Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Халилов, Ки Ын Ли, Дискретные спектры дираковского гамильтониана в кулоновских потенциалах и потенциалах Ааронова–Бома в $2 + 1$ измерениях, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 3, 368–390

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6736>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:26:32

© 2011 г.

В. Р. Халилов*, Ки Ын Ли*

ДИСКРЕТНЫЕ СПЕКТРЫ ДИРАКОВСКОГО ГАМИЛЬТОНИАНА В КУЛОНОВСКИХ ПОТЕНЦИАЛАХ И ПОТЕНЦИАЛАХ ААРОНОВА–БОМА В $2 + 1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Найдены все самосопряженные дираковские гамильтонианы в кулоновских потенциалах и потенциалах Ааронова–Бома в $2 + 1$ измерениях с учетом спина фермиона. Получены уравнения, неявно определяющие спектры, и построены собственные функции для всех самосопряженных дираковских гамильтонианов в указанных внешних полях. В некоторых случаях решения уравнений для спектров найдены явно.

Ключевые слова: симметрический оператор, самосопряженные расширения гамильтониана, кулоновский потенциал в $2 + 1$ измерениях, потенциал Ааронова–Бома, спин.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к физическим явлениям в квантовых системах релятивистских фермионов в присутствии интенсивных внешних полей в пространствах пониженных размерностей, проявляемый в последние годы, вызван открытием ряда эффектов физики конденсированных сред [1], возможностью применения полученных для этих моделей результатов для изучения эффекта Ааронова–Бома (АБ) [2], квантового эффекта Холла [3], высокотемпературной сверхпроводимости [4], [5], а также физических процессов в присутствии космических струн [6]–[8]. В частности, поведение фермионов в поле космической струны можно описать решениями уравнения Дирака в потенциале АБ в $2 + 1$ измерениях [6]. Решения уравнения Дирака для фермионов нулевой массы в $2 + 1$ измерениях описывают состояния фермионов в графене [9]–[11].

Известно [12], что гамильтониан в уравнении Шредингера с потенциалом АБ сингулярен и поэтому требует дополнительного доопределения для того, чтобы его можно было трактовать как самосопряженный квантово-механический оператор. Для этого необходимо указать область его определения в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых функций. Впервые самосопряженный гамильтониан

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: khalilov@phys.msu.ru, skyangel26@gmail.com.

для этой задачи был построен в работе [12]. В большинстве физически интересных задач квантовой механики гамильтонианы являются сингулярными операторами, а в естественных областях определения – только симметрическими операторами. Поэтому возникает задача построения самосопряженного гамильтониана во всей области определения. Для решения этой задачи нужно найти все самосопряженные расширения данного симметрического оператора и затем выделить корректный самосопряженный гамильтониан с помощью физически приемлемых граничных условий в точке сингулярности гамильтониана.

Впервые задача построения самосопряженного дираковского гамильтониана в потенциале АБ в $2+1$ измерениях была решена в работах [7], [8]. Так, в работе [7] было показано, что область определения самосопряженного расширения гамильтониана наряду с регулярными может содержать сингулярные квадратично-интегрируемые при $r = 0$ функции, а также было найдено формальное решение, описывающее связанное состояние фермиона в поле космической струны.

Другой интересный с точки зрения физики случай сингулярного гамильтониана – дираковский гамильтониан в сильном кулоновском поле точечного заряда (источника). Построение самосопряженного гамильтониана в этом поле во всей области позволит ответить на вопрос о стабильности вакуума квантовой электродинамики (КЭД) в присутствии сильного кулоновского поля. Важнейший вопрос о стабильности вакуума был всесторонне изучен в многочисленных работах (см. работы [13]–[17] и ссылки в них) в $3+1$ измерениях и в работах [18], [19] – в $2+1$ измерениях. Во всех этих работах вместо точечного источника рассматривался кулоновский потенциал, обрезанный на малом расстоянии R от источника, что фактически эквивалентно постановке граничного условия в точке R . Физически постановка такого граничного условия означает учет конечных размеров источника поля. Такой способ определения самосопряженного гамильтониана называют физической регуляризацией [12].

Напомним, что энергия электрона в основном состоянии в кулоновском поле, заданном 4-вектор-потенциалом $A^0(r) = -a/(e_0 r)$, $\mathbf{A} = 0$, $a > 0$ ($-e_0 < 0$ – заряд электрона),

$$E_g = m\sqrt{1 - a^2},$$

обращается в нуль при $a = 1$, а при $a > 1$ интерпретация этой формулы как энергии электрона вообще теряет смысл. В кулоновском потенциале, обрезанном на малом расстоянии R , низший уровень энергии электрона становится отрицательным при $a > 1$ и при дальнейшем увеличении a может достичь границы нижнего континуума (отрицательных) энергий $-m$, а значение $a = a_c$, при котором низший уровень энергии электрона равен $-m$, называют критическим зарядом для основного состояния. При $a > a_c$ низший уровень энергии электрона пересекает границу нижнего континуума энергий, а вакуум КЭД в сильном кулоновском потенциале перестраивается так, что в вакуумной оболочке кулоновского центра появляется новое состояние с энергией $E < -m$ и проекцией спина $s = \pm 1$. С точки зрения КЭД вакуум при $a > a_c$ становится неустойчивым, что приводит к рождению позитронов, и одновременно приобретает отрицательный электрический заряд, который, очевидно, будет равен двум зарядам электрона [13]–[17]. В задаче о поведении электрона в сильном (обрезанном) кулоновском поле в $2+1$ измерениях картина похожа, но энергия электрона в основном состоянии становится равной нулю при $a = 1/2$ [18], [19].

Впервые самосопряженные дираковские гамильтонианы в сильном кулоновском поле точечного источника были построены в работе [20].

В работе [19] установлено, что радиальные гамильтонианы в кулоновском поле точечного источника в $3 + 1$ измерениях и в кулоновских и АБ-потенциалах в $2 + 1$ измерениях фактически одинаковы за исключением того, что гамильтониан в $2 + 1$ измерениях содержит параметр, характеризующий спин фермиона, явно. Это позволяет изучить влияние спина частицы на релятивистские связанные состояния фермиона в двумерных кулоновских полях и в потенциале АБ. Здесь нелишне напомнить, что решения уравнения Дирака в $2 + 1$ измерениях представляют собой спинор, верхняя и нижняя компоненты которого интерпретируются соответственно как положительно- и отрицательно-частотные состояния. Для описания спина фермиона в двухкомпонентное уравнение Дирака в потенциале АБ вводится спиновый параметр.

В настоящей статье мы представляем математически строгое квантово-механическое описание движения фермиона в двумерных кулоновских (векторном и скалярном) полях и в потенциале АБ. Для этого мы находим все самосопряженные дираковские гамильтонианы в кулоновских и АБ-потенциалах в $2 + 1$ измерениях с учетом спина фермиона. Затем мы получаем уравнения, неявно определяющие спектры дираковских гамильтонианов в указанных внешних полях, и обсуждаем вопрос о собственных функциях всех самосопряженных гамильтонианов. Решение этих задач проводится методами теории самосопряженных расширений (фон Неймана) симметрических операторов и направляющих функционалов Крейна, развитыми в работах [20]–[23]. В настоящей работе мы используем результаты статьи [20], где эти методы получили дальнейшее развитие.

Мы используем систему единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

2. САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ГАМИЛЬТониАН В КУЛОНОВСКИХ И АБ-ПОТЕНЦИАЛАХ В $2 + 1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

В случае двух пространственных измерений пространство квантовых состояний частиц есть гильбертово пространство $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$ квадратично-интегрируемых функций $\Psi(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y)$ со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \Psi_1^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad d\mathbf{r} = dx dy. \quad (1)$$

Уравнение Дирака в $2 + 1$ измерениях для фермиона массы m и заряда $e = -e_0 < 0$ в векторном и скалярном потенциалах A_μ и U имеет вид

$$(\gamma^\mu P_\mu - m - U)\Psi = 0, \quad (2)$$

где $P_\mu = -i\partial_\mu - eA_\mu$ – оператор обобщенного момента фермиона, а матрицы Дирака γ^μ удобно определить через двумерные матрицы Паули как

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2. \quad (3)$$

Здесь параметр s характеризует два значения проекции спина фермиона $s = \pm 1$ [24].

Гамильтониан уравнения Дирака с параметром s для фермиона в конфигурации потенциала АБ

$$A_0 = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\varphi = \frac{B}{r}, \quad (4)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg(y/x)$, в векторном и скалярном потенциалах A_μ и U , заданных формулами

$$A_0(r) = \frac{a}{e_0 r}, \quad A_r = 0, \quad A_\varphi = 0; \quad U(r) = -\frac{b}{r}, \quad a, b > 0, \quad (5)$$

есть

$$H_D = \sigma_1 P_2 - s\sigma_2 P_1 + \sigma_3 (m + U(r)) - e_0 A_0(r). \quad (6)$$

Здесь векторный потенциал A_μ в операторе обобщенного импульса P_μ есть сумма выражений (4) и (5). Напомним, что B характеризует магнитный поток: $\Phi = 2\pi B$, причем если eB – целое число N , то полный магнитный поток $\Phi = 2\pi B$ квантован и $\Phi = \Phi_0 N$, где $\Phi_0 \equiv 2\pi/e_0$.

Оператор Гамильтона (6) нужно определить как самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых спиноров $\Psi(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y)$ со скалярным произведением (1). Собственные значения оператора полного углового момента $J \equiv L_z + s\sigma_3/2$, где $L_z \equiv -i\partial/\partial\varphi$ являются сохраняющимися величинами (оператор J коммутирует с H_D). Следовательно, можно рассматривать уравнение (2) отдельно в каждом собственном подпространстве J , а полное гильбертово пространство представить как прямую ортогональную сумму подпространств J .

Решения уравнения (2) в потенциалах (4) и (5) ищем в виде (см. работы [18], [25], [26])

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iEt + il\varphi} \psi(r, \varphi), \quad (7)$$

где вещественная величина E – энергия фермиона, l – целое число, а $\psi(r, \varphi)$ – двух-компонентная функция (т. е. спинор)

$$\psi(r, \varphi) = r^{-1/2} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) e^{is\varphi} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Волновая функция Ψ является собственной функцией оператора полного углового момента J с собственным значением $j = l + s/2$.

Представляя спинор в виде (7), мы сводим уравнение (2) к радиальному уравнению Дирака в потенциалах (4) и (5) для функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$ с формальным радиальным гамильтонианом $\check{h}$:

$$\check{h} = is\sigma_2 \frac{d}{dr} + \sigma_1 \frac{l + \mu + s/2}{r} - \frac{a}{r} + \left(m - \frac{b}{r}\right) \sigma_3, \quad (9)$$

где $\mu \equiv e_0 B$. Тогда дублет

$$F = \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix} \quad (10)$$

удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \check{h} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} m - (a+b)/r & sd/dr + (l + \mu + s/2)/r \\ -sd/dr + (l + \mu + s/2)/r & -m - (a-b)/r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix} = \\ &= E \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Нам понадобятся решения этого уравнения с комплексным параметром E , вещественные значения которого имеют смысл энергии. Таким образом, задача сводится к задаче для формального радиального гамильтониана $\check{h}$ для каждого $l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ и s и произвольных a, b, B . При ее решении мы следуем работе [20].

Мы будем различать так называемые дифференциальные выражения $\check{k}$ и операторы k и будем называть k оператором, ассоциированным с дифференциальным выражением $\check{k}$. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(0, \infty)$ есть гильбертово пространство дублетов $F(r), G(r)$ со скалярным произведением

$$(F, G) = \int_0^\infty F^\dagger(r)G(r) dr = \int_0^\infty [\bar{f}_1(r)g_1(r) + \bar{f}_2(r)g_2(r)] dr,$$

так что $\mathfrak{L}^2(0, \infty) = L^2(0, \infty) \oplus L^2(0, \infty)$. Здесь символом $\oplus$ обозначена прямая сумма. Определим оператор h^0 в гильбертовом пространстве $\mathfrak{L}^2(0, \infty)$:

$$h^0: \begin{cases} D(h^0) = \mathcal{D}(0, \infty), \\ h^0 F(r) = \check{h}F(r), \end{cases}$$

где $\mathcal{D}(0, \infty) = D(0, \infty) \oplus D(0, \infty)$, $D(0, \infty)$ – стандартное пространство гладких функций на $(0, \infty)$ с компактным носителем

$$D(0, \infty) = f(r): f(r) \in \mathbb{C}^\infty, \quad \text{supp } f \in [c, d], \quad 0 < c < d < \infty,$$

отрезок $[c, d]$ может быть разным для разных f . Оператор h является симметрическим, если для любых дублетов $F(r)$ и $G(r)$

$$\int_0^\infty G^\dagger(r)hF(r)r dr = \int_0^\infty [hG(r)]^\dagger F(r)r dr. \quad (12)$$

Очевидно, что h^0 – симметрический оператор.

Пусть h есть самосопряженное расширение h^0 в $\mathfrak{L}^2(0, \infty)$. Область определения самосопряженного дифференциального оператора можно задать так называемыми самосопряженными граничными условиями на концах интервала для функций из области определения. В нашем случае, когда коэффициентная функция перед производной d/dr не зависит от r , а свободные члены ограничены при $r \rightarrow \infty$, проблема самосопряженных граничных условий связана только с левым концом $r = 0$.

Рассмотрим оператор h^* , сопряженный исходному симметрическому оператору h^0 . Нетрудно показать, что сопряженный оператор h^* , который формально определяется формулой (11), задается следующим образом:

$$h^*: \begin{cases} D(h^*) = \left\{ \begin{array}{ll} F(r), & F(r) \text{ абсолютно непрерывны на } (0, \infty), \\ F, & \check{h}F = G \in \mathfrak{L}^2(0, \infty), \end{array} \right. \\ h^*F(r) = \check{h}F(r), \end{cases} \quad (13)$$

т. е. h^* имеет более широкую область определения $D(h^*)$, $D(h^0) \subset D(h^*)$, которая представляет собой так называемую естественную область для дифференциального выражения $\check{h}$. Вещественность коэффициентных функций дифференциального выражения (9) означает, что индексы дефекта исходного симметрического оператора h^0 равны, так что самосопряженные расширения оператора h^0 существуют для

любых значений параметров a , b , μ и для каждого l и s . Напомним, что симметрический оператор k является самосопряженным, если $D(k)$ совпадает с областью определения сопряженного оператора $D(k^*)$.

Интегрируя по частям выражение (12), представим условие симметричности оператора в виде

$$\lim_{r \rightarrow 0} G^\dagger(r) i \sigma_2 F(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} G^\dagger(r) i \sigma_2 F(r).$$

Можно проверить, что для любого дублета $F(r)$ из $D(h^*)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = 0,$$

поэтому формула, которая фактически характеризует меру асимметрии сопряженного оператора h^* , сводится к граничным условиям в нуле:

$$\lim_{r \rightarrow 0} G^\dagger(r) i \sigma_2 F(r) = 0. \quad (14)$$

Если условие (14) удовлетворяется для любых дублетов из $D(h^*)$, то h^* является симметрическим и поэтому самосопряженным оператором. Это также означает, что h^0 – существенно самосопряженный оператор, и его единственным самосопряженным расширением является его замыкание $h = \bar{h}^0$, которое совпадает с сопряженным оператором: $h = h^* = h^\dagger$. Если условие (14) не удовлетворяется, самосопряженный оператор $h = h^\dagger$ находится как сужение оператора h^* на так называемую максимальную область $D(h) \subset D(h^*)$ [27].

3. РЕШЕНИЯ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Функции $f_1(r)$ и $f_2(r)$ системы

$$\begin{aligned} s \frac{df_1}{dr} - \frac{l + \mu + s/2}{r} f_1 + \left(E + m + \frac{a - b}{r} \right) f_2 &= 0, \\ s \frac{df_2}{dr} + \frac{l + \mu + s/2}{r} f_2 - \left(E - m + \frac{a + b}{r} \right) f_1 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ищем в виде (см. работы [19], [28])

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \sqrt{m + E} e^{-x/2} x^{\gamma_s} (Q_1^s + Q_2^s), \\ f_2(r) &= \sqrt{m - E} e^{-x/2} x^{\gamma_s} (Q_1^s - Q_2^s), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$x = 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{m^2 - E^2}, \quad (17)$$

а

$$\gamma_s = \pm \sqrt{\left(l + \mu + \frac{s}{2} \right)^2 - a^2 + b^2} \equiv \gamma_s^\pm \quad (18)$$

определяет асимптотическое поведение решений при малых r .

Нетрудно показать, что функции Q_1^s , Q_2^s удовлетворяют уравнениям

$$x \frac{d^2 Q_{1,2}^s}{dx^2} + [c_s - x] \frac{d Q_{1,2}^s}{dx} - a_{1,2}^s Q_{1,2}^s = 0 \quad (19)$$

при

$$a_{1,2}^s = \gamma_s + \frac{1}{2} \mp \frac{s}{2} - \frac{aE + mb}{\lambda}, \quad c_s = 2\gamma_s + 1, \quad s = \pm 1, \quad (20)$$

причем a_1^s (a_2^s) определяется формулой (20) с верхним (нижним) знаком.

Решениями уравнения (19) являются вырожденные гипергеометрические функции $\Phi(a, c; x)$ ($\Phi(a, c; x)$ не определена при $c = 0, -1, -2, \dots$) и $\Psi(a, c; x)$ [29]; общее решение можно представить в виде

$$Q_{1,2}^s = A_{1,2}\Phi(a_{1,2}^s, c_s; x) + B_{1,2}\Psi(a_{1,2}^s, c_s; x), \quad (21)$$

где A и B – константы; связи между A_1, B_1 и A_2, B_2 можно найти, положив в каком-либо из уравнений (15) $r = 0$:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{s\gamma_s^\pm - (Ea + mb)/\lambda}{\nu + (ma + bE)/\lambda} A_1, \\ B_2 &= \frac{[(Ea + mb)^2/\lambda^2 - (\gamma_s)^2 - 1](s + 1)/2 + 1}{\nu + (am + bE)/\lambda} B_1, \quad \nu = l + \mu + \frac{s}{2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Нелишнее напомнить соотношение между функциями Ψ и Φ :

$$\Psi(a, c; x) = \frac{\Gamma(1 - c)}{\Gamma(a - c + 1)} \Phi(a, c; x) + \frac{\Gamma(c - 1)}{\Gamma(a)} x^{1-c} \Phi(a - c + 1, 2 - c; x),$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Запишем дублет F как

$$\begin{aligned} F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} &= e^{-x/2} x^{\gamma_s} A [v_+ \Phi(a_1^s, c_s; x) + v_- m_s^+ \Phi(a_1^s + s, c_s; x)] + \\ &+ e^{-x/2} x^{\gamma_s} B [v_+ \Psi(a_1^s, c_s; x) + v_- n_s^+ \Psi(a_1^s + s, c_s; x)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь мы обозначили

$$\begin{aligned} m_s^\pm &= \frac{(s\gamma_s^\pm) - (Ea + mb)/\lambda}{\nu + (am + bE)/\lambda}, \quad n_s^\pm = \frac{[(Ea + mb)^2/\lambda^2 - \gamma_s^2 - 1](s + 1)/2 + 1}{\nu + (am + bE)/\lambda}, \\ v_+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -p \end{pmatrix}, \quad p = \sqrt{\frac{m - E}{m + E}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда общее решение радиальных уравнений удобно представить в виде

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = AY(r, \gamma_s, E) + Be^{-x/2} x^{\gamma_s} [\Psi(a_s^1, c_s; x)v_+ + n_s^+ \Psi(a_s^1 + s, c_s; x)v_-]. \quad (25)$$

Здесь

$$A(1 - m_s^+) p \left(\frac{2\lambda}{m} \right)^{\gamma_s} \rightarrow A,$$

а дублет

$$Y(r, \gamma_s, E) = \frac{(mr)^{\gamma_s}}{2} \left[\Phi_+(r, \gamma_s, E) + \frac{s}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & m + E \\ m - E & 0 \end{pmatrix} \Phi_-(r, \gamma_s, E) \right] u_+, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_+ &= e^{-x/2}\Phi(a_1^s, c_s; x) + e^{x/2}\Phi(c_s - a_2^s - 1, c_s; -x), \\ \Phi_- &= e^{-x/2}\Phi(a_1^s, c_s; x) - e^{x/2}\Phi(c_s - a_2^s - 1, c_s; -x), \\ u_{\pm} &= \begin{pmatrix} (s\gamma_s^{\pm} + \nu)/(a+b) \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Приведем некоторые полезные частные решения системы (15). Одно из них дается формулой (25) с $A = 1$, $B = 0$ при специальном выборе γ_s :

$$U_1(r; E) = Y(r, \gamma_s, E)|_{\gamma_s = \gamma_s^+}, \quad (27)$$

где

$$\gamma_s^+ = \begin{cases} \sqrt{\nu^2 - (a^2 - b^2)}, & \sqrt{a^2 - b^2} \leq |\nu|, \\ i\sqrt{(a^2 - b^2) - \nu^2}, & \sqrt{a^2 - b^2} > |\nu|. \end{cases} \quad (28)$$

Обозначим $\gamma = \sqrt{\nu^2 - (a^2 - b^2)}$, $\sigma = \sqrt{(a^2 - b^2) - \nu^2}$. Асимптотическое поведение дублета $U_1(r; E)$ при $r \rightarrow 0$ имеет вид

$$U_1(r; E) = (mr)^{\gamma_s^+} u_+ + O(r^{\gamma_s^+ + 1}). \quad (29)$$

При $\gamma_s^+ \neq n/2$, $n = 1, 2, \dots$, решение

$$U_2(r; E) = Y(r, \gamma_s, E)|_{\gamma_s = -\gamma_s^+} \quad (30)$$

с асимптотическим поведением при $r \rightarrow 0$

$$U_2(r; E) = (mr)^{-\gamma_s^+} u_- + O(r^{-\gamma_s^+ + 1}) \quad (31)$$

также будет использовано. Решения $U_1(r; E)$ и $U_2(r; E)$ линейно независимы, так как

$$\text{Wr}(U_1, U_2) = \frac{2s\gamma_s^+}{a+b}. \quad (32)$$

Здесь $\text{Wr}(U_1, U_2)$ – вронскиан, который для дублетов $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ и $G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ определяется формулой

$$\text{Wr}(F, G) = F i \sigma^2 G = f_1 g_2 - f_2 g_1. \quad (33)$$

Другое нужное решение, нетривиальное при $\gamma_s^+ \neq n/2$, $n = 1, 2, \dots$, дается формулой (25) с $A = 0$ при специальном выборе B :

$$\begin{aligned}V_1(r; E) &= B(E)(mr)^{\gamma_s^+} e^{-x/2} [\Psi(a_1^s, c_s, x)v^+ + n_s^+ \Psi(a_1^s + s, c_s, x)v^-], \\ B(E) &= \frac{\Gamma(-\gamma_s^+ + (1-s)/2 - (aE + mb)/\lambda)}{\Gamma(-2\gamma_s^+)(1 - m_s^+)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Решение V_1 можно записать в виде линейной комбинации U_1 и U_2 :

$$V_1(r; E) = U_1(r; E) + \frac{a+b}{2s\gamma_s^+} \omega(E) U_2(r; E), \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned}\omega(E) &\equiv \text{Wr}(U_1, V_1) = \\ &= \frac{\Gamma(2\gamma_s^+) \Gamma(-\gamma_s^+ + (1-s)/2 - (aE + mb)/\lambda)}{\Gamma(-2\gamma_s^+) \Gamma(\gamma_s^+ + (1-s)/2 - (aE + mb)/\lambda)} \frac{(2\lambda)^{-2\gamma_s^+}}{m^{-2\gamma_s^+}} \frac{(1 - m_s^-)}{(1 - m_s^+)} \frac{2s\gamma_s^+}{a+b} \equiv \\ &\equiv \frac{\tilde{\omega}(E)}{\Gamma(-2\gamma_s^+)}.\end{aligned}\quad (36)$$

Дублеты U_2 и V_1 не являются линейно независимыми решениями при $\gamma_s^+ = n/2$, $n = 1, 2, \dots$; для этих значений дублет U_2 не определен, а V_1 равен нулю. Однако для этих частных значений γ_s^+ можно построить аналоги дублетов U_2 и V_1 . Такие дублеты, сконструированные вблизи некоторого фиксированного n , должны быть решениями радиальных уравнений, хорошо определенными как в некоторой окрестности точки $\gamma_s^+ = n/2$, так и в самой этой точке (мы следовали работе [20]).

Дублет U_2 имеет сингулярность вида $\Gamma(-2\gamma_s^+)$ при $\gamma_s^+ = n/2$ и в окрестности этой точки может быть представлен как

$$U_2(r; E) = \Gamma(-2\gamma_s^+) A_n(E) U_1(r; E) + U_{n(2)}(r; E),$$

где

$$A_n(E) = \left(\frac{2s\gamma_s^+}{(a+b)\tilde{\omega}(E)} \right) \Big|_{\gamma_s^+ = n/2},$$

а $U_{n(2)}(r; E)$ имеет конечный предел при $\gamma_s^+ \rightarrow n/2$ и удовлетворяет радиальным уравнениям (15). Дублет

$$U_{n(2)}(r; E) = U_2(r; E) - \Gamma(-2\gamma_s^+) A_n(E) U_1(r; E)$$

удовлетворяет условию

$$U_{n(2)}(r; E) = (mr)^{-\gamma_s^+} u_- + O(r^{-\gamma_s^+ + 1}), \quad r \rightarrow 0,$$

и линейно независим от U_1 , так как

$$\text{Wr}(U_1, U_{n(2)}) = \frac{2s\gamma_s^+}{a+b}. \quad (37)$$

Дублет V_1 согласно формулами (34), (35) можно представить в окрестности точки $\gamma_s^+ \rightarrow n/2$ в виде комбинации конечных дублетов U_1 и $U_{n(2)}$:

$$V_1(r; E) = \left[1 + \frac{a+b}{2s\gamma_s^+} \tilde{\omega}(E) A_n(E) \right] U_1(r; E) + \frac{a+b}{2s\gamma_s^+} \omega(E) U_{n(2)}(r; E), \quad (38)$$

где оба множителя $1 + (a+b)\tilde{\omega}(E)A_n(E)/2s\gamma_s^+$ и $\omega(E)$ стремятся к нулю как $1/\Gamma(-2\gamma_s^+)$ при $\gamma_s^+ \rightarrow n/2$. Поэтому дублет

$$V_{n(1)}(r; E) = \frac{1}{1 + (a+b)\tilde{\omega}(E)A_n(E)/2s\gamma_s^+} V_1(r; E) = U_1(r; E) + \frac{a+b}{2s\gamma_s^+} \omega_n(E) U_{n(2)}(r; E)$$

при

$$\omega_n(E) = \frac{\omega(E)}{1 + (a+b)\tilde{\omega}(E)A_n(E)/2s\gamma_s^+} = \frac{\tilde{\omega}(E)}{\Gamma(-2\gamma_s^+) [1 + (a+b)\tilde{\omega}(E)A_n(E)/2s\gamma_s^+]}$$

является решением радиальных уравнений, хорошо определенным в некоторой окрестности точки $\gamma_s^+ = n/2$ и в самой этой точке. Функция $\omega_n(E)$ также хорошо определена в некоторой окрестности точки $\gamma_s^+ = n/2$ и в самой этой точке.

В частном (специальном) случае $\gamma_s^+ \equiv \gamma = 0$ дублеты U_1 и U_2 совпадают, а V_1 равен нулю. Тогда, если через $U_1(r; E | \gamma)$, $U_2(r; E | \gamma)$ и $V_1(r; E | \gamma)$ обозначить дублеты U_1 , U_2 и V_1 при $\gamma \neq 0$, в качестве двух линейно независимых решений уравнений (15) можно выбрать (следуя работе [20])

$$U_1(r; E) = U_1(r; E | 0), \quad U_1(r; E) = u_+ + O(r), \quad r \rightarrow 0, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} U_2^0(r; E) &= \left. \frac{\partial U_1(r; E | \gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} - \frac{s}{\nu} U_1(r; E | 0), \\ U_2^0(r; E) &= u_-^0(r) + O(r \ln r), \quad r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$u_+ = \begin{pmatrix} \nu/(a+b) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_-^0(r) = \begin{pmatrix} \nu \ln(mr)/(a+b) \\ \ln(mr) - s/\nu \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Вронскиан этих решений имеет вид

$$\text{Wr}(U_1, U_2^0) = -\frac{s}{a+b}. \quad (42)$$

Аналогом дублета V_1 при $\gamma = 0$ является

$$\begin{aligned} V_1^0(r; E) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} [-\Gamma(-2\gamma) V_1(r; E | \gamma)] = \\ &= -\frac{\Gamma(a_s)}{(1-m_s)} e^{-x/2} [\Psi(a_s, 1, x) v^+ + n_s \Psi(a_s + s, 1, x) v^-] \end{aligned} \quad (43)$$

при

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{1-s}{2} - \frac{aE+mb}{\lambda}, \quad x = 2\lambda r, \\ m_s &= \frac{-(Ea+mb)/\lambda}{\nu + (am+bE)/\lambda}, \quad n_s = \frac{[(Ea+mb)^2/\lambda^2 - 1]((s+1)/2) + 1}{\nu + (am+bE)/\lambda}. \end{aligned} \quad (44)$$

Дублет V_1^0 можно представить как комбинацию U_1 и U_2^0 :

$$V_1^0(r; E) = U_2^0(r; E) + \frac{a+b}{s} \omega^{(0)}(E) U_1(r; E), \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \omega^{(0)}(E) &= \text{Wr}(U_2^0(r; E), V_1^0(r; E)) = \\ &= \frac{s}{a+b} \left[\ln\left(\frac{2\lambda}{m}\right) + \psi\left(-\frac{1-s}{2} - \frac{aE+mb}{\lambda}\right) - \right. \\ &\quad \left. - 2\psi(1) + \frac{s(a+b)(m+E)}{\nu^2\lambda + \nu(a+b)(m+E)} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь через $\psi(z)$ обозначена логарифмическая производная гамма-функции.

4. СПЕКТРЫ САМОСОПРЯЖЕННОГО РАДИАЛЬНОГО ГАМИЛЬТониАНА

Задача нахождения спектров самосопряженных расширений радиального гамильтониана в кулоновском поле была сформулирована и решена в работе [20] на основе метода направляющих функционалов Крейна, в котором необходимо сконструировать направляющий функционал, построить функцию Грина и вычислить спектральную функцию. Здесь мы должны найти спектры самосопряженных расширений радиального гамильтониана в кулоновских и АБ-потенциалах в $2+1$ измерениях в гильбертовом пространстве $\mathfrak{L}^2(0, \infty)$ в различных областях значений параметров.

В дальнейшем будем обозначать область определения сопряженного оператора h^* как D^* . Область определения самосопряженного оператора $h = h^\dagger$ находится как сужение оператора h^* на максимальную область $D(h)$, поэтому любой дублет из этой области должен удовлетворять граничному условию (14), которое запишем как

$$(F^\dagger(r) i \sigma_2 F(r))|_{r=0} = (\bar{f}_1 f_2 - \bar{f}_2 f_1)|_{r=0} = 0. \quad (47)$$

Мы называем граничные условия в форме (47) самосопряженными граничными условиями. Чтобы проверить выполнение (47), нам нужно знать асимптотическое поведение дублета F при $r \rightarrow 0$.

Согласно определению (13) любые дублеты из D^* можно рассматривать как квадратично-интегрируемые решения неоднородного дифференциального уравнения

$$\check{h}F(r) = \left[i s \sigma_2 \frac{d}{dr} + \sigma_1 \frac{l + \mu + s/2}{r} - \frac{a}{r} + \left(m - \frac{b}{r} \right) \sigma_3 \right] F(r) = G(r), \quad (48)$$

в котором дублет $G(r)$ принадлежит $\mathfrak{L}^2(0, \infty)$ и, следовательно, локально интегрируем. Таким образом, к уравнению (48) можно применить общую теорию дифференциальных уравнений [22].

Чтобы оценить асимптотическое поведение $F(r)$ при $r = 0$, перепишем уравнение (48) в виде [20]

$$\check{h}_- F(r) = G_-(r), \quad (49)$$

где

$$\check{h}_- = i s \sigma_2 \frac{d}{dr} + \sigma_1 \frac{l + \mu + s/2}{r} - \frac{a}{r} - \frac{b}{r} \sigma_3, \quad G_-(r) = G(r) - m \sigma_3 F(r)$$

при $G_-(r)$, принадлежащей $\mathfrak{L}^2(0, \infty)$.

Запишем выражение (18) в форме $q = \sqrt{\nu^2 - (\gamma_s^+)^2}$ и введем

$$q_u = \sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}} \Leftrightarrow \gamma_s^+ = \frac{1}{2}, \quad q_c = \nu \Leftrightarrow \gamma_s^+ = 0. \quad (50)$$

Величина q играет роль некоторого эффективного заряда, являющегося функцией l, s, a, b, μ . Здесь мы рассмотрим случай $a > b$.

Пусть $U_1(r)$ и $U_2(r)$ – линейно независимые решения однородного дифференциального уравнения $\check{h}_- F(r) = 0$:

$$\begin{aligned} U_1(r) &= (mr)^{\gamma_s^+} u_+, \quad q > 0, \\ U_2(r) &= \begin{cases} (mr)^{-\gamma_s^+} u_-, & q > 0, \quad q \neq q_c \quad (\gamma_s^+ \neq 0), \\ u_-^0(r), & q = q_c \quad (\gamma_s^+ = 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (51)$$

Любое решение неоднородного дифференциального уравнения можно представить в форме [20]

$$F(r) = c_1 U_1(r) + c_2 U_2(r) + I_1(r) + I_2(r), \quad (52)$$

где c_1 и c_2 – некоторые комплексные константы и

$$I_1(r) = \begin{cases} -\frac{a+b}{2s\gamma_s^+} \int_{r_0}^{r_0} [U_1(r) \otimes U_2(y)] G_-(y) dy, & 0 < q \leq q_u, \\ \frac{a+b}{2s\gamma_s^+} \int_0^r [U_1(r) \otimes U_2(y)] G_-(y) dy, & q > q_u, \quad q \neq q_c, \\ -\frac{a+b}{s} \int_0^r [U_1(r) \otimes U_2(y)] G_-(y) dy, & q = q_c, \end{cases} \quad (53)$$

$$I_2(r) = \begin{cases} -\frac{a+b}{2s\gamma_s^+} \int_0^r [U_2(r) \otimes U_1(y)] G_-(y) dy, & q > 0, \quad q \neq q_c, \\ \frac{a+b}{s} \int_0^r [U_2(r) \otimes U_1(y)] G_-(y) dy, & q = q_c. \end{cases} \quad (54)$$

Здесь $G_-(y)$ – правая часть уравнения (49), символом $\otimes$ обозначено тензорное произведение, так что $[U_1(r) \otimes U_2(y)]$ есть (2×2) -матрица, а r_0 – вещественная постоянная. Можно показать, что асимптотическое поведение дублета $F(r)$ при $r \rightarrow 0$ определяется двумя первыми членами в формуле (52) и, следовательно, существенно зависит от значения γ_s^+ [20].

4.1. Малые эффективные заряды $q \leq q_u$. При малых q :

$$0 < q \leq q_u \iff \gamma_s^+ = \gamma \geq \frac{1}{2}, \quad (55)$$

только функция $U_1(r) \propto r\gamma_s^+$ квадратично-интегрируема в точке $r = 0$, но не $U_2(r) \propto r^{-\gamma_s^+}$. Интегралы $I_1(r)$ и $I_2(r)$ можно оценить, используя неравенство Коши–Буняковского, что дает

$$I_1(r) = O(r^{1/2}), \quad I_2(r) = O(r^{1/2}), \quad r \rightarrow 0. \quad (56)$$

Для принадлежности дублета $F(r)$ гильбертову пространству $\mathfrak{L}^2(0, \infty)$ необходимо, чтобы выполнялось $c_2 = 0$:

$$F(r) = c_1 U_1(r) + I_1(r) + I_2(r) = O(r^{1/2}) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0. \quad (57)$$

Тогда $F \in D^*$ и удовлетворяет (47). Это означает, что в области (55) индексы дефекта исходного симметрического оператора h^0 равны нулю, т. е. оператор h является существенно самосопряженным: $h = h^\dagger$, так что при $\gamma \geq 1/2$ существует единственный самосопряженный радиальный гамильтониан $h = h^0$. Область его определения $D(h)$ есть пространство абсолютно непрерывных дублетов $F(r)$, исчезающих в точке $r = 0$; дублет $\check{h}F(r)$ также принадлежит $\mathfrak{L}^2(0, \infty)$.

Мы не будем приводить выражения для направляющего функционала и функции Грина, однако отметим, что направляющий функционал простой; это подразумевает, что и спектр оператора h простой. Спектр самосопряженного оператора можно

найти с помощью спектральной функции; выражение для ее производной дается формулой

$$\frac{d\sigma(E)}{dE} = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{1}{\omega(E + i\epsilon)}, \quad (58)$$

где $\lim$, как и $d\sigma(E)/dE$, понимается в обобщенном смысле [20], т. е. функция $\omega(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega(E + i\epsilon)$ рассматривается как обобщенная функция, которую можно получить аналитическим продолжением вронскиана (36) в комплексную плоскость E . На действительной оси E обобщенная функция совпадает с соответствующей функцией действительной переменной. Таким образом, спектральная функция определяется обобщенной функцией $F(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega^{-1}(E + i\epsilon)$. В точках, в которых функция $\omega(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega(E + i\epsilon)$ отлична от нуля, $F(E) = 1/\omega(E)$.

В области $|E| < m$ выражение

$$\omega(E) = \frac{\Gamma(2\gamma_s^+) \Gamma(-\gamma_s^+ + (1-s)/2 - (aE + mb)/\lambda)}{\Gamma(-2\gamma_s^+) \Gamma(\gamma_s^+ + (1-s)/2 - (aE + mb)/\lambda)} \frac{(2\lambda)^{-2\gamma_s^+}}{m^{-2\gamma_s^+}} \frac{(1 - m_s^-)}{(1 - m_s^+)} \frac{2s\gamma_s^+}{a + b} \quad (59)$$

является вещественным, поэтому $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [1/\omega(E + i\epsilon)]$ может принимать комплексные значения только в точках, в которых $\omega(E) = 0$, т. е. когда или

$$1 - m_s^- \equiv \nu + \frac{(a + b)(m + E)}{\lambda} + s\gamma_s^+ = 0, \quad (60)$$

или

$$\gamma_s^+ + \frac{1-s}{2} - \frac{aE + mb}{\lambda} = -n, \quad n = 0, 1, \dots; \quad (61)$$

в этих точках $\Gamma(\gamma_s^+ + (1-s)/2 - (aE + mb)/\lambda) = \infty$. Можно показать, что в точках, определяемых выражением (60), $\omega(E) \neq 0$. Следовательно, дискретный спектр энергий связанных состояний фермионов определяется соотношением (61) и имеет вид

$$\frac{E_{n,l}}{m} = \sqrt{\left(\frac{ab}{v^2 + a^2}\right)^2 + \frac{v^2 - b^2}{v^2 + a^2}} - \frac{ab}{v^2 + a^2}, \quad (62)$$

где $v = n + \gamma_s^+ + (1-s)/2$. Для $s = 1$, $n = 0$ из формулы (61) видно, что $(Ea + mb)/\lambda = \gamma > 0$, откуда и из легко проверяемого равенства

$$(\gamma_s^+)^2 - \frac{a^2 - b^2}{\lambda^2} E^2 = \nu^2 - \frac{a^2 - b^2}{\lambda^2} m^2 \quad (63)$$

получим $(Eb + ma)/\lambda = |\nu|$. Следовательно, $1 - m_s^+ = 0$ для $\nu < 0$. Поэтому произведение $|\Gamma(\gamma + (1-s)/2 - (aE + mb)/\lambda)(1 - m_s^+)| < \infty$ для $s = 1$, $n = 0$, $\nu < 0$, так что $\omega(E) \neq 0$. Таким образом, допустимы следующие значения n : $n = 0, 1, 2, \dots$, $s = \pm 1$ для $\nu > 0$ и $n = 1, 2, \dots$, $s = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $s = -1$ для $\nu < 0$. Заметим, что магнитный поток влияет на спектр энергий фермиона через величину μ , которая входит в γ_s^+ .

Все уровни энергии за исключением основного (нижнего) уровня дважды вырождены по s . Основное состояние фермиона в рассматриваемой конфигурации полей не вырождено; это состояние с $n = 0$, $s = 1$ для $\nu > 0$, что при заданном ϵ означает $\mu > 0$ ($B > 0$), т. е. $s\mu > 0$. В основном состоянии, как в состоянии с наименьшей

энергией, потенциальная энергия взаимодействия спинного магнитного момента фермиона с магнитным полем, задаваемая оператором $-s\mu\delta(r)/r$, должна быть минимальной, поэтому $s\mu > 0$. Если представить магнитный поток в единицах Φ_0 в форме

$$\mu = [\mu] + \beta \equiv N + \beta, \quad (64)$$

где $[\mu] \equiv N$ – целое число ($\leq \mu$),

$$1 > \beta \geq 0, \quad (65)$$

то $N = 0, 1, 2, \dots$ для $\mu > 0$. Для $\mu > 0$ основное состояние фермиона (т.е. частицы с зарядом e) есть состояние с $s = 1$ и энергией

$$\frac{E_g}{m} = \sqrt{\left(\frac{ab}{(\beta + 1/2)^2 + b^2}\right)^2 + \frac{(\beta + 1/2)^2 - a^2}{(\beta + 1/2)^2 + b^2}} - \frac{ab}{(\beta + 1/2)^2 + b^2}. \quad (66)$$

При фиксированном знаке e переход к случаю $\nu < 0$, $\mu < 0$ ($B < 0$) подразумевает одновременные замены $l \rightarrow -l$, $B \rightarrow -B$, $s \rightarrow -s$, при которых $s\mu > 0$. Поэтому, для $\mu < 0$ основное состояние фермиона (с зарядом e) есть состояние с $s = -1$ и с энергией (66). Этот результат понятен с точки зрения физики: при изменении знака напряженности магнитного поля энергия взаимодействия спинного магнитного момента фермиона с магнитным полем будет минимальной, если при этом изменить знак проекции спина фермиона на направление поля.

Нетрудно показать, что спектр сгущается в точке $E = m$, и его асимптотический вид при $n \rightarrow \infty$ дается нерелятивистской формулой

$$\epsilon_n = m - E_n = \frac{m(a+b)^2}{2n^2}. \quad (67)$$

Интересно, что эта формула совпадает с формулой, описывающей нерелятивистский дискретный спектр энергий связанных состояний фермиона в чисто кулоновском векторном потенциале (5), в которую вместо a входит сумма $a + b$.

4.2. Область эффективных зарядов $q_u < q < q_c$. Эффективные заряды со значениями $q \leq q_u$ или $q_u < q < q_c$ называют некритическими зарядами [20]. При таких зарядах не возникает проблем с определением спектров энергий стандартными методами квантовой механики. Во второй некритической области

$$q_u < q < q_c \iff 0 < \gamma_s^+ = \gamma < \frac{1}{2} \quad (68)$$

обе функции $U_1(r) \propto r^{\gamma_s^+}$ и $U_2(r) \propto r^{-\gamma_s^+}$ квадратично-интегрируемы в точке $r = 0$. Оценки интегралов $I_1(r)$ и $I_2(r)$, сделанные выше, остаются справедливыми, поэтому любой дублет $F \in D^*$ ведет себя при $r \rightarrow 0$ как

$$F(r) = c_1(mr)^{\gamma_s^+} u_+ + c_2(mr)^{-\gamma_s^+} u_- + O(r^{1/2}), \quad u_{\pm} = \begin{pmatrix} (s\gamma_s^{\pm} + \nu)/(a+b) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Однако дублет с таким поведением не удовлетворяет условию (47), так как

$$(\bar{f}_1 f_2 - \bar{f}_2 f_1)|_{r=0} = \frac{2s\gamma}{a+b} (\bar{c}_1 c_2 - \bar{c}_2 c_1). \quad (70)$$

Это означает, что оператор h^* не является симметрическим, и необходимо построить нетривиальные самосопряженные расширения оператора h^0 . Эта задача для случая кулоновского поля решена в работе [20]. С помощью линейного преобразования

$$c_{1,2} \rightarrow c_{\pm} = c_1 \pm ic_2 \quad (71)$$

соотношение (70) можно привести к квадратичной диагональной форме:

$$(\bar{f}_1 f_2 - \bar{f}_2 f_1)|_{r=0} = -i \frac{s\gamma}{a+b} (|c_+|^2 - |c_-|^2). \quad (72)$$

Индексы инерции этой формы равны $(1, 1)$, поэтому индексы дефекта симметрического оператора h^0 для $0 < \gamma < 1/2$ равны $(1, 1)$.

Условие (47) будет удовлетворяться для любых c_- и c_+ , связанных соотношением

$$c_- = e^{i\theta} c_+, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \sim 2\pi. \quad (73)$$

Угол θ параметризует самосопряженные расширения (h_θ) исходного симметрического оператора h^0 , которые различны для разных θ за исключением двух эквивалентных значений: $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$.

Соотношение (73) можно записать в эквивалентной форме

$$c_2 = -\xi c_1, \quad -\infty \leq \xi = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \leq +\infty, \quad -\infty \sim +\infty. \quad (74)$$

В терминах ξ значения $\xi = \pm\infty$ эквивалентны и подразумевают, что $c_1 = 0$. Мы будем считать, что в этих случаях $\xi = \infty$.

Следовательно, в области $0 < \gamma_s^+ < 1/2$ можно определить однопараметрическое $U(1)$ -семейство самосопряженных операторов $h_\theta \equiv h_\xi$ с областью определения D_ξ :

$$h_\xi: \begin{cases} D_\xi = \begin{cases} F(r): F(r) \text{ абсолютно непрерывны в области } (0, \infty), \\ F, \dot{h}F \in \mathfrak{L}^2(0, \infty), \\ F(r) = c[(mr)^\gamma u_+ - \xi(mr)^{-\gamma} u_-] + O(r^{1/2}), \\ \quad \quad \quad r \rightarrow 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \\ F(r) = c(mr)^{-\gamma} u_- + O(r^{1/2}), \quad \quad \quad r \rightarrow 0, \quad \xi = \infty, \end{cases} \\ h_\xi F = \dot{h}F(r), \end{cases} \quad (75)$$

где c — произвольная комплексная постоянная. Другими словами, в случае $0 < \gamma_s^+ < 1/2$ исходный симметрический оператор h^0 нельзя определить как единственный самосопряженный оператор, и поэтому область его определения нужно дополнительно фиксировать с помощью вещественного параметра ξ в терминах самосопряженных граничных условий. Для $\xi = 0$ весь анализ аналогичен проведенному в предыдущем пункте, и все полученные в нем формулы остаются справедливыми и в случае $0 < \gamma_s^+ < 1/2$.

Далее рассмотрим случай $0 < |\xi| < \infty$. В качестве дублета $U_\xi(r; E)$, определяющего направляющий функционал, выберем

$$U_\xi(r; E) = U_1(r; E) - \xi U_2(r; E). \quad (76)$$

Нетрудно показать, что направляющий функционал в этом случае простой. При $r \rightarrow 0$

$$U_\xi(r; E) = (mr)^\gamma u_+ - \xi(mr)^{-\gamma} u_- + O(r^{-\gamma+1}). \quad (77)$$

Тогда решение V_1 можно представить как

$$V_1(r; E) \equiv V_\xi = U_\xi(r; E) + \frac{a+b}{2s\gamma_s^+} \omega_\xi(E) U_2(r; E) \quad (78)$$

при

$$\omega_\xi(E) = \text{Wr}(U_\xi, V_\xi) = \omega(E) + \frac{2s\gamma\xi}{a+b}, \quad (79)$$

где $\omega(E)$ определяется формулой (59).

Условие существования дискретного спектра энергий связанных состояний фермионов $\omega_\xi(E_{n\xi}) = 0$ принимает вид

$$\frac{\Gamma(2\gamma_s^+) \Gamma(-\gamma_s^+ + (1-s)/2 - (aE + mb)/\lambda)}{\Gamma(-2\gamma_s^+) \Gamma(\gamma_s^+ + (1-s)/2 - (aE + mb)/\lambda)} \frac{(2\lambda)^{-2\gamma_s^+} (1 - m_s^-) 2s\gamma_s^+}{m^{-2\gamma_s^+} (1 - m_s^+) a + b} = -\frac{2s\xi\gamma_s^+}{a+b}. \quad (80)$$

Мы не получили формулу для дискретного спектра энергий связанных состояний фермионов в этой области в явном виде, однако можно показать, что спектр сгущается в точке $E = m$ и описывается асимптотической формулой (67), не зависящей от ξ :

$$\epsilon_{n\xi} = m - E_{n\xi} = \frac{m(a+b)^2}{2n^2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (81)$$

Анализ формулы (80) показывает, что E существенно определяется величиной $a+b$ в области значений $E \cong m$ и $\sqrt{a^2 - b^2}$ вблизи $E \cong 0$. Так как рассматриваемая квантовая система в основном состоянии может стать нестабильной при $\sqrt{a^2 - b^2} > 1/2$, можно сказать, что скалярный потенциал стремится стабилизировать систему.

В работе [20] было показано, что в чисто кулоновском поле низший уровень энергии электрона может достичь границы нижнего континуума энергий уже в докритической области. Поведение низшего уровня энергии фермиона в рассматриваемом нами случае аналогично. Положим для простоты $b = 0$. Тогда из формулы (80) в пределе $E = -m + \epsilon$, $\lambda = \sqrt{2m\epsilon}$, $\epsilon \rightarrow +0$, получим следующее выражение для определения ϵ :

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{m}} \left[\xi(2a)^{2\gamma} aG - a - \frac{2s\gamma(\nu + s\gamma)}{a} \right] = \sqrt{2} s\gamma [\xi(2a)^{2\gamma} G + 1] + \sqrt{2} \nu [1 - \xi(2a)^{2\gamma} G], \quad (82)$$

откуда найдем точные значения $\xi(a, \gamma)$, при которых $\epsilon = 0$:

$$\frac{1}{\xi} = (2a)^{2\gamma} \frac{\nu - s\gamma}{\nu + s\gamma} G, \quad G = \frac{\Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(2\gamma)}. \quad (83)$$

Кратко обсудим случай $\xi = \infty$. В этом случае любой дублет $F \in D_\infty$ при $r \rightarrow 0$ имеет асимптотическое поведение

$$F(r) = c(mr)^{-\gamma} u_- + O(r^{1/2}).$$

В качестве дублетов $U(r; E)$ и $V(r; E)$ выберем

$$U(r; E) = U_\infty(r; E) = U_2(r; E), \quad U_\infty(r; E) = (mr)^{-\gamma_s^+} u_- + O(r^{-\gamma_s^++1}), \quad r \rightarrow 0,$$

и

$$V(r; E) = \frac{2s\gamma_s^+}{(a+b)\omega(E)} V_1(r; E) = U_2(r; E) - \frac{a+b}{2s\gamma_s^+} \omega_\infty(E) U_1(r; E),$$

где

$$\omega_\infty(E) = \text{Wr}(U, V) = -\frac{4(\gamma_s^+)^2}{(a+b)^2 \omega(E)}.$$

Мы видим, что во второй докритической зарядовой области в случае $\xi = \infty$ спектр связанных состояний фермиона определяется полюсами функции $\omega(E)$.

4.3. Критические эффективные заряды $q = q_c$. Эффективные заряды со значениями $q = q_c$ называют критическими. При $q = q_c$ выражение для спектра энергий (62) обращается в нуль, а при $q > q_c$ становится комплексным, что не позволяет интерпретировать это выражение как энергию. В этом случае

$$q = q_c = \nu \iff \gamma_s^+ = \gamma = 0, \quad (84)$$

и из формул (51)–(54) вытекает следующее асимптотическое поведение дублетов $F \in D^*$ при $r \rightarrow 0$:

$$F(r) = c_1 u_+ + c_2 u_-^0 + O(r^{1/2} \ln r). \quad (85)$$

Дублет с таким поведением не удовлетворяет условию (47), так как

$$(\bar{f}_1 f_2 - \bar{f}_2 f_1)|_{r=0} = -\frac{s}{a+b} (\bar{c}_1 c_2 - \bar{c}_2 c_1). \quad (86)$$

Эта формула аналогична формуле (70).

Следовательно, при $\gamma_s^+ = 0$ мы также имеем однопараметрическое $U(1)$ -семейство самосопряженных операторов h_ξ^0 с областью определения D_ξ^0 :

$$h_\xi^0: \begin{cases} D_\xi^0 = \begin{cases} F(r): F(r) \text{ абсолютно непрерывны в области } (0, \infty), \\ F, \check{h}F \in \mathfrak{L}^2(0, \infty), \\ F(r) = c[u_-^0(r) - \xi u_+] + O(r^{1/2} \ln r), \\ r \rightarrow 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \\ F(r) = cu_+ + O(r^{1/2} \ln r), \quad r \rightarrow 0, \quad \xi = \infty, \end{cases} \\ h_\xi^0 F = \check{h}F(r). \end{cases} \quad (87)$$

Значение $\xi = \infty$ отвечает эквивалентным случаям $\xi = +\infty$ и $\xi = -\infty$.

Обсудим случай $0 < |\xi| < \infty$. В этом случае дублет $U_\xi^0(r; E)$, определяющий направляющий функционал, является комбинацией

$$U_\xi^0(r; E) = U_2^0(r; E) - \xi U_1(r; E). \quad (88)$$

Можно проверить, что направляющий функционал в этом случае простой. При $r \rightarrow 0$

$$U_\xi^0(r; E) = u_-^0(r) - \xi u_+ + O(r^{1/2} \ln r). \quad (89)$$

Вронскиан этих дублетов $\text{Wr}(U_\xi^0; U_1) = s/(a+b)$. Решение V_1^0 удобно представить в виде

$$V_1^0(r; E) = U_\xi^0(r; E) + \frac{a+b}{s} \omega_\xi^0(E) U_1(r; E), \quad (90)$$

где

$$\omega_\xi^0(E) = \text{Wr}(U_\xi^0, V_1^0) = \omega^0(E) + \frac{s\xi}{a+b}, \quad (91)$$

а

$$\omega^0(E) = \frac{s}{a+b} \left\{ \ln \left(\frac{2\lambda}{m} \right) + \psi \left(-\frac{1-s}{2} - \frac{aE+mb}{\lambda} \right) - 2\psi(1) + \frac{s(a+b)(m+E)}{\nu^2 \lambda + \nu(a+b)(m+E)} \right\}. \quad (92)$$

Трансцендентное уравнение, определяющее дискретный спектр энергий фермионов ($|E| < m$), в этом случае определяется нулями функции

$$\omega_\xi^0(E) = \omega^0(E) + \frac{s\xi}{a+b}. \quad (93)$$

Как и предыдущем случае, мы не смогли получить явную формулу для дискретного спектра энергий фермионов при $\gamma = 0$, однако можно показать, что спектр сгущается в точке $E = m$ и описывается асимптотической формулой (81). Как и во второй докритической области, существуют значения ξ , при которых низший уровень энергии может достичь границы нижнего континуума энергий. Из формулы (80) в пределе $E = -m + \epsilon$, $\lambda = \sqrt{2m\epsilon}$, $\epsilon \rightarrow +0$, нетрудно получить следующее приближенное выражение для определения ϵ и ξ :

$$\ln 2(a-b) - \ln z + \psi(z) - 2\psi(1) + \frac{s}{2z} = -\xi, \quad z = (a-b) \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}}. \quad (94)$$

Учитывая приближенное равенство $-\ln z + \psi(z) \cong 1/2z$, $z \rightarrow \infty$, из выражения (94) найдем, что низший уровень энергии достигает границы нижнего континуума энергий при $-\xi = \ln 2(a-b) + 2\mathcal{C}$, где $\mathcal{C} = -\psi(1) = 0.57721$ – постоянная Эйлера [29].

Обсудим теперь случай $\xi = \infty$, когда для любого дублета $F \in D_\infty$

$$F(r) = cu_+ + O(r^{1/2} \ln r), \quad r \rightarrow 0.$$

В качестве дублетов $U(r; E)$ и $V(r; E)$ выберем

$$U(r; E) = U_\infty^0(r; E) = U_1(r; E), \quad U_\infty^0(r; E) = cu_+ + O(r), \quad r \rightarrow 0, \\ V(r; E) = \frac{s}{(a+b)\omega^0(E)} V_1^0(r; E) = U_1(r; E) - \frac{a+b}{s} \omega_\infty^0(E) U_2^0(r; E),$$

где

$$\omega_\infty^0(E) = \text{Wr}(U, V) = -\frac{1}{(a+b)^2 \omega^0(E)}.$$

В этой зарядовой области спектр связанных состояний фермиона при $\xi = \infty$ определяется полюсами функции $\omega^0(E)$; в явном виде он задается формулой (62), в которой нужно положить $\gamma_s^+ = 0$. Полагая в выражении (66) $(\beta + 1/2)^2 + b^2 = a^2$, найдем энергию фермиона в низшем состоянии с $s = 1$ для $\mu > 0$ или с $s = -1$ для $\mu < 0$ в виде $E_\infty^s = -mb/a$.

5. ОБЛАСТЬ СВЕРХКРИТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТИВНЫХ ЗАРЯДОВ

В сверхкритической области

$$q > q_c = \nu = l + \mu + \frac{s}{2} \iff \gamma_s^+ = i\sigma, \quad \sigma = \sqrt{(a^2 - b^2) - \nu^2} > 0, \quad (95)$$

любой дублет $F \in D^*$ при $r \rightarrow 0$ должен вести себя как

$$F(r) = c_1(mr)^{i\sigma}u_+ + c_2(mr)^{-i\sigma}u_- + O(r^{1/2}), \quad u_{\pm} = \begin{pmatrix} (\pm i\sigma + \nu)/(a+b) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Тогда левая часть выражения (47) принимает вид

$$(\bar{f}_1 f_2 - \bar{f}_2 f_1)|_{r=0} = -\frac{2is\sigma}{a+b}(|c_1|^2 - |c_2|^2). \quad (97)$$

Таким образом, и при $\gamma_s^+ = i\sigma$ мы имеем однопараметрическое $U(1)$ -семейство самосопряженных операторов h_θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \sim \pi$, удовлетворяющих соотношению (97), с областью определения D_θ :

$$h_\theta: \begin{cases} D_\theta = \begin{cases} F(r): F(r) \text{ абсолютно непрерывны в области } (0, \infty), \\ F, \check{h}F \in \mathfrak{L}^2(0, \infty), \\ F(r) = c[e^{i\theta}(mr)^{i\sigma}u_+ + e^{-i\theta}(mr)^{-i\sigma}u_-] + O(r^{1/2}), \quad r \rightarrow 0, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \sim \pi, \\ h_\theta F = \check{h}F(r), \end{cases} \end{cases} \quad (98)$$

где c — комплексная константа.

Дублет, определяющий направляющий функционал, имеет вид

$$U_\theta(r; E) = e^{i\theta}U_1(r; E) + e^{-i\theta}U_2(r; E), \quad (99)$$

где $U_1(r; E)$, $U_2(r; E)$ являются дублетами (27)–(34) с $\gamma_s^+ = i\sigma$. Следовательно, асимптотическое поведение дублета имеет вид

$$U_\theta(r; E) = e^{i\theta}(mr)^{i\sigma}u_+ + e^{-i\theta}(mr)^{-i\sigma}u_-, \quad r \rightarrow 0. \quad (100)$$

Можно проверить, что направляющий функционал, как и в предыдущих случаях, простой. Функцию Грина оператора h_θ можно сконструировать, используя дублеты $U_\theta(r; E)$ и $V_\theta(r; E)$:

$$\begin{aligned} V_\theta(r; E) &= \frac{2}{e^{-i\theta} + e^{i\theta}\tilde{\omega}(E)}V_1(r; E) = U_\theta(r; E) - \frac{a+b}{4s\sigma}\omega_\theta(E)\tilde{U}_\theta(r; E), \\ \tilde{U}_\theta &= \frac{1}{i}[e^{i\theta}U_1(r; E) - e^{-i\theta}U_2(r; E)], \\ \tilde{\omega} &= \frac{a+b}{2si\sigma}\omega(E), \quad \omega_\theta(E) = \text{Wr}(U_\theta, V_\theta) = -\frac{4is\sigma}{a+b} \frac{1 - \tilde{\omega}(E)e^{2i\theta}}{1 + \tilde{\omega}(E)e^{2i\theta}}, \end{aligned} \quad (101)$$

где $V_1(r; E)$ и $\omega(E)$ заданы формулами (35), (36) при $\gamma_s^+ = i\sigma$. Конечное выражение для производной спектральной функции гамильтониана h_θ дается формулой

$$\frac{d\sigma_\theta(E)}{dE} = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \frac{1}{\omega_\theta(E + i\epsilon)}. \quad (102)$$

В этой зарядовой области спектральная функция определяется обобщенной функцией $F_\theta(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_\theta^{-1}(E + i\epsilon)$; в точках, в которых функция $\omega_\theta(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_\theta(E + i\epsilon)$ отлична от нуля, $F_\theta(E) = 1/\omega_\theta(E)$.

Для связанных состояний $|E| < m$ имеем

$$\tilde{\omega}(E) = \frac{\Gamma(2i\sigma)}{\Gamma(-2i\sigma)} \frac{\Gamma(-i\sigma + (1-s)/2 - (aE + mb)/\lambda)}{\Gamma(i\sigma + (1-s)/2 - (aE + mb)/\lambda)} \frac{(2\lambda)^{-2i\sigma}}{m^{-2i\sigma}} \frac{1 - m_s^-}{1 - m_s^+} \equiv e^{-2i\Omega(E)}. \quad (103)$$

Пусть далее по определению

$$\begin{aligned} \phi_E &= \frac{1}{2i} \left[\ln \Gamma\left(\frac{1-s}{2} - \frac{aE + mb}{\lambda} - i\sigma\right) - \ln \Gamma\left(\frac{1-s}{2} - \frac{aE + mb}{\lambda} + i\sigma\right) \right], \\ \phi_s &= \frac{1}{2i} \left[\ln \left(\nu + i\sigma + \frac{(E+m)(a+b)}{\lambda} \right) - \ln \left(\nu - i\sigma + \frac{(E+m)(a+b)}{\lambda} \right) \right], \\ \phi_\sigma &= \frac{\ln \Gamma(2i\sigma) - \ln \Gamma(-2i\sigma)}{2i}. \end{aligned} \quad (104)$$

Тогда функция

$$\omega_\Omega(E) = \frac{4s\sigma}{a+b} \operatorname{tg}[\Omega(E) - \theta] \quad (105)$$

вещественна, а спектр самосопряженного гамильтониана (h_θ) неявно определяется уравнением

$$\Omega(E) - \theta \equiv \sigma \ln \frac{2\lambda}{m} - \phi_\sigma - \phi_E - \phi_s - \theta = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (106)$$

Следует подчеркнуть, что уравнение (106) неявно определяет собственные значения энергии фермиона в связанных состояниях в области $m > E \geq -m$. Анализ полученной формулы показывает, что точка $E = m$ является точкой сгущения спектра, а при $n \gg 1$ спектр описывается правой частью асимптотической формулы (81); что в интервале $-m \leq E < 0$ число дискретных уровней энергии конечно. Нелишне также отметить, что вблизи границы нижнего континуума, т. е. при $E = -m + \epsilon$, $\epsilon > 0$, формула (106) имеет ту же структуру, что и формула для спектра энергий электрона в сильном (обрезанном на малом расстоянии R) кулоновском и АБ-потенциалах в $2 + 1$ измерениях вблизи $-m$ (см. работу [19]).

Для практического использования формулы (106) с помощью разложения (см. монографию [30], с. 174)

$$\Gamma(x + iy) = |\Gamma(x + iy)| e^{i\eta}, \quad \eta = y \left[-\mathcal{C} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{y}{x+n-1} \right) \right], \quad (107)$$

можно получить для аргументов гамма-функций удобные для анализа явные выражения. Если эффективный заряд $\sqrt{a^2 - b^2}$ слегка сверхкритический, т. е. $0 < \sigma \ll 1$, то вблизи границы нижнего континуума $E = -m + \epsilon$, $\epsilon > 0$, уравнение (106) в пределах $\epsilon \rightarrow +0$, $0 < \sigma \ll 1$, $\lambda = \sqrt{2m\epsilon}$, приводится к виду

$$\theta - \frac{\pi}{2} + \sigma \ln \frac{2}{a-b} + \operatorname{arctg} \frac{s\sigma}{\nu + (a+b)\sqrt{\epsilon/2m}} - \sigma\mathcal{C} = -n\pi.$$

Из этой формулы следует, что в пределе $E = -m + \epsilon \rightarrow +0$ при $0 < \sigma \ll 1$ допустимо только одно значение $n = 0$, т. е. низший уровень энергии достигает границы нижнего континуума энергий при

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \sigma \ln \frac{2}{a-b} - \operatorname{arctg} \frac{s\sigma}{\nu + (a+b)} + \sigma C.$$

6. О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Обсудим вопрос о собственных состояниях (функциях) самосопряженного гамильтониана, относящихся к дискретному спектру. Эти собственные функции должны принадлежать гильбертову пространству $\mathcal{L}^2(0, \infty)$. В области энергий $|E| < m$ при малых эффективных зарядах дублеты, квадратично-интегрируемые на бесконечности, можно представить в виде

$$F(r) = AV_1(r; E) = A \left[U_1(r; E) + \frac{a+b}{2s\gamma_s^+} \omega(E) U_2(r; E) \right],$$

где A – постоянная, а $\omega(E)$ определяется формулой (59). Очевидно, эти решения интегрируемы с квадратом в источнике (и, следовательно, на всей полуоси) только при выполнении условия $\omega(E) = 0$.

Во второй докритической области квадратично-интегрируемые на всей полуоси дублеты (с $|E| < m$) найдены в виде

$$F(r) = AV_1(r; E) = A \left[U_\xi(r; E) + \frac{a+b}{2s\gamma_s^+} \omega_\xi(E) U_2(r; E) \right],$$

где A – постоянная, а $\omega_\xi(E)$ определяется формулой (79). Однако эти решения удовлетворяют самосопряженным граничным условиям в нуле (75), только если $\omega_\xi(E) = 0$.

Для критических зарядов квадратично-интегрируемые на всей полуоси дублеты (с $|E| < m$) имеют вид

$$F(r) = AV_1^0(r; E) = A \left[U_\xi(r; E) + \frac{a+b}{s} \omega_\xi^0(E) U_1(r; E) \right],$$

где A – постоянная, а $\omega_\xi^0(E)$ определяется формулой (91). Однако найденные дублеты удовлетворяют самосопряженным граничным условиям в нуле (87), только если $\omega_\xi^0(E) = 0$.

Аналогично можно построить собственные функции самосопряженного гамильтониана при сверхкритических зарядах. В этом случае квадратично-интегрируемые (в интервале энергий $|E| < m$) на всей полуоси решения имеют вид

$$F(r) = AV_\theta(r; E) = A \left[U_\theta(r; E) - \frac{a+b}{4s\sigma} \omega_\theta(E) \tilde{U}_\theta(r; E) \right],$$

где A – постоянная, а $\omega_\theta(E)$ и дублеты $V_\theta(r; E)$, $U_\theta(r; E)$, $\tilde{U}_\theta(r; E)$ определяются формулами (99)–(101). Если положить $\omega_\theta(E) = 0$, то эти решения будут удовлетворять асимптотическим самосопряженным граничным условиям (98).

Нелишне подчеркнуть, что приведенные выше решения являются собственными функциями самосопряженного радиального гамильтониана в соответствующих областях значений параметров лишь при выполнении асимптотических самосопряженных граничных условий. Только такие решения отвечают состояниям дискретного спектра самосопряженного радиального гамильтониана.

7. НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР

В заключение кратко обсудим вопрос об областях непрерывного спектра само-сопряженного радиального гамильтониана $|E| \geq m$. Прямая проверка показывает, что в зарядовой области $\gamma_s^+ > 1/2$ функция $\omega(E)$ (36) непрерывна, отлична от нуля и имеет комплексные значения. Следовательно, спектральная функция $\sigma(E)$ в области энергий $|E| \geq m$ абсолютно непрерывна и

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(E)}{dE} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{\omega(E)}, \\ \omega(E) &= \frac{\Gamma(2\gamma_s^+) \Gamma(-\gamma_s^+ + (1-s)/2 + (a|E| + mb)/iek)}{\Gamma(-2\gamma_s^+) \Gamma(\gamma_s^+ + (1-s)/2 + (a|E| + mb)/iek)} \times \\ &\quad \times \frac{(-iek)^{-2\gamma_s^+}}{m^{-2\gamma_s^+}} \frac{2s\gamma_s^+ \nu - (a+b)(m+E)/iek + s\gamma_s^+}{a+b \nu - (a+b)(m+E)/iek - s\gamma_s^+}, \\ e &= \frac{E}{|E|}, \quad k = \sqrt{E^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (108)$$

В области $|E| \geq m$ функция $\omega_\xi(E)$ для $0 < \gamma_s^+ < 1/2$ непрерывна, отлична от нуля и комплексна, как и $\omega(E)$ (108). Следовательно, спектральная функция $\sigma_\xi(E)$ в области $|E| \geq m$ при $\xi \neq 0$ абсолютно непрерывна и

$$\frac{d\sigma_\xi(E)}{dE} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{\omega(E) + 2s\gamma\xi/(a+b)},$$

что является аналогом формулы (108) с заменой $\omega(E)$ на $\omega_\xi(E)$.

В области $|E| \geq m$ функция $\omega^0(E)$ для $\gamma_s^+ = 0$ дается выражением

$$\begin{aligned} \omega^0(E) &= \frac{s}{a+b} \left[\ln \left(2e^{-ie\pi/2} \frac{k}{m} \right) + \psi \left(-\frac{1-s}{2} + \frac{a|E| + mb}{iek} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2\psi(1) + \frac{s(a+b)(m+E)}{-iek\nu^2 + \nu(a+b)(m+E)} \right]. \end{aligned} \quad (109)$$

Она непрерывна, отлична от нуля и комплексна, поэтому спектральная функция $\sigma_\xi^0(E)$ в области $|E| \geq m$ при $\xi \neq 0$ абсолютно непрерывна и

$$\frac{d\sigma_\xi^0(E)}{dE} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{\omega^0(E) - s\xi/(a+b)}.$$

В области $|E| \geq m$ функция $\omega_\theta(E)$ для $\gamma_s^+ = i\sigma$ дается выражением (101), в котором в $\tilde{\omega}(E)$ нужно положить $\lambda = -ik$. Она непрерывна, отлична от нуля и комплексна, поэтому спектральная функция $\sigma_\theta(E)$ в области $|E| \geq m$ абсолютно непрерывна и

$$\frac{d\sigma_\theta(E)}{dE} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{\omega_\theta(E)}.$$

Собственные функции самосопряженного радиального гамильтониана, относящиеся к непрерывному спектру энергий, должны допускать “нормировку на δ -функцию”.

Благодарности. В.Р. Халилов благодарен И.В. Тютину за многочисленные ценные замечания и полезные рекомендации.

Список литературы

- [1] A. M. J. Schakel, G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:20 (1991), 2653–2656.
- [2] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.*, **115**:3 (1959), 485–491.
- [3] Р. Прендж, С. Гирвин (ред.), *Квантовый эффект Холла*, Мир, М., 1989.
- [4] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Teaneck, NJ, 1990.
- [5] A. Neagu, A. M. J. Schakel, *Phys. Rev. D*, **48**:4 (1993), 1785–1791, arXiv: hep-th/9306092.
- [6] M. G. Alford, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **62**:10 (1989), 1071–1074.
- [7] Ph. De Sousa Gerbert, *Phys. Rev. D*, **40**:4 (1989), 1346–1349.
- [8] M. G. Alford, J. March-Pussel, F. Wilczek, *Nucl. Phys. B*, **328**:1 (1989), 140–158.
- [9] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, A. A. Firsov, *Nature*, **438**:7065 (2005), 197–200, arXiv: cond-mat/0509330.
- [10] Z. Jiang, Y. Zhang, H. L. Stormer, P. Kim, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:10 (2007), 106802, 4 pp., arXiv: 0705.1102.
- [11] I. F. Herbut, *Phys. Rev. Lett.*, **104**:6 (2010), 066404, 4 pp., arXiv: 0909.4231.
- [12] И. В. Тютин, *Рассеяние электронов соленоидом*, препринт № 27, ФИАН, М., 1974, arXiv: 0801.2167.
- [13] Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, *УФН*, **105**:3–4 (1971), 403–440.
- [14] А. Б. Мигдал, *Фермионы и бозоны в сильных полях*, Наука, М., 1978.
- [15] J. Rafelski, L. P. Fulcher, A. Klein, *Phys. Rep.*, **38**:5 (1978), 227–361.
- [16] M. Soffel, B. Müller, W. Greiner, *Phys. Rep. C*, **85**:2 (1982), 51–122.
- [17] W. Greiner, J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, Springer, Berlin, 2009.
- [18] В. Р. Халилов, *ТМФ*, **116**:2 (1998), 277–287.
- [19] В. Р. Халилов, *ТМФ*, **158**:2 (2009), 250–262.
- [20] Б. Л. Воронов, Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *ТМФ*, **150**:1 (2007), 41–84.
- [21] D. M. Gitman, A. A. Smirnov, I. V. Tyutin, B. L. Voronov, *Self-adjoint Schrödinger and Dirac operators with Aharonov–Bohm and magnetic-solenoid fields*, arXiv: 0911.0946.
- [22] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [23] С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972.
- [24] C. R. Hagen, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:5 (1990), 503–506.
- [25] V. R. Khalilov, C.-L. Ho, *Ann. Phys.*, **323**:5 (2008), 1280–1293, arXiv: 0708.3131.
- [26] V. R. Khalilov, *Phys. Rev. A*, **71**:1 (2005), 012105, 6 pp., arXiv: quant-ph/0406033.
- [27] B. L. Voronov, D. M. Gitman, I. V. Tyutin, *Self-adjoint differential operators associated with self-adjoint differential expressions*, arXiv: quant-ph/0603187.
- [28] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 4: *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1980.
- [29] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1971.
- [30] З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, Мир, М., 1974.

Поступила в редакцию 8.12.2010,
после доработки 9.03.2011