \subset \{\theta \in \mathbb{T}^d : \text{dist}(\theta, \mathcal{C}) < \delta\}, \quad \text{supp } g \subset \{\theta \in \mathbb{T}^d : \text{dist}(\theta, \mathcal{C}) \geq \delta/2\}.$$

Теперь представим $\mathcal{G}_t(x)$ в виде $\mathcal{G}_t(x) = \mathcal{G}_t^f(x) + \mathcal{G}_t^g(x)$, где

$$\mathcal{G}_t^f(x) = F_{\theta \rightarrow x}^{-1}[f(\theta)\widehat{\mathcal{G}}_t(\theta)], \quad \mathcal{G}_t^g(x) = F_{\theta \rightarrow x}^{-1}[g(\theta)\widehat{\mathcal{G}}_t(\theta)].$$

Из равенства Парсеваля, формулы (3.2) и условия **Е6** вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_t^f(\cdot)\|_{\ell^2}^2 &\leq C \int_{\text{dist}(\theta, \mathcal{C}) < \delta} |\widehat{\mathcal{G}}_t(\theta)|^2 d\theta \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \\ \|\mathcal{G}_t^g(\cdot)\|_{\ell^2}^2 &\leq C \int_{\mathbb{T}^d} |\widehat{\mathcal{G}}_t(\theta)|^2 d\theta \leq C_1 < \infty \end{aligned} \quad (3.5)$$

равномерно по $t \in \mathbb{R}$. Из метода стационарной фазы вытекают следующие оценки для функции $\mathcal{G}_t^g(x)$.

ЛЕММА 4 (см. лемму 4.2 в [1]). Пусть выполнены условия **Е1–Е4**, **Е6**. Тогда:

- 1) $\sup_{x \in \mathbb{Z}^d} |\mathcal{G}_t^g(x)| \leq Ct^{-d/2}$;
- 2) для любого $p > 0$ найдутся $C_p, \gamma_g > 0$ такие, что $|\mathcal{G}_t^g(x)| \leq C_p(|t| + |x| + 1)^{-p}$ при $|x| \geq \gamma_g t$.

3.3. Доказательство теоремы 3. Доказательство теоремы разобьем на следующие этапы.

ШАГ 1. Из представления (1.7) вытекает, что

$$Q_{\varepsilon,t}(z, z') = \mathbf{E}_0^\varepsilon(Y(z, t) \otimes Y(z', t)) = \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{G}_t(z - x) Q_\varepsilon(x, y) \mathcal{G}_t(z' - y)^T$$

для любых $t \in \mathbb{R}$, $z, z' \in \mathbb{Z}^d$. Применим разбиение (3.4), следствие 3 и оценку (3.5) и получим

$$Q_{\varepsilon,t}(z, z') = \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{G}_t^g(z - x) Q_\varepsilon(x, y) \mathcal{G}_t^g(z' - y)^T + o(1),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$ и $z, z' \in \mathbb{Z}^d$. В частности, полагая $t = \tau/\varepsilon^2$, $z = [r/\varepsilon] + l$ и $z' = [r/\varepsilon] + p$, получаем

$$\begin{aligned} Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2} &\equiv Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2}([r/\varepsilon] + l, [r/\varepsilon] + p) = \\ &= \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{G}_{\tau/\varepsilon^2}^g([r/\varepsilon] + l - x) Q_\varepsilon(x, y) \mathcal{G}_{\tau/\varepsilon^2}^g([r/\varepsilon] + p - y)^T + o(1) = \\ &= \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{G}_{\tau/\varepsilon^2}^g(l + x) Q_\varepsilon([r/\varepsilon] - x, [r/\varepsilon] - y) \mathcal{G}_{\tau/\varepsilon^2}^g(p + y)^T + o(1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Положим $c = \gamma_g + \max\{|l|, |p|\}$. Тогда из второго утверждения леммы 4 и условия **V2** вытекает, что суммирование в ряде (3.6) можно проводить только по области $x, y \in [-c\tau/\varepsilon^2, c\tau/\varepsilon^2]^d$.

ШАГ 2. Асимптотика функции $Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2}$ не изменится, если в правой части (3.6) заменить $Q_\varepsilon([r/\varepsilon] - x, [r/\varepsilon] - y)$ на $R(\varepsilon[r/\varepsilon] - \varepsilon x, y - x)$. Действительно, во-первых, из первого утверждения леммы 4 и условия **V1** следует, что

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{x, y \in [-c\tau/\varepsilon^2, c\tau/\varepsilon^2]^d} \mathcal{G}_{\tau/\varepsilon^2}^g(l + x) (Q_\varepsilon([r/\varepsilon] - x, [r/\varepsilon] - y) - R(\varepsilon[r/\varepsilon] - \varepsilon x, y - x)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \mathcal{G}_{\tau/\varepsilon^2}^g(p + y)^T \right| \leq C \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \min\{(1 + |x - y|)^{-\gamma}, \varepsilon b|x - y|\}. \end{aligned}$$

Во-вторых,

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \min\{(1 + |x - y|)^{-\gamma}, \varepsilon b|x - y|\} \sim C\varepsilon^{(\gamma-d)/(\gamma+1)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

так как $\gamma > d$.

Используя лемму 4 и свойства функции R , заменим область суммирования в рядах на $x, y \in \mathbb{Z}^d$. Следовательно,

$$Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{G}_{\tau/\varepsilon^2}^g(l + x) \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} R(\varepsilon[r/\varepsilon] - \varepsilon x, y - x) \mathcal{G}_{\tau/\varepsilon^2}^g(p + y)^T + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

ШАГ 3. Применяя равенство Парсеваля, перепишем $Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2}$ в виде

$$\begin{aligned} Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2} &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^{2d}} e^{-il \cdot \theta' + ip \cdot \theta + ix \cdot (\theta - \theta')} \widehat{\mathcal{G}}_{\tau/\varepsilon^2}^g(\theta') \widehat{R}(\varepsilon[r/\varepsilon] - \varepsilon x, \theta) \times \\ &\quad \times \widehat{\mathcal{G}}_{\tau/\varepsilon^2}^g(\theta)^* d\theta d\theta' + o(1). \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных в последнем интеграле, $(\theta, \theta') \rightarrow (\theta, \varphi)$, $\varphi = \theta - \theta'$, и перепишем $Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2}$ в виде

$$Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i(l-p) \cdot \theta} I_\varepsilon(\theta) \widehat{\mathcal{G}}_{\tau/\varepsilon^2}^g(\theta)^* d\theta + o(1), \quad (3.7)$$

где $I_\varepsilon(\theta)$ обозначает матричнозначную функцию

$$I_\varepsilon(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} e^{i(l+x) \cdot \varphi} \widehat{\mathcal{G}}_{\tau/\varepsilon^2}^g(\theta - \varphi) \widehat{R}(\varepsilon[r/\varepsilon] - \varepsilon x, \theta) d\varphi. \quad (3.8)$$

Применим формулу суммирования Пуассона (см., например, [20]) и получим

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{ix \cdot \varphi} \widehat{R}(\varepsilon[r/\varepsilon] - \varepsilon x, \theta) = \varepsilon^{-d} e^{i[r/\varepsilon] \cdot \varphi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \widetilde{R}(-\varphi/\varepsilon - 2\pi n/\varepsilon, \theta),$$

где $\widetilde{R}(\cdot, \theta)$ обозначает преобразование Фурье функции $\widehat{R}(\cdot, \theta)$ (см. (1.11)). Подставим последнее выражение в (3.8) и получим

$$I_\varepsilon(\theta) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(l+[r/\varepsilon]) \cdot \varphi} \widehat{\mathcal{G}}_{\tau/\varepsilon^2}^g(\theta - \varphi) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \widetilde{R}(-\varphi/\varepsilon - 2\pi n/\varepsilon, \theta) \right) d\varphi. \quad (3.9)$$

ШАГ 4. Из условия **I4'** следует, что

$$\varepsilon^{-d} \sum_{n \neq 0} \widetilde{R}(-\varphi/\varepsilon - 2\pi n/\varepsilon, \theta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

равномерно по $\theta \in \mathbb{T}^d$, $\varphi \in [-\pi, \pi]^d$. Таким образом, из (3.9) и (3.10) вытекает, что

$$I_\varepsilon(\theta) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\varphi \cdot (l+[r/\varepsilon])} \widehat{\mathcal{G}}_{\tau/\varepsilon^2}^g(\theta - \varphi) \widetilde{R}(-\varphi/\varepsilon, \theta) d\varphi + o(1).$$

Сделаем замену переменных $\varphi \rightarrow -\varepsilon\varphi$ в последнем интеграле, получим

$$I_\varepsilon(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi/\varepsilon, \pi/\varepsilon]^d} e^{-i\varepsilon\varphi \cdot (l+[r/\varepsilon])} \widehat{\mathcal{G}}_{\tau/\varepsilon^2}^g(\theta + \varepsilon\varphi) \widetilde{R}(\varphi, \theta) d\varphi + o(1).$$

Применим представление (3.3) для $\widehat{\mathcal{G}}_t^g(\theta)$:

$$\widehat{\mathcal{G}}_t^g(\theta) = \sum_{\sigma=1}^s \sum_{+,-} e^{\pm i\omega_\sigma(\theta)t} h_\sigma^\mp(\theta), \quad h_\sigma^\mp(\theta) = g(\theta) \Pi_\sigma(\theta) \frac{I \mp iC_\sigma(\theta)}{2}. \quad (3.11)$$

Используя это соотношение, перепишем $I_\varepsilon(\theta)$ в виде

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\theta) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\sigma=1}^s \sum_{+,-} \int_{[-\pi/\varepsilon, \pi/\varepsilon]^d} e^{-i\varepsilon\varphi \cdot (l+[r/\varepsilon])} e^{\pm i\omega_\sigma(\theta+\varepsilon\varphi)\tau/\varepsilon^2} h_\sigma^\mp(\theta + \varepsilon\varphi) \widetilde{R}(\varphi, \theta) d\varphi + \\ &+ o(1) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\sigma=1}^s \sum_{+,-} h_\sigma^\mp(\theta) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\varphi \cdot r} e^{\pm i\omega_\sigma(\theta+\varepsilon\varphi)\tau/\varepsilon^2} \widetilde{R}(\varphi, \theta) d\varphi + o(1) \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как $e^{-i\varepsilon\varphi \cdot l} - 1 = O(\varepsilon)$ и $e^{-i\varphi \cdot \varepsilon[r/\varepsilon]} - e^{-i\varphi \cdot r} = O(\varepsilon)$.

ШАГ 5. Применим разложение Тейлора для $\omega_\sigma(\theta + \varepsilon\varphi)$:

$$\omega_\sigma(\theta + \varepsilon\varphi) \frac{\tau}{\varepsilon^2} = \omega_\sigma(\theta) \frac{\tau}{\varepsilon^2} + \varphi \cdot \nabla \omega_\sigma(\theta) \frac{\tau}{\varepsilon} + \frac{\tau}{2} \varphi \cdot H_\sigma(\theta) \varphi + O(\varepsilon),$$

где $H_\sigma(\theta)$ обозначает матрицу $\nabla^2 \omega_\sigma(\theta)$. Следовательно,

$$I_\varepsilon(\theta) = \sum_{\sigma=1}^s \sum_{+,-} h_\sigma^\mp(\theta) e^{\pm i\omega_\sigma(\theta)\tau/\varepsilon^2} A_{\varepsilon, \sigma}^\mp(\tau, r; \theta) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

где (см. формулы (2.6) и (2.7))

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon, \sigma}^{\mp}(\tau, r; \theta) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\varphi \cdot (r \mp \nabla \omega_{\sigma}(\theta) \tau / \varepsilon)} e^{\pm i(\tau/2) \varphi \cdot H_{\sigma}(\theta) \varphi} \tilde{R}(\varphi, \theta) d\varphi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{R}(r \mp \nabla \omega_{\sigma}(\theta) \tau / \varepsilon - x, \theta) K_{\sigma}^{\mp}(\tau, x, \theta) dx. \end{aligned}$$

Функция $K_{\sigma}^{\mp}(\tau, x, \theta)$, $\tau > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\theta \in \mathbb{T}^d \setminus C$, имеет вид

$$K_{\sigma}^{\mp}(\tau, x, \theta) = F_{\varphi \rightarrow x}^{-1} [e^{\pm i(\tau/2) \varphi \cdot H_{\sigma}(\theta) \varphi}] = \frac{e^{\pm i\pi s/4}}{(2\pi\tau)^{d/2}} \frac{e^{\mp ix \cdot H_{\sigma}^{-1}(\theta)x/(2\tau)}}{\sqrt{|D_{\sigma}(\theta)|}}, \quad (3.13)$$

где $D_{\sigma}(\theta) = \det H_{\sigma}(\theta)$ и s – сигнатура матрицы $H_{\sigma}(\theta)$.

Наконец, подставим (3.12) в (3.7), применим разложение (3.11) к $\hat{\mathcal{G}}_{\tau/\varepsilon^2}^g(\theta)^*$ и получим

$$\begin{aligned} Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i(l-p) \cdot \theta} \left(\sum_{\sigma=1}^s \sum_{+,-} h_{\sigma}^{\mp}(\theta) e^{\pm i\omega_{\sigma}(\theta) \tau / \varepsilon^2} A_{\varepsilon, \sigma}^{\mp}(\tau, r; \theta) \right) \times \\ &\times \left(\sum_{\sigma'=1}^s \sum_{+,-} e^{\pm i\omega_{\sigma'}(\theta) \tau / \varepsilon^2} h_{\sigma'}^{\mp}(\theta)^* \right) d\theta + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, чтобы найти асимптотику $Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2}$, достаточно изучить поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ следующих интегралов, входящих в $Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^2}$:

$$I_{\sigma\sigma'}^{\pm}(\varepsilon) \equiv \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i(l-p) \cdot \theta} e^{i(\omega_{\sigma}(\theta) \pm \omega_{\sigma'}(\theta)) \tau / \varepsilon^2} h_{\sigma}^{\mp}(\theta) A_{\varepsilon, \sigma}^{\mp}(\tau, r; \theta) h_{\sigma'}^{\mp}(\theta)^* d\theta,$$

$\sigma, \sigma' = 1, \dots, s$. Заметим, что функция $h_{\sigma}^{\mp}(\theta) A_{\varepsilon, \sigma}^{\mp}(\tau, r; \theta) h_{\sigma'}^{\mp}(\theta)^* \in L^1(\mathbb{T}^d)$, что вытекает из условий **E6** и **I4'**. Кроме того, тождества $\omega_{\sigma}(\theta) \pm \omega_{\sigma'}(\theta) \equiv \text{const}_{\pm}$ в экспоненте в случае $\text{const}_{\pm} \neq 0$ невозможны в силу условия **E5**. Осциллирующие интегралы с $\omega_{\sigma}(\theta) \pm \omega_{\sigma'}(\theta) \not\equiv \text{const}_{\pm}$ стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу теоремы Лебега–Римана. Следовательно, только интегралы с $\omega_{\sigma}(\theta) - \omega_{\sigma'}(\theta) \equiv 0$ вносят вклад, так как если $\omega_{\sigma}(\theta) + \omega_{\sigma'}(\theta) \equiv 0$, то $\omega_{\sigma}(\theta) \equiv \omega_{\sigma'}(\theta) \equiv 0$, что невозможно в силу условия **E4**. Таким образом, если $\sigma \neq \sigma'$, то $I_{\sigma\sigma'}^{\pm}(\varepsilon) = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если $\sigma = \sigma'$, то $I_{\sigma\sigma}^{+}(\varepsilon) = o(1)$ и

$$I_{\sigma\sigma}^{-}(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i(l-p) \cdot \theta} h_{\sigma}^{-}(\theta) A_{\varepsilon, \sigma}^{-}(\tau, r; \theta) h_{\sigma}^{+}(\theta)^* d\theta + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Это завершает доказательство асимптотики (2.8).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поправки высшего порядка

Чтобы получить дополнительные члены порядка ε^2 , ε^3 и т. д. в уравнении (2.10), необходимо изучить асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ корреляционных функций мер $\mu_{\tau/\varepsilon^{\kappa}, r/\varepsilon}^{\varepsilon}$ при $\kappa > 2$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\kappa \geq 2$, $r \in \mathbb{R}^d$, $\tau > 0$. Тогда для всех $z, z' \in \mathbb{Z}^d$

$$Q_{\varepsilon, \tau/\varepsilon^{\kappa}}([r/\varepsilon] + z, [r/\varepsilon] + z') - g_{\varepsilon}^{[\kappa]}(\tau, r; z - z') \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Преобразование Фурье матрицы $g_\varepsilon^k(\tau, r; z)$, $k = 2, 3, \dots$, имеет вид

$$\hat{g}_\varepsilon^k(\tau, r; \theta) = \frac{1}{4} \sum_{\sigma=1}^s \Pi_\sigma(\theta) (I \mp iC_\sigma(\theta)) A_{\varepsilon, \sigma}^{\mp, k}(\tau, r; \theta) (I \pm iC_\sigma^*(\theta)) \Pi_\sigma(\theta),$$

где

$$A_{\varepsilon, \sigma}^{\mp, k}(\tau, r; \theta) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{R}(r \mp \nabla \omega_\sigma(\theta) \tau / \varepsilon^{k-1} - x, \theta) K_{\varepsilon, \sigma}^{\mp, k}(\tau, x, \theta) dx, \quad \theta \in \mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C},$$

$$K_{\varepsilon, \sigma}^{\mp, k}(\tau, x, \theta) = F_{y \rightarrow x}^{-1} \left[\exp \left\{ \pm i \frac{\tau}{\varepsilon^{k-2}} \left(\frac{\nabla^2 \omega_\sigma(\theta) \cdot y^2}{2!} + \dots + \frac{\nabla^k \omega_\sigma(\theta) \cdot y^k}{k!} \right) \right\} \right]$$

и по определению

$$\nabla^k \omega_\sigma(\theta) \cdot y^k := \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^d \frac{\partial^k \omega_\sigma(\theta)}{\partial \theta_{i_1} \dots \partial \theta_{i_k}} y_{i_1} \dots y_{i_k}, \quad y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Заметим, что при $k = 2$ матрица $\hat{g}_\varepsilon^k(\tau, r; \theta)$ совпадает с матрицей $\hat{g}_\varepsilon(\tau, r; \theta)$ из формулы (2.5). Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

Положим $\tau = \varepsilon^{k-1}t$, $k \geq 2$. Тогда матрица $\Pi_\sigma(\theta) \hat{g}_\varepsilon^k(\varepsilon^{k-1}t, r; \theta) \Pi_\sigma(\theta)$ (обозначим ее через $f_\sigma^\varepsilon(t, r; \theta)$) является решением следующего уравнения:

$$\partial_t f_\sigma^\varepsilon(t, r; \theta) = iC_\sigma(\theta) P_\varepsilon^k(\theta, \partial_r) f_\sigma^\varepsilon(t, r; \theta), \quad t > 0, \quad r \in \mathbb{R}^d, \quad (\text{II.1})$$

с начальным условием (2.4). Здесь $P_\varepsilon^k(\theta, \partial_r) := \sum_{p=1}^k \frac{(i\varepsilon)^{p-1}}{p!} \nabla^p \omega_\sigma(\theta) \cdot \nabla_r^p$ (см. обозначение (2.9)). Обозначим через f_σ^{ij} , $i, j = 0, 1$, элементы матрицы $f_\sigma^\varepsilon(t, r; \theta)$. Тогда $f_\sigma^{11} = \omega_\sigma^2(\theta) f_\sigma^{00}$, $f_\sigma^{10} = -f_\sigma^{01}$, и уравнения (II.1) могут быть переписаны в виде

$$\partial_t f_\sigma^{00} = -\frac{i}{\omega_\sigma(\theta)} P_\varepsilon^k(\theta, \partial_r) f_\sigma^{01}, \quad \partial_t f_\sigma^{01} = i\omega_\sigma(\theta) P_\varepsilon^k(\theta, \partial_r) f_\sigma^{00}.$$

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 09-01-00288).

Список литературы

- [1] Т. В. Dudnikova, H. Spohn, *Markov Process. Relat. Fields*, **12**:4 (2006), 645–578, arXiv: math-ph/0505031.
- [2] Т. В. Dudnikova, *J. Math. Phys.*, **51**:8 (2010), 083301, 25 pp., arXiv:0905.4806.
- [3] C. Boldrighini, R. L. Dobrushin, Yu. M. Suhov, *J. Statist. Phys.*, **31**:3 (1983), 577–616.
- [4] R. L. Dobrushin, A. Pellegrinotti, Yu. M. Suhov, L. Triolo, *J. Statist. Phys.*, **43**:3–4 (1986), 571–607.
- [5] R. L. Dobrushin, A. Pellegrinotti, Yu. M. Suhov, L. Triolo, *J. Statist. Phys.*, **52**:1–2 (1988), 423–439.
- [6] R. L. Dobrushin, A. Pellegrinotti, Yu. M. Suhov, *J. Statist. Phys.*, **61**:1–2 (1990), 387–402.
- [7] S. Olla, R. S. R. Varadhan, H.-T. Yau, *Commun. Math. Phys.*, **155**:3 (1993), 523–560.
- [8] R. Esposito, R. Marra, H.-T. Yau, *Commun. Math. Phys.*, **182**:2 (1996), 395–455.
- [9] J. Quastel, H.-T. Yau, *Ann. Math.*, **148**:1 (1998), 51–108.
- [10] A. De Masi, N. Ianiro, A. Pellegrinotti, E. Presutti, “A survey of the hydrodynamical behavior of many-particle systems”, *Nonequilibrium Phenomena II: From Stochastics to Hydrodynamics*, Stud. Statist. Mech., **XI**, eds. J. L. Lebowitz, E. W. Montroll, North-Holland Phys. Publ., Amsterdam, 1984, 123–294.

- [11] Р. Л. Добрушин, Я. Г. Синай, Ю. М. Сухов, “Динамические системы статистической механики”, *Динамические системы – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **2**, ВИНТИ, М., 1985, 235–284.
- [12] J. Fritz, *An Introduction to the Theory of Hydrodynamic Limits*, Lect. Math. Sci., **18**, The Graduate School of Mathematics, Univ. Tokyo, Tokyo, 2001.
- [13] H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*, Texts Monogr. Phys., **XI**, Springer, Berlin, 1991.
- [14] C. Boldrighini, A. Pellegrinotti, L. Triolo, *J. Statist. Phys.*, **30**:1 (1983), 123–155.
- [15] T. V. Dudnikova, A. I. Komech, H. Spohn, *J. Math. Phys.*, **44**:6 (2003), 2596–2620, arXiv: math-ph/0210039.
- [16] T. V. Dudnikova, A. I. Komech, N. Mauser, *J. Statist. Phys.*, **114**:3–4 (2004), 1035–1083, arXiv: math-ph/0211017.
- [17] T. V. Dudnikova, A. I. Komech, H. Spohn, *Markov Process. Relat. Fields*, **8**:1 (2002), 43–80, arXiv: math-ph/0508044.
- [18] Т. В. Дудникова, А. И. Комеч, *Теория вероятн. и ее примен.*, **50**:4 (2005), 675–710.
- [19] T. V. Dudnikova, A. I. Komech, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 301–325, arXiv: math-ph/0508053.
- [20] Э. Ч. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*, Гостехиздат, М., Л., 1948.

Поступила в редакцию 19.01.2011,
после доработки 26.02.2011