Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Маршаков, О калибровочных теориях как матричных моделях, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 3, 391–412

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6737>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 12:59:46

© 2011 г.

А. В. Маршаков^{*†}

О КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ КАК МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЯХ

Обсуждается соотношение между препотенциалами Виттена–Зайберга, функциями Некрасова и матричными моделями. На квазиклассическом уровне показано, что матричные модели типа Егучи–Янга описывают инстантонные вклады в деформированную статистическую сумму суперсимметричной калибровочной теории. Подробно изучается построенное явно точное решение четырехмерной конформной теории, а также обсуждаются некоторые аспекты его связи с недавно предложенными логарифмическими бета-ансамблями. Рассматривается также “квантование” этой картины в терминах двумерной конформной теории с расширенной симметрией и подчеркивается отличие этой процедуры от хорошо известной картины пертурбативного разложения в матричных моделях. Вместо этого представление функций Некрасова с помощью конформных блоков или векторов Уиттекера дает их нетривиальную связь с пространствами Тейхмюллера и квантовыми интегрируемыми системами.

Ключевые слова: суперсимметричные калибровочные теории, матричные модели, двумерная конформная теория поля, модуль старшего веса алгебры Вирасоро.

1. ВВЕДЕНИЕ

Препотенциалы Виттена–Зайберга (ВЗ) играют важную роль в изучении свойств калибровочных теорий в фазе сильной связи [1], [2] (см. также статьи [3] и ссылки в них по поводу недавнего обсуждения этого круга проблем) и в то же время представляют собой замечательные объекты, интересные с точки зрения чистой математической физики. Не так давно препотенциалы ВЗ были воспроизведены в квазиклассическом пределе из инстантонных статистических сумм Некрасова [4]–[10]. Последние могут быть представлены в виде статистических моделей, в которых суммирование производится по наборам случайных разбиений или диаграммам Юнга [4], [11]. Возникшие изначально из интегралов по пространствам модулей инстантонов в дважды деформированных суперсимметричных калибровочных теориях, эти статистические суммы оказались непосредственно связанными с корреляционными функциями или конформными блоками в двумерных конформных квантовых

^{*}Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: mars@lpi.ru

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: mars@itep.ru

теориях поля [12] (см. также обсуждение этого соответствия, например, в работах [13]).

Квазиклассика функций Некрасова воспроизводит геометрию ВЗ, а собственно препотенциал возникает как критическое значение функционала свободной энергии соответствующей статистической модели [7], [8]. Это происходит весьма схожим образом с квазиклассикой матричной модели, хотя некоторые подробности (которые будут рассмотрены ниже) отличаются в этих двух случаях весьма существенно. Уже много раз было предложено (см., например, недавние попытки в работах [14], [15]) интерпретировать функции Некрасова в духе матричных моделей и вне рамок квазиклассического приближения, по крайней мере, в рамках пертурбативного разложения, с помощью которого вычисляются поправки к препотенциалу. Однако подобное соотношение вовсе не является очевидным.

Мы начнем с демонстрации этого соотношения для самого старого и наиболее явного его примера. Оказывается гораздо более естественным взять вместо полной функции Некрасова только ее инстантонную часть, оставив временно в стороне пертурбативные вклады. В простейшем случае при этом возникает одноматричная модель Егучи–Янга (ЕЯ) [16], но в пределе *нулевого* размера матриц [7], [17]. Периоды ВЗ вводятся при этом совершенно иным способом, не связанным с фракциями, или конденсатами собственных значений, как это обычно происходит в случае матричных моделей.

Частично это связано с различием в том, как вводится в двух случаях струнная константа – параметр квазиклассического разложения или суммирования по родам. Для матричных моделей этим параметром является ранг калибровочной группы, и разложение имеет смысл, только когда он велик. В случае суммирования по разбиениям струнная константа возникает скорее как специальная комбинация двух параметров деформации, а ранг группы или размер матриц, напротив, стремятся к нулю. Другим проявлением того же отличия является совершенно разная роль условий Вирасоро в этих двух теориях. Для матричных моделей условия Вирасоро эквивалентны петлевым уравнениям, приводящим непосредственно и к спектральной кривой, и к итерационной процедуре построения пертурбативных поправок, заключающейся в решении петлевых уравнений шаг за шагом (это можно считать одной из основных характерных черт теории типа В). В случае функций Некрасова, которые скорее относятся к струнным моделям типа А, условия Вирасоро определяют лишь гравитационное одевание функции Некрасова потомками единичного оператора, не налагая никаких ограничений на ее собственный вид.

Мы также собираемся обсудить связь геометрии ВЗ с недавно предложенными логарифмическими матричными моделями [18]. Для этой цели детально рассмотрены теории с фундаментальной материей и представлено, в частности, явное решение для простейшей из них – абелевой модели с двумя ароматами. Это дает намек на то, как именно геометрия ВЗ может быть переписана в форме, близкой к матричным моделям, но отнюдь не приводит к полному отождествлению двух картин. Вместо этого, возвращаясь к случаю чистых калибровочных теорий, в котором невозможно добиться даже совпадения кривых, мы демонстрируем, как подобная переформулировка геометрии ВЗ предлагает некоторый естественный способ ее квантования, использующий ее связь с двумерными конформными теориями. Это, в свою очередь, приводит к естественной гипотезе о представлении функции Некрасова в терминах новой квантованной картины.

2. ПРЕПОТЕНЦИАЛЫ ВЗ КАК ПРЕДЕЛ ФУНКЦИЙ НЕКРАСОВА

Инстантонные вычисления [4] в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории приводят [7], [8] к представлению обобщенного препотенциала ВЗ как критического значения функционала $\mathcal{F} \underset{\epsilon_{1,2} \rightarrow 0}{\sim} (1/\epsilon_1 \epsilon_2) \ln Z$, имеющего интегральный вид,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int f''(x) F_{UV}(x) dx - \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} f''(x_1) f''(x_2) F(x_1 - x_2) dx_1 dx_2, \quad (2.1)$$

и дающего главный вклад в функцию Некрасова $Z(\cdot | \epsilon_1, \epsilon_2)$ в пределе малых параметров деформации $\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$ после вычисления его экстремального значения относительно второй производной $f''(x) = d^2 f/dx^2$ от профильной функции диаграммы Юнга. В формуле (2.1) затравочный ультрафиолетовый потенциал равен

$$F_{UV}(x) = \sum_{k>0} t_k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad (2.2)$$

а ядро

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) \quad (2.3)$$

приходит из (обобщенной) меры Планшереля в сумме по случайным разбиениям [6]. Ожидается, что основной вклад при $\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$ возникает от некоторой большой “предельной” диаграммы Юнга с профилем $f(x)$, который можно найти, решая вариационную задачу для функционала (2.1) при условиях нормировки, наложенных как связи

$$a_i = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{I}_i} x f''(x) dx, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

Эти условия учитываются стандартным образом после их добавления к функционалу с множителями Лагранжа:

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} + \sum_{i=1}^N a_i^D \left(a_i - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{I}_i} x f''(x) dx \right) \quad (2.5)$$

(в случае калибровочной теории с группой $U(N)$ следует рассматривать класс решений с N разрезами $\mathbf{I}_i$, $i = 1, \dots, N$).

Весь этот набор данных (2.1)–(2.5) практически идентичен [19] стандартному квазиклассическому приближению матричных моделей (см., например, работы [20]–[25]), но с некоторыми заметными отклонениями: вместо ядра типа кулоновского газа в (2.1) появляется многозначное ядро (2.3), и свойства второй производной $f''(x)$ профильной функции для большой экстремальной диаграммы Юнга существенно отличаются от свойств плотности собственных значений для матричных моделей.

Условие экстремума для функционала (2.1) приводит к системе N интегральных уравнений

$$\sum_{k>0} t_k z^k - \int f''(x)(z-x)(\ln|z-x|-1) dx = a_i^D, \quad z \in \mathbf{I}_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

выполняющихся на каждом из сегментов, где профильная функция нетривиальна. В общем случае решение может быть выражено через абелевы интегралы на двойном накрытии

$$y^2 = \prod_{i=1}^N (z - x_i^+)(z - x_i^-), \quad (2.6)$$

представляющем собой гиперэллиптическую кривую рода $g = N - 1$. Положим

$$\begin{aligned} S(z) &= F'_{UV}(z) - \int f''(x)(z-x)(\ln(z-x)-1) dx - a^D \underset{z \rightarrow \infty}{=} \\ &= \sum_{k>0} t_k z^k - 2Nz(\ln z - 1) + 2 \sum_{i=1}^N a_i \ln z + \dots, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где интеграл вычисляется по полной области $\mathbf{I} = \bigcup_{i=1}^N \mathbf{I}_i$, $a^D = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j^D$, и рассмотрим производную этого выражения

$$\Phi(z) = \frac{dS}{dz} = \sum_{k>0} k t_k z^{k-1} - \int f''(x) \ln(z-x) dx, \quad (2.8)$$

на каждом из разрезов удовлетворяющую равенствам

$$\Phi(x+i0) + \Phi(x-i0) = 0, \quad x \in \mathbf{I}_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

и нормированную следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(x_N^+) &= 0, \\ \Phi(x_j^- \pm i0) &= \Phi(x_{j-1}^+ \pm i0) = \pm 2\pi i(N-j+1), \quad j = 2, \dots, N, \\ \Phi(x_1^-) &= \pm 2\pi iN. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если все $t_k = 0$ при $k \neq 1$, а $e^{t_1} = \Lambda^{2N}$, то производная $\Phi = dS/dz$ представляет собой абелев интеграл на кривой (2.6) с асимптотикой

$$\Phi \underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} \mp 2N \ln z \pm 2N \ln \Lambda + O(z^{-1})$$

($z(P_{\pm}) = \infty$); скачки этой кривой целочисленны вследствие (2.9), другими словами, $\oint d\Phi \sim 4\pi i\mathbb{Z}$. Это означает, что гиперэллиптическая кривая (2.6) может быть также представлена как алгебраическая риманова поверхность функции $w = e^{-\Phi/2}$, удовлетворяющей квадратному уравнению

$$\Lambda^N \left(w + \frac{1}{w} \right) = P_N(z) = \prod_{i=1}^N (z - v_i), \quad (2.10)$$

или как

$$y^2 = P_N(z)^2 - 4\Lambda^{2N}, \quad (2.11)$$

т.е. точки ветвления $x_i^{\pm}$ являются корнями уравнений $P_N(z) \mp 2\Lambda^N = 0$, а $y = \Lambda^N(w - 1/w)$. Заметим, что в простейшем случае $N = 1$ всегда можно получить форму (2.10), т.е.

$$z - v = \Lambda \left(w + \frac{1}{w} \right), \quad (2.12)$$

с помощью замены переменных, таким образом, (2.10) может быть использована даже при включенных старших потоках [7], [8]. Однако в общем случае при ненулевых параметрах ультрафиолетового потенциала (2.2) профильная функция не может быть получена как скачок алгебраической функции на кривой (2.6), в отличие от резольвент матричной модели.

Теперь производящий дифференциал

$$dS = -2 \ln w \, dz = -d(2z \ln w) + 2z \frac{dw}{w} \quad (2.13)$$

является преобразованным по Лежандру дифференциалом ВЗ $dS_{\text{SW}} \sim z \cdot dw/w$ на кривой (2.10), (2.11). Его периоды

$$a_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{A_i} z \frac{dw}{w} \quad (2.14)$$

совпадают с интегралами ВЗ, а единственный нетривиальный вычет на бесконечности дает

$$\text{res}_{P_+}(z^{-1}dS) = -\text{res}_{P_-}(z^{-1}dS) = \ln \Lambda^{2N}, \quad \text{res}_{P_+}dS = -\text{res}_{P_-}dS = 2 \sum_{j=1}^N v_j.$$

Дифференциал (2.13) удовлетворяет условию (здесь вариация производится при постоянной координате z и постоянном масштабном множителе Λ)

$$\delta dS \sim \frac{\delta w}{w} dz = \frac{\delta P(z)}{y} dz$$

и при условии $\sum_{j=1}^N a_j = 0$ является голоморфным. Это обеспечивает интегрируемость градиентных формул

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} = \oint_{B_i} z \frac{dw}{w}, \quad (2.15)$$

поскольку условие их непротиворечивости сводится к симметричности матрицы периодов – частному случаю билинейных соотношений Римана.

3. МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ЕГУЧИ–ЯНГА

Подставим теперь в (2.1) сдвинутую профильную функцию [7], [17]

$$\begin{aligned} f(x) &= |x - a| + g(x), \\ f'(x) &= \text{sign}(x - a) + g'(x) \equiv \text{sign}(x - a) + \rho(x), \\ f''(x) &= 2\delta(x - a) + g''(x), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где теперь функция $g(x)$ и ее производная $g'(x) = \rho(x)$ обращаются в ноль на концах разреза $\mathbf{I} = (x_-, x_+)$. Очевидным образом отсюда получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= F_{\text{UV}}(a) + \frac{1}{2} \int g''(x) F_{\text{UV}}(x) dx - \int g''(x) F(x - a) dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} g''(x_1) g''(x_2) F(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \equiv F_{\text{UV}}(a) - \mathcal{F}_{\text{inst}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\mathcal{F}_{\text{inst}} = \frac{1}{2} \int \rho(x) \mathcal{W}(x) dx - \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} \rho(x_1) \rho(x_2) \ln(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.3)$$

и $\mathcal{W}(x) = F'_{\text{UV}}(x) - 2(x - a)(\ln(x - a) - 1)$. Вариационную задачу для функционала (3.3) следует решать при дополнительном условии

$$- \int x g''(x) dx = \int \rho(x) dx = 0, \quad (3.4)$$

вытекающем из (2.4). Зависимость функционала $\mathcal{F}_{\text{inst}}$ от переменной a может быть легко восстановлена путем переопределения $x \rightarrow x + a$ переменной x и переобозначения $\rho(x + a) \rightarrow \rho(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{inst}} = & \frac{1}{2} \int \rho(x) (F'_{\text{UV}}(x + a) - 2x(\ln x - 1)) dx - \\ & - \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} \rho(x_1) \rho(x_2) \ln(x_1 - x_2) dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\text{inst}}}{\partial a} = \frac{1}{2} \int \rho(x) F''_{\text{UV}}(x + a) dx = \sum_{k > 1} k t_k \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{inst}}}{\partial t_{k-1}}. \quad (3.5)$$

Это, в свою очередь, означает, что

$$\mathcal{F}_{\text{inst}}(a; t_1, t_2, \dots) = \widehat{\mathcal{F}}_0(t_1, t_2, \dots) \Big|_{t_1 \rightarrow F''_{\text{UV}}(a)}, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}_0 \equiv \mathcal{F}_{\text{inst}}|_{a=0} = & \frac{1}{2} \int \rho(x) (F'_{\text{UV}}(x) - 2x(\ln x - 1)) dx - \\ & - \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} \rho(x_1) \rho(x_2) \ln(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

представляет собой попросту эффективный потенциал матричной модели ЕЯ [16] с наложенным условием (3.4) обращения в ноль проинтегрированной плотности собственных значений.

Таким образом, зависимость от нулевого тодовского времени вводится в данном случае достаточно необычным для матричных моделей (3.5), (3.6) способом. С точки зрения иерархии цепочки Тоды, которая отвечает за динамику по параметрам потенциала [26], здесь следует различать два совершенно различных решения уравнения Тоды

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1^2} = \exp\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_0^2}\right), \quad (3.7)$$

а именно решение

$$\mathcal{F}_{\text{MM}} = \frac{1}{2} t_0^2 \left(\ln t_0 - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} t_0 t_1^2 + \dots, \quad t_0 = \hbar N, \quad (3.8)$$

отвечающее стандартной матричной модели (см., например, [25]), и решение

$$\mathcal{F}_{\text{EY}} = \frac{1}{2} t_0 t_1^2 + e^{t_1} + \dots, \quad t_0 = a, \quad (3.9)$$

для модели ЕЯ. Существенная разница возникает в зависимости решений от нулевого времени: для стандартной матричной модели эта зависимость с необходимостью содержит функцию (2.3) (слагаемое $F(t_0)$ в правой части (3.8)), дающую логарифмический член во второй производной по t_0 , который “убивается” потом при взятии экспоненты в уравнении (3.7), в то время как в случае модели ЕЯ отсутствие логарифмической зависимости от $t_0 = a$ с необходимостью приводит к экспоненциальной зависимости от t_1 . Более того, массы W -бозонов, которые выражаются через периоды дуального дифференциала ВЗ (2.7), *никак не* связаны с фракциями собственных значений матричной модели с потенциалом ЕЯ.

Заметим также, что

$$\mathcal{W}(x) = F'_{UV}(x) + 2a(\ln a - 1) + \sum_{n>0} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)a^n},$$

поэтому эффективный потенциал матричной модели ЕЯ удовлетворяет равенству $\mathcal{F}_{\text{inst}} = \mathcal{F}_{\text{inst}}(t_1; \hat{t}_2, \hat{t}_3, \dots)$, где

$$\hat{t}_k = t_k + \frac{1}{k(k-1)a^{k-1}}, \quad k \geq 2,$$

и имеет естественное разложение при больших значениях переменной a .

В неабелевом случае вместо (3.1) следует сделать подстановку

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^N |x - a_j| + g(x) \equiv L(x; \mathbf{a}) + g(x), \\ f'(x) &= \sum_{j=1}^N \text{sign}(x - a_j) + g'(x) \equiv \sum_{j=1}^N \text{sign}(x - a_j) + \rho(x), \\ f''(x) &= 2 \sum_{j=1}^N \delta(x - a_j) + g''(x), \end{aligned}$$

после которой функция $g(x)$ и ее производная $g'(x) = \rho(x)$ вновь обращаются в ноль на концах всех разрезов $\mathbf{I}_j = (x_j^-, x_j^+)$, $j = 1, \dots, N$. Теперь вместо (3.2) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \sum_{j=1}^N F_{UV}(a_j) - \sum_{i \neq j} F(a_i - a_j) + \\ &+ \frac{1}{2} \int g''(x) F_{UV}(x) dx - \int g''(x) \sum_{j=1}^N F(x - a_j) dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} g''(x_1) g''(x_2) F(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \equiv \\ &\equiv \sum_{j=1}^N F_{UV}(a_j) - \sum_{i \neq j} F(a_i - a_j) - \mathcal{F}_{\text{inst}} \equiv \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_{\text{inst}}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{F}_0$ представляет собой сумму классического и пертурбативного вкладов в пре-потенциал (см. приложение), в то время как инстантонный вклад опять выражается

в виде эффективного потенциала “матричной модели”:

$$\mathcal{F}_{\text{inst}} = \frac{1}{2} \int \rho(x) \mathcal{W}(x) dx - \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} \rho(x_1) \rho(x_2) \ln(x_1 - x_2) dx_1 dx_2, \quad (3.10)$$

где

$$\mathcal{W}(x) = F'_{\text{UV}}(x) - 2 \sum_{j=1}^N (x - a_j) (\ln(x - a_j) - 1).$$

Вариационная задача для функционала (3.10) опять решается при условиях (3.4) на каждом из разрезов в $\mathbf{I}$, поскольку

$$\sum_{j=1}^N a_j^{\text{D}} \left(a_j - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{I}_j} x f''(x) dx \right) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_j^{\text{D}} \int_{\mathbf{I}_j} x g''(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_j^{\text{D}} \int_{\mathbf{I}_j} \rho(x) dx. \quad (3.11)$$

Таким образом, мы нашли, что в неабелевом случае инстантонная статистическая сумма описывается матричной моделью типа ЕЯ с нулевыми фракциями собственных значений, в то время как роль периодов ВЗ играют неоднородности потенциала.

4. СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ КХД И МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

Для того чтобы проанализировать возможные следствия этого соответствия, перейдем к разбору случая суперсимметричной КХД, или $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с дополнительными фундаментальными ароматами материи [27], [28]. Особое внимание мы собираемся уделить четырехмерной конформной теории, т. е. случаю, когда при числе ароматов $N_f = 2N$ бета-функция $\mathcal{N} = 2$ теории $\beta = 2N - N_f$ равна нулю, и уже после этого вернуться к чистым суперсимметричным калибровочным теориям в пределе больших масс мультиплетов фундаментальной материи.

4.1. Абелева теория с двумя ароматами: явное решение. В случае абелевой теории с двумя ароматами $f = 1, 2$ функционал $\mathcal{F}$ отличается от приведенного в (2.1) лишь подстановкой $F_{\text{UV}}(x) \rightarrow F_{\text{UV}}(x) + \sum_f F(x - m_f)$ (см. приложение, где этот вопрос рассматривается на уровне пертурбативного препотенциала):

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{1}{2} \int f''(x) \left(F_{\text{UV}}(x) + \sum_f F(x - m_f) \right) dx - \\ & - \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} f''(x_1) f''(x_2) F(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 + a^{\text{D}} \left(a - \frac{1}{2} \int x f''(x) dx \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

так что функция

$$\begin{aligned} S(z) = & 2 \frac{d}{dz} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta f''(z)} = F'_{\text{UV}}(z) + \sum_f F'(z - m_f) - \int F'(z - x) f''(x) dx - a^{\text{D}} \stackrel{z \rightarrow \infty}{=} \\ & \stackrel{z \rightarrow \infty}{=} \sum_{k > 0} t_k z^k + \left(2a - \sum_f m_f \right) \ln z - \left(a^{\text{D}} + \sum_f m_f \right) + O\left(\frac{1}{z}\right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$S(z) \stackrel{z \rightarrow m_f}{=} (z - m_f) \ln(z - m_f) + \dots, \quad f = 1, 2,$$

приобретает дополнительные особенности при $z \rightarrow m_f$, $f = 1, 2$, в то время как сингулярность ЕЯ $z \ln z$ при $z \rightarrow \infty$ сокращается вследствие того, что бета-функция равна нулю (для двух ароматов).

Более явно это можно увидеть для функции

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{dS}{dz} = F''_{UV}(z) + \sum_f \ln(z - m_f) - \int \ln(z - x) f''(x) dx = \\ &= \sum_{k>0} k t_k z^{k-1} + \sum_f \ln\left(1 - \frac{m_f}{z}\right) - \int \ln\left(1 - \frac{x}{z}\right) f''(x) dx \stackrel{z \rightarrow \infty}{=} \\ &\stackrel{z \rightarrow \infty}{=} \sum_{k>0} k t_k z^{k-1} + \frac{2a - \sum_f m_f}{z} + \sum_{k>0} \frac{1}{z^{k+1}} \left(2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} - \frac{1}{k} \sum_f m_f^k\right), \\ \Phi(z) &\stackrel{z \rightarrow m_f}{=} \ln(z - m_f) + O(1), \quad f = 1, 2,\end{aligned}$$

и ее производной

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dz} &= F'''_{UV}(z) + \sum_f \frac{1}{z - m_f} - \int \frac{f''(x)}{z - x} dx \stackrel{z \rightarrow \infty}{=} \\ &\stackrel{z \rightarrow \infty}{=} \sum_{k>1} k(k-1) t_k z^{k-2} - \frac{2a - \sum_f m_f}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right), \\ d\Phi(z) &\stackrel{z \rightarrow m_f}{=} \frac{dz}{z - m_f} + \dots, \quad f = 1, 2.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Решение может быть по-прежнему построено с помощью нечетного относительно замены $y \leftrightarrow -y$ дифференциала на цилиндре

$$y^2 = (z - x_+)(z - x_-), \tag{4.4}$$

а именно

$$d\Phi = \frac{\psi(z) dz}{(z - m_1)(z - m_2)y}. \tag{4.5}$$

На малом фазовом пространстве, где только $t_1 \neq 0$, асимптотика (4.3) означает, что числитель в (4.5) является линейной функцией: $\psi(z)|_{t_k=t_1\delta_{k,1}} = \psi_1 z + \psi_0$, где

$$\psi_1 = y_1 + y_2 = \sum_f m_f - 2a, \quad \psi_0 = -m_1 y_2 - m_2 y_1, \quad y_f = y(m_f), \quad f = 1, 2.$$

Решение (4.5) удобно описать в следующих терминах:

$$d\Phi = -\frac{1}{\sqrt{1-4\zeta^2}} \frac{dz}{y} \frac{(2v - \sum_f m_f)z + 2m_1 m_2 - v \sum_f m_f}{(z - m_1)(z - m_2)} \equiv -2 \frac{dW}{W}, \tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned}W + \frac{1}{W} &= \frac{z - v}{\sqrt{Q(z)}}, \quad Y^2 = (1 - 4\zeta^2)y^2 = (z - v)^2 - 4Q(z), \\ Q(z) &= \zeta^2(z - m_1)(z - m_2), \quad y_f = \frac{m_f - v}{\sqrt{1-4\zeta^2}}, \quad f = 1, 2,\end{aligned} \tag{4.7}$$

и¹⁾

$$\zeta = \frac{1}{2 \operatorname{ch}(t_1/2)}, \quad \sqrt{1-4\zeta^2} = -\operatorname{th} \frac{t_1}{2},$$

$$\frac{2v - \sum_f m_f}{\sqrt{1-4\zeta^2}} = -\left(2v - \sum_f m_f\right) \operatorname{cth} \frac{t_1}{2} = 2a - \sum_f m_f. \quad (4.8)$$

При $e^{t_1} \rightarrow 0$ последнее соотношение превращается в $v = a$, и в этом пределе при больших массах естественно ввести конечный масштабный параметр $\Lambda^2 = \zeta^2 m_1 m_2$.

Чтобы записать в явном виде производящую функцию (4.2), сначала следует ввести (аналогично (2.12)) униформизацию (4.4) посредством соотношений

$$\frac{L}{2} \left(\varpi + \frac{1}{\varpi} \right) = z - V, \quad \frac{L}{2} \left(\varpi - \frac{1}{\varpi} \right) = y, \quad \frac{d\varpi}{\varpi} = \frac{dz}{y},$$

$$V = \frac{x_+ + x_-}{2} = \frac{v - 2\zeta^2(m_1 + m_2)}{1 - 4\zeta^2}, \quad (4.9)$$

$$L = \frac{x_+ - x_-}{2} = \frac{2\zeta}{1 - 4\zeta^2} \sqrt{\zeta^2(m_1 - m_2)^2 + (v - m_1)(v - m_2)}$$

и определить вспомогательные функции

$$\chi_f = \frac{\varpi - \varpi_f}{\varpi \varpi_f - 1},$$

$$\chi_f^2 - \sigma_f \chi_f + 1 = 0, \quad \sigma_f = \frac{2(m_f - V)(z - V) - L^2}{L(z - m_f)},$$

$$\chi_f \underset{z \rightarrow \infty}{=} \varpi_f = \frac{1}{L}(m_f - V + y_f), \quad f = 1, 2.$$

Производящая функция (4.2) теперь приобретает вид

$$S = \sum_{k>0} t_k \Omega_k + (2a - m_1 - m_2) \ln \varpi - \sum_f (z - m_f) \ln \chi_f - y \ln \Xi^2, \quad (4.10)$$

$$\Omega_k = z^k(\varpi)_+ - z^k(\varpi)_-, \quad k > 0, \quad \zeta = \frac{1}{\Xi + 1/\Xi}, \quad \ln(\varpi_1 \varpi_2) = \frac{1}{\Xi^2},$$

где просто использован базис нечетных относительно инволюции функций на цилиндре (4.4) с единственно допустимыми сингулярностями в двух бесконечностях такими, как $\Omega_0 = \ln \varpi$, $\Omega_1 = y$ и т. д. Если только $t_1 \neq 0$, то $\Xi^2 = e^{t_1}$, и из формулы (4.10) мы получаем

$$S(z)|_{t_k=t_1 \delta_{k,1}} = -2z \ln W + (2a - m_1 - m_2) \ln \varpi + \sum_f m_f \ln \chi_f,$$

где $W^2 = \chi_1 \chi_2$ определена в (4.7). Используя эти формулы, легко найти в окончательном виде препотенциал для (4.6), (4.8) при единственном ненулевом t_1 и с точностью до линейных членов, пропорциональных $(m_1 + m_2)a$, которые не дают вклада во вторые производные (константы связи) и могут быть тем самым скомпенсиро-

¹⁾Знак перед корнем выбран из условия согласования с пределом слабой связи, когда $e^{t_1} \rightarrow 0$, а $\operatorname{th}(t_1/2) < 0$.

ваны добавлением линейных членов, пропорциональных $(m_1 + m_2)x$, к потенциалу в (4.1). Имеем

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}a^2t_1 - (a - m_1)(a - m_2)\ln(1 - e^{t_1}) + \mathcal{F}_{\text{pert}}(a; \mathbf{m}), \quad \mathcal{F}_{\text{pert}}(a; \mathbf{m}) = \sum_f F(a - m_f),$$

так что

$$\tau(a) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^2} = \ln \frac{e^{t_1} \prod_f (a - m_f)}{(1 - e^{t_1})^2} = \ln a^{N_f} + \tau_{\text{conf}},$$

где

$$\tau_{\text{conf}} = \ln \frac{e^{t_1} \prod_f (1 - m_f/a)}{(1 - e^{t_1})^2} \underset{m_f \rightarrow 0}{=} \ln \frac{e^{t_1}}{(1 - e^{t_1})^2}$$

не зависит при нулевых массах от вакуумных средних (конденсатов) и приводит к непертурбативной перенормировке константы связи: $e^{\tau/2} = 1/(e^{-t_1/2} - e^{t_1/2})$ или

$$\tau = t_1 - 2\ln(1 - e^{t_1}) = t_1 + 2 \sum_{k>0} \frac{e^{kt_1}}{k},$$

что является упрощенным модельным аналогом инстантонной перенормировки константы связи, задаваемой асимптотической формулой Замолотчикова [29].

Формулы для матричной модели ЕЯ (3.3) в конформном случае остаются практически без изменений, за исключением формулы для потенциала,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(x) &\rightarrow \mathcal{W}(x; \mathbf{m}) = F'_{\text{UV}}(x) + \sum_f F'(x - m_f) - 2F'(x - a) = \\ &= \sum_{k>0} t_k x^k + \sum_f (x - m_f)(\ln(x - m_f) - 1) - 2(x - a)(\ln(x - a) - 1), \end{aligned}$$

который при $a = 0$ и $m_f = 0$, $f = 1, 2$, принимает хорошо известный вид потенциала обычной одноматричной модели.

4.2. Различные параметризации кривых. Мы уже отмечали выше, что для построения точного решения в явном виде удобно воспользоваться параметризацией (4.9) вместо более часто используемой формы (4.7) кривой суперсимметричной КХД. Заметим теперь, что кривую (4.7) можно также представить как

$$q_1(z)w^2 - (z - v)w + q_2(z) = 0, \quad (4.11)$$

где

$$q_f(z) = \zeta(z - m_f), \quad f = 1, 2, \quad w^2 = \frac{q_2}{q_1} W^2 = \frac{q_2}{q_1} \chi_1 \chi_2.$$

Вводя еще одну новую переменную

$$x = \frac{z}{w} = \frac{z}{W} \sqrt{\frac{q_1(z)}{q_2(z)}},$$

можно переписать (4.11) в виде

$$\begin{aligned} x &= \frac{\zeta m_1 w^2 - vw + \zeta m_2}{\zeta w(w^2 + 1 - w/\zeta)} \underset{\zeta = \frac{1}{\Xi + 1/\Xi}}{=} \frac{m_1 w^2 - v(\Xi + 1/\Xi)w + m_2}{w(w - \Xi)(w - 1/\Xi)} = \\ &= \frac{m_2}{w} + \frac{a - m_2}{w - \Xi} - \frac{a - m_1}{w - 1/\Xi}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где использованы соотношения (4.8) (вспомним также, что на малом фазовом пространстве $\Xi^2 = e^{t_1}$ представляет собой просто экспоненту от затравочной константы связи). Дифференциал ВЗ принимает вид

$$\begin{aligned} dS_{\text{SW}} &= z \frac{dW}{W} = z \frac{dw}{w} + \frac{z}{2} \left(\frac{dq_1}{q_1} - \frac{dq_2}{q_2} \right) = x dw + \frac{m_1}{2} \frac{dz}{z - m_1} - \frac{m_2}{2} \frac{dz}{z - m_2} \equiv \\ &\equiv dS_G + \frac{m_1}{2} \frac{dz}{z - m_1} - \frac{m_2}{2} \frac{dz}{z - m_2}. \end{aligned}$$

Первый член в правой части равенства, $dS_G = x dw$, именно в такой параметризации был введен в работе [30] в контексте построения кривых с помощью D-бран. С учетом (4.12) его естественно нормировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{w=0} x dw &= m_2, & \operatorname{res}_{w=\infty} x dw &= -m_1, \\ \operatorname{res}_{w=\Xi} x dw &= a - m_2, & \operatorname{res}_{w=1/\Xi} x dw &= -(a - m_1). \end{aligned}$$

Такой вид кривой особенно естественен с точки зрения сравнения с представлением статистической суммы $U(1)$ -теории с $N_f = 2$ на языке двумерной конформной теории свободного скалярного поля [5]:

$$\begin{aligned} Z(x; a, m_1, m_2) &= Z_{\text{pert}} \cdot \langle e^{im_1\phi(\infty)} e^{i(a-m_1)\phi(1)} x^{L_0} e^{-i(a-m_2)\phi(1)} e^{-im_2\phi(0)} \rangle = \\ &= Z_{\text{pert}} \cdot x^{(m_2^2 + (a-m_2)^2)/2} \langle e^{im_1\phi(\infty)} e^{i(a-m_1)\phi(1)} e^{-i(a-m_2)\phi(x)} e^{-im_2\phi(0)} \rangle = \\ &= Z_{\text{pert}} \cdot x^{a^2/2} (1-x)^{-(a-m_1)(a-m_2)}. \end{aligned}$$

Пертурбативный вклад можно также включить собственно в коррелятор путем переопределения скалярного произведения в двумерной теории (см. подробности ниже).

Из (4.12) легко находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} dS_G &= \frac{\partial x}{\partial a} dw = \frac{(\Xi - 1/\Xi)dw}{(w - \Xi)(w - 1/\Xi)} = d\omega, \\ \operatorname{res}_{w=\Xi} d\omega &= 1, & \operatorname{res}_{w=1/\Xi} d\omega &= -1, \end{aligned}$$

представляет собой вырожденный аналог голоморфного дифференциала.

4.3. Суперсимметричная КХД, конформная теория и логарифмические потенциалы. В случае неабелевой суперсимметричной КХД (решение с N разрезами) формула для потенциала матричной модели ЕЯ (с фундаментальной материей), очевидно, принимает вид

$$\mathcal{W}(x) = F'_{\text{UV}}(x) + \sum_{f=1}^{N_f} (x - m_f) (\ln(x - m_f) - 1) - 2 \sum_{j=1}^N (x - a_j) (\ln(x - a_j) - 1).$$

Это означает, что в конформном случае $N_f = 2N$ у производной этого потенциала уже отсутствует логарифмическая особенность в бесконечности,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}'(x) &= F''_{\text{UV}}(x) + \sum_f \ln(x - m_f) - 2 \sum_j \ln(x - a_j) = \\ &= F''_{\text{UV}}(x) + \sum_f \ln\left(1 - \frac{m_f}{x}\right) - 2 \sum_j \ln\left(1 - \frac{a_j}{x}\right), \end{aligned}$$

но зато имеются логарифмические сингулярности при $x = a_j$ и $x = m_f$.

В общем случае для $U(N)$ -теории с $N_f \leq 2N$ ароматами на малом фазовом пространстве обычно используют [27], [28] аналог представления (4.7):

$$\begin{aligned} W + \frac{1}{W} &= \frac{P(z)}{\sqrt{Q(z)}}, & Y^2 &= P^2(z) - 4Q(z), \\ P(z) &= z^N - \sum_{k=0}^{N-2} u_k z^k, & Q(z) &= \Lambda^{2N-N_f} \prod_{f=1}^{N_f} (z - m_f), \end{aligned} \quad (4.13)$$

с производящим дифференциалом

$$dS_{\text{SW}} = \frac{z dz}{Y} \left(P'(z) - \frac{P(z)Q'(z)}{2Q(z)} \right). \quad (4.14)$$

В конформном случае $N_f = 2N$ вместо размерного масштабного параметра Λ в теории появляется безразмерная константа, а соотношения (4.13) превращаются в

$$\begin{aligned} W + \frac{1}{W} &= \frac{P(z)}{\sqrt{Q(z)}}, & Y^2 &= (1 - 4\zeta^2)y^2 = P^2(z) - 4Q(z), \\ Q(z) &= \zeta^2 \prod_{f=1}^{2N} (z - m_f). \end{aligned}$$

При нулевых массах дифференциал (4.14) становится голоморфным:

$$\begin{aligned} dS_{\text{SW}} &\underset{Q(z)=\zeta^2 z^{N_f}}{=} \frac{dz}{Y} \left(zP'(z) - \frac{N_f}{2}P(z) \right) = \\ &= \frac{dz}{Y} \left(\left(N - \frac{N_f}{2} \right) z^N + \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{N_f}{2} - k \right) u_k z^k \right) \underset{N_f=2N}{=} \\ &\underset{N_f=2N}{=} \frac{dz}{Y} \sum_{k=0}^{N-2} (N - k) u_k z^k. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Так, в случае $N = 2$, $N_f = 4$ дифференциал (4.15) пропорционален единственному на торе голоморфному дифференциалу (см., например, [29]):

$$dS_{\text{SW}} \sim u \frac{dz}{Y} = \frac{u}{\sqrt{1 - 4\zeta^2}} \frac{dz}{y} \sim \frac{d\xi}{\eta}, \quad (4.16)$$

где

$$\begin{aligned} \eta^2 &= \prod_{f=0,1,\lambda} (\xi - q_f) = \xi(\xi - 1)(\xi - \lambda), \\ \zeta^2 &= \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} = \frac{1}{(\sqrt{\lambda} + 1/\sqrt{\lambda})^2} \underset{\lambda=1/\sqrt{\Xi}}{=} \frac{1}{(\Xi + 1/\Xi)^2}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

и, поскольку $\Xi = e^{\tau_0/2}$, это тождественно совпадает с формулой (4.8) для случая $N = 1$.

При ненулевых массах, однако, гораздо удобнее использовать аналог представления (4.11):

$$q(z)w^2 - P(z)w + \tilde{q}(z) = 0, \quad (4.18)$$

где $P(z)$ совпадает с полиномом степени N в (4.13), но при $N_f = 2N$ можно естественным образом ввести функции

$$q(z) = \zeta \prod_{f=1}^N (z - m_f), \quad \tilde{q}(z) = \zeta \prod_{f=1}^N (z - \tilde{m}_f) \quad (4.19)$$

для некоторого естественного разбиения $N_f = 2N$ мультиплетов материи на N “фундаментальных” и N “антифундаментальных” с массами m и $\tilde{m}$ соответственно. Опять же аналогично (4.11) мы положили

$$w^2 = \frac{\tilde{q}(z)}{q(z)} W^2.$$

Если взять $N = 2$ в (4.19), то уравнение (4.18) превращается в квадратное относительно переменной z , и поэтому может быть переписано [31] в виде

$$C_2(w)z^2 - C_1(w)z + C_0(w) = 0, \quad (4.20)$$

где

$$C_2(w) = \zeta w^2 - w + \zeta_{\zeta=\Xi+1/\Xi} \left(\Xi + \frac{1}{\Xi} \right) (w - \Xi) \left(w - \frac{1}{\Xi} \right).$$

Уравнение (4.20) может быть далее представлено как

$$\tilde{z}^2 \equiv \left(z - \frac{C_1}{2C_2} \right)^2 = \frac{C_1^2}{4C_2^2} - \frac{C_0}{C_2} \equiv x^2 w^2$$

или как

$$x^2 = \frac{C_1^2(w)}{4w^2 C_2^2(w)} - \frac{C_0(w)}{w^2 C_2(w)}.$$

При нулевых массах последнее уравнение принимает вид

$$x^2 = -\frac{C_0(w)}{w^2 C_2(w)} = -\frac{u}{\zeta w(w - \Xi)(w - 1/\Xi)} = -\frac{u}{\zeta \Xi^3} \frac{1}{\xi(\xi - 1)(\xi - \lambda)}$$

в обозначениях эллиптической кривой (4.17).

В общем случае вместо голоморфного дифференциала (4.16) можно написать

$$dS_{\text{SW}} = \frac{\sqrt{p(\xi)} d\xi}{\xi(\xi - 1)(\xi - \lambda)}$$

для некоторого полинома

$$p(\xi) = \sum_{j=0}^4 p_j \xi^j \xrightarrow{m_f \rightarrow 0} C \xi(\xi - 1)(\xi - \lambda),$$

который должен воспроизвести дифференциал (4.16) в пределе нулевых масс. С помощью соотношений между коэффициентами $p(\xi)$ и вычетами,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\xi=0} dS_{\text{SW}} &= \sqrt{p(0)} = \sqrt{p_0} = \lambda m_0, & \operatorname{res}_{\xi=\infty} dS_{\text{SW}} &= \sqrt{p_4} = -m_\infty, \\ \operatorname{res}_{\xi=1} dS_{\text{SW}} &= \sqrt{p(1)} = (1 - \lambda) m_1, & \operatorname{res}_{\xi=\lambda} dS_{\text{SW}} &= \sqrt{p(\lambda)} = \lambda(\lambda - 1) m_\lambda, \end{aligned}$$

получаем $\delta_{\text{moduli}} p(\xi) = \delta_{\text{moduli}} C\xi(\xi - 1)(\xi - \lambda)$, и это означает, что для вариации дифференциала ВЗ можно написать

$$\delta_{\text{moduli}} dS_{\text{SW}} \sim \frac{d\xi}{\sqrt{p(\xi)}} \frac{\delta_{\text{moduli}} p(\xi)}{\xi(\xi - 1)(\xi - \lambda)} = \delta_{\text{moduli}} C \frac{d\xi}{\sqrt{p(\xi)}},$$

так что правая часть этого равенства, очевидно, голоморфна.

Можно также представить 2-дифференциал $\mathcal{T}(d\xi)^2 = (dS_{\text{SW}})^2$ в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \left(\frac{dS_{\text{SW}}}{d\xi} \right)^2 = \frac{p(\xi)}{\xi^2(\xi - 1)^2(\xi - \lambda)^2} = \sum_{f=0,1,\lambda} \left(\frac{m_f^2}{(\xi - q_f)^2} + \frac{C_f}{\xi - q_f} \right) = \\ &= \left(\sum_{f=0,1,\lambda} \frac{m_f}{\xi - q_f} \right)^2 + \frac{\mathcal{C}(\xi)}{\xi(\xi - 1)(\xi - \lambda)}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$\sum_{f=0,1,\lambda} C_f = 0, \quad C_1 + \lambda C_\lambda = - \sum_{A=0,1,\lambda,\infty} m_A^2, \quad (4.22)$$

и

$$\mathcal{C}(\xi) = -\xi \left[\left(\sum_{f=0,1,\lambda} m_f \right)^2 + m_\infty^2 \right] + (C_0 - 2m_0m_1\lambda - 2m_0m_\lambda)$$

является линейной функцией, удовлетворяющей равенству $\delta_{\text{moduli}} \mathcal{C}(\xi) = \lambda \delta_{\text{moduli}} C_0$. Формулу (4.21) можно интерпретировать двумя различными способами. Во-первых, ей можно придать смысл среднего тензора энергии-импульса в некоторой двумерной конформной теории,

$$\mathcal{T}(\xi) = \frac{\langle T(\xi) \prod_{A=0,1,\lambda,\infty} V_A(q_A) \rangle}{\langle \prod_{A=0,1,\lambda,\infty} V_A(q_A) \rangle},$$

со вставками четырех примарных операторов с размерностями m_A^2 , $A = 0, 1, \lambda, \infty$ (m_∞ определяется вторым из уравнений (4.22)), а C_f представляют собой соответствующие аксессуарные параметры (см., например, работу [32] и ссылки в ней). Во-вторых, правая часть (4.21) имеет очевидную форму кривой матричной модели, если в ней формально выбрать следующий логарифмический потенциал:

$$\mathcal{V}(\xi) = \sum_{f=0,1,\lambda} m_f \ln(\xi - q_f);$$

периоды ВЗ могут быть при этом отождествлены с дробями собственных значений [18].

Последнее наблюдение нам не представляется особенно полезным, несмотря на обширную литературу по этому поводу, и в оставшейся части работы мы в основном уделим внимание первому, вернувшись к его интерпретации для случая чистой суперсимметричной калибровочной теории.

5. ЧИСТЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ И ВЕКТОРЫ УИТТЕКЕРА

Если перейти в (4.11) к пределу $\zeta \rightarrow 0$ и $m_{1,2} \rightarrow \infty$ (в котором отщепляется материя), так что $\Lambda^2 = \zeta^2 m_1 m_2$ фиксировано²⁾, то вместо (4.12) получаем уравнение

$$x = \frac{\Lambda}{w^2} + \frac{v}{w} + \Lambda = \frac{\langle \Psi | J(w) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \equiv \langle J(w) \rangle, \quad (5.1)$$

которое представляет собой усреднение $U(1)$ -тока $J(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n / w^{n+1}$ по состоянию, удовлетворяющему уравнениям

$$J_n |\Psi\rangle = 0, \quad n > 1, \quad J_1 |\Psi\rangle = \Lambda |\Psi\rangle, \quad J_0 |\Psi\rangle = a |\Psi\rangle.$$

Поскольку $[J_n, J_m] = n \delta_{n+m, 0}$, эти уравнения могут быть немедленно решены с помощью формул

$$|\Psi\rangle = \Lambda^{L_0} e^{J_{-1}} |a\rangle, \quad J_n |a\rangle = 0, \quad n > 0, \quad J_0 |a\rangle = a |a\rangle,$$

т. е. в терминах когерентного состояния в (заряженном) модуле Фока; при этом

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \langle a | e^{J_1} \Lambda^{2L_0} e^{J_{-1}} | a \rangle = \Lambda^{a^2} e^{\Lambda^2} \underset{\Lambda^2 = e^{t_1}}{=} \exp\left(\frac{1}{2} a^2 t_1 + e^{t_1}\right).$$

Производящий дифференциал может быть при этом интерпретирован как среднее $\widehat{U(1)}$ -тока, $\langle J(w) \rangle = dS_{\text{SW}} = x dw$, а более знакомая форма (2.12) этого равенства воспроизводится подстановкой $x = z/w$.

Для чистой $U(2)$ -суперсимметричной калибровочной теории вместо (5.1) возникает уравнение [30]

$$x^2 = \frac{\Lambda^2}{w^3} + \frac{u}{w^2} + \frac{\Lambda^2}{w} = \frac{\langle \Psi | T(w) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \equiv \langle T(w) \rangle, \quad (5.2)$$

которое имеет очевидный смысл усреднения тензора энергии-импульса $T(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n / w^{n+2}$ по состоянию Уиттекера $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\Delta, c}$ в модуле Верма для алгебры Вирасоро со старшим весом Δ и центральным зарядом c [10], [33], удовлетворяющего уравнениям $L_n |\Psi\rangle = 0$ при $n > 1$ и уравнению $L_1 |\Psi\rangle = \Lambda^2 |\Psi\rangle$ при $n = 1$. Важным следствием уравнения (5.2), доказанным в работе [34], является то, что функция Некрасова соответствующей теории выражается через скалярное произведение или матричный элемент,

$$Z(a; \epsilon_1, \epsilon_2) = \langle \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi_1 | \Lambda^{4L_0} | \Psi_1 \rangle, \quad |\Psi_1\rangle = |\Psi\rangle|_{\Lambda=1},$$

после отождествления

$$\Delta = -\frac{a^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \frac{\epsilon^2}{4\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad c = 1 + \frac{6\epsilon^2}{\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

Кроме того,

$$|\Psi\rangle|_{\Lambda=0} = |\Omega\rangle \in \mathcal{H}_{\Delta, c}, \quad L_n |\Omega\rangle = 0, \quad n > 0, \quad L_0 |\Omega\rangle = \Delta |\Omega\rangle,$$

²⁾Переходить к этому пределу следует симметрично, полагая $\Lambda = -\zeta m_1 = -\zeta m_2$.

т. е. $|\Omega\rangle$ пропорционален вектору старшего веса, но с необычной нормировкой

$$\langle\Omega|\Omega\rangle \sim \Gamma_2(a|\epsilon_1, \epsilon_2)\Gamma_2(-a|\epsilon_1, \epsilon_2)$$

на произведение двойных гамма-функций Барнса [35] (некоторые подробности и дополнительные ссылки на литературу можно найти в приложении).

Нетривиальная часть уравнения (5.2) представляет собой единственное равенство

$$\frac{\langle\Psi|L_0|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \langle\Psi|\Psi\rangle = u \underset{\epsilon_{1,2} \rightarrow 0}{=} \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \mathcal{F}_{\text{SW}},$$

которое имеет смысл некоторого уравнения ренормгруппы. Опять же при подстановке $x = z/w$ кривая (5.2) превращается в представителя семейства (2.10) при $N = 2$, а производящий дифференциал принимает вид [30]

$$\sqrt{\langle T(w) \rangle} dw = dS_{\text{SW}} = x dw = z \frac{dw}{w}.$$

В общем случае для $U(N)$ -суперсимметричной калибровочной теории следует написать уравнение усреднения $\langle\Psi|\mathcal{D}_N|\Psi\rangle = 0$ формального дифференциального оператора

$$\mathcal{D}_N \equiv D^N - T(w)D^{N-2} - \mathcal{W}^{(3)}(w)D^{N-3} - \dots - \mathcal{W}^{(N)}(w) \quad (5.3)$$

с коэффициентами, действующими в модуле старшего веса $\mathcal{H}_{\mathbf{a},c}$ алгебры W_N , где $|\Psi\rangle$ представляет собой вектор Уиттекера:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1^{(N)}|\Psi\rangle &= \Lambda^N|\Psi\rangle, \\ \mathcal{W}_n^{(N)}|\Psi\rangle &= 0, \quad n > 1, \\ \mathcal{W}_n^{(K)}|\Psi\rangle &= 0, \quad n > 0, \quad K < N, \end{aligned} \quad (5.4)$$

в модуле со старшим весом $|\Omega\rangle = |\Psi\rangle|_{\Lambda=0}$ таком, что

$$\mathcal{W}_0^{(K)}|\Omega\rangle = s_K(\mathbf{a}; \epsilon_1, \epsilon_2)|\Omega\rangle = \sum_{j=1}^N \left(\frac{a_j^K}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \dots \right) |\Omega\rangle, \quad K = 1, \dots, N,$$

кроме того, $D|\Psi\rangle = x|\Psi\rangle$. Эта система уравнений (после подстановки $x = z/w$) приводит к кривым ВЗ (2.10), которые оснащены производящим дифференциалом $dS_{\text{SW}} = x dw = z \cdot dw/w$, с естественным предположением, что

$$Z = \langle\Psi|\Lambda^{2NL_0}|\Psi\rangle \quad (5.5)$$

при условии нормировки

$$\langle\Omega|\Omega\rangle \sim \prod_{i,j} \Gamma_2(a_i - a_j|\epsilon_1, \epsilon_2) \sim Z_{\text{pert}},$$

заданным опять в терминах двойных гамма-функций Барнса.

В случаях $N = 1$ и $N = 2$ уравнения (5.4) (уравнение $\langle \Psi | D - J(w) | \Psi \rangle = 0$, когда $W_1 = \widehat{U(1)}$, и уравнение $\langle \Psi | D^2 - T(w) | \Psi \rangle = 0$, когда W_2 есть алгебра Вирасоро) можно явно решить относительно переменной $x = \langle D \rangle$, и мы вернемся при этом к уравнениям (5.1) и (5.2) соответственно. Чтобы включить старшие времена, следует в (5.5) подставить обобщенный гамильтониан

$$Z(t_1, \dots, t_N) \sim \left\langle \Psi \left| \exp \left(\sum_{K=1}^N t_K \mathcal{W}_0^{(K)} \right) \right| \Psi \right\rangle, \quad (5.6)$$

который отвечает высшим W -потокам. Появление оператора типа Гельфанда–Дикого (5.3) в этом контексте вместе с W -потоками в (5.6) предполагает нетривиальную связь полученных формул с так называемой W -гравитацией [36] и геометрией обобщенных пространств Тейхмюллера.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы обсудили некоторые соотношения между формулировками суперсимметричных калибровочных теорий на основе инстантонных статистических сумм и матричных моделей. Как уже было отмечено, существуют некоторые параллели между ними, но ни одна из этих параллелей не представляется достаточно существенной сама по себе.

Вместо этого мы собираемся завершить обсуждение некоторыми важными замечаниями. Квазиклассическая картина матричной модели действительно чрезвычайно похожа на теорию ВЗ, и обе они описываются на языке квазиклассических интегрируемых систем, так что препотенциал представляет собой ограниченную тау-функцию Кричевера [37]. Простейшая часть интегрируемой динамики в этом случае параметризуется параметрами потенциала (2.2) и воспроизводит в простейшем случае хорошо известную иерархию бездисперсного уравнения Тоды (3.7) (по поводу аналогов этого уравнения, отвечающих старшим родам см. работу [38]). Зависимость от невырожденных периодов (2.14) является гораздо более трансцендентной, и на квазиклассическом уровне знание о ней практически полностью сводится к градиентным формулам (2.15) и их следствиям таким, как формулы вычетов, уравнения ВДВВ и т. п. (см., например, работы, [23], [25], [37]).

Формулы раздела 5 показывают, что нетривиальная интегрируемая динамика по квазиклассическим переменным (периодам) обладает еще менее тривиальными дисперсными аналогами. Наивное “квантование” динамики по переменным потенциала (2.2) приводит (в отсутствие “гладких переменных” (2.14)) просто к струнным решениям полной иерархии типа Тоды или иерархии КП с тау-функциями, которые представляются матричными элементами в двумерной теории свободных фермионов. В то же время дисперсными аналогами полной тау-функции Кричевера являются матричные элементы в нетривиальной двумерной конформной теории, обычно с расширенной симметрией. Эти матричные элементы непосредственно связаны с квантованием пространств Тейхмюллера [39] (высших пространств Тейхмюллера для случая W -гравитации), теорией Лиувилля [32], [40] и интегрируемой квантовомеханической задачей для систем тодовского типа (см., например, [41]–[43]). Все эти соотношения, несомненно, заслуживают дальнейшего исследования, и мы собираемся вернуться к этим вопросам в последующих публикациях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пертурбативные препотенциалы

Инстантонное разложение $\mathcal{F} = \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}_k$ в неабелевой теории начинается с пертурбативного вклада (в котором не участвуют топологически нетривиальные конфигурации калибровочных полей)

$$\mathcal{F}_0 = \sum_{j=1}^N F_{\text{UV}}(a_j) - \sum_{i \neq j} F(a_i - a_j), \quad (\text{П.1})$$

определяемого полностью в терминах ультрафиолетового, или классического препотенциала (2.2) и пертурбативного препотенциала (2.3). Он полностью характеризуется вырожденным случаем дифференциала (2.8):

$$d\Phi_0 = F_{\text{UV}}'''(z) dz - 2 \frac{dP_N(z)}{P_N(z)} = F_{\text{UV}}'''(z) dz - 2 \sum_{j=1}^N \frac{dz}{z - v_j},$$

где коэффициенты полинома $P_N(z)$ (того же, что и в (2.10)) совпадают с пертурбативными значениями периодов ВЗ,

$$a_i = -\frac{1}{2} \operatorname{res}_{v_i} z d\Phi_0 = v_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Пертурбативный производящий дифференциал имеет вид $dS_0 = \Phi_0 dz$, где

$$\Phi_0 = F_{\text{UV}}''(z) - 2 \sum_{j=1}^N \ln(z - v_j),$$

и удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial dS_0}{\partial a_j} &= 2 \frac{dz}{z - v_j}, \quad j = 1, \dots, N, \\ \frac{\partial dS_0}{\partial t_k} &= k z^{k-1} dz, \quad k > 0, \end{aligned}$$

что приводит к формуле

$$S_0(z) = F_{\text{UV}}'(z) - 2 \sum_{j=1}^N (z - v_j) (\ln(z - v_j) - 1).$$

Уравнения (2.15)

$$a_j^{\text{D}} = \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial a_j} = S_0(a_j)$$

полностью определяют вклад (П.1), поскольку на пертурбативном уровне нет разницы между значениями v_j и a_j .

Для теории с N_f фундаментальными мультиплетами вместо формулы (П.1) получаем выражение

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{\text{cl}} + \mathcal{F}_{\text{pert}} = \sum_{j=1}^N F_{\text{UV}}(a_j) - \sum_{i \neq j} F(a_i - a_j) + \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{j=1}^N F(a_j + m_f). \quad (\text{П.2})$$

Оно просто выводится из (П.1) путем формального изменения ультрафиолетового потенциала,

$$F_{UV}(x) \rightarrow F_{UV}(x) + \sum_{f=1}^{N_f} F(x + m_f),$$

который может быть использован в дальнейшем для вычисления полной производящей функции в теории с материей после подстановки в функционал (2.1).

“Квантовая” или, более точно, дважды деформированная версия пертурбативных препотенциалов (П.1), (П.2) может быть определена в терминах двойных гамма-функций Барнса

$$\Gamma_2(x|\epsilon_1, \epsilon_2) \sim \prod_{n,m \geq 0} \frac{1}{x + n\epsilon_1 + m\epsilon_2},$$

где бесконечное произведение следует понимать, скажем, в смысле дзета-регуляризации (см., например, [44])

$$\ln \Gamma_2(x|\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{d}{ds} \sum_{n,m \geq 0} (x + n\epsilon_1 + m\epsilon_2)^{-s} \Big|_{s=0},$$

аналитически продолженной в точку $s = 0$. Связь с соотношениями (П.1), (П.2) определяется асимптотикой

$$\begin{aligned} \ln \Gamma_2(x|\epsilon_1, \epsilon_2) &= \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} F(x) + \text{менее сингулярные члены} = \\ &= -\frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{4} \right) + \dots \end{aligned}$$

Благодарности. Автор благодарен А. М. Браверману, Т. Егучи, Х. Итояме, Х. Канно, И. М. Кричеверу, А. Д. Миронову, А. Ю. Морозову, В. В. Фоку, С. М. Харчёву и Л. О. Чехову за полезные обсуждения. Работа была выполнена при частичной поддержке Российского федерального агентства по атомной энергии, Министерства науки и образования РФ (контракт 02.740.11.5194), РФФИ (грант № 10-02-01315, совместные гранты 09-02-93105-CNRS, 09-02-91005-ANF, 10-02-92109-Yaf_a) и общества Макса Планка. Автор также благодарит за гостеприимство Yukawa Institute for Theoretical Physics (Kyoto, Japan) и Max-Planck-Institut für Mathematik (Bonn, Germany), где были выполнены существенные части настоящей работы.

Список литературы

- [1] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52, arXiv:hep-th/9407087; Erratum, **430**:2 (1994), 485–486; **431**:3 (1994), 484–550, arXiv:hep-th/9408099.
- [2] P. Argyres, M. Plesser, N. Seiberg, *Nucl. Phys. B*, **471**:1–2 (1996), 159–194, arXiv:hep-th/9603042.
- [3] A. Marshakov, A. Yung, *Nucl. Phys. B*, **831**:1–2 (2010), 72–104, arXiv:0912.1366; А. В. Маршаков, *ТМФ*, **165**:3 (2010), 488–502.
- [4] N. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:5 (2004), 831–864, arXiv:hep-th/0206161.
- [5] A. S. Losev, A. Marshakov, N. Nekrasov, “Small instantons, little strings and free fermions”, *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics*, Ian Kogan memorial collection, eds. M. Shifman et al., World Scientific, River Edge, NJ, 2005, 581–621, arXiv:hep-th/0302191.

- [6] N. Nekrasov, A. Okounkov, “Seiberg-Witten theory and random partitions”, *The Unity of Mathematics*, Progr. Math., **244**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, 525–596, arXiv: hep-th/0306238.
- [7] A. Marshakov, N. Nekrasov, *JHEP*, **01** (2007), 104, 39 pp., arXiv: hep-th/0612019; A. B. Маршakov, *ТМФ*, **154**:3 (2008), 424–450, arXiv: 0706.2857.
- [8] A. Marshakov, *JHEP*, **03** (2008), 055, 29 pp., arXiv: 0712.2802.
- [9] T. Nakatsu, K. Takasaki, *Commun. Math. Phys.*, **285**:2 (2009), 445–468, arXiv: 0710.5339; T. Nakatsu, Y. Noma, K. Takasaki, *Internat. J. Modern Phys. A*, **23**:14–15 (2008), 2332–2342, arXiv: 0806.3675; *Nucl. Phys. B*, **808**:3 (2009), 411–440, arXiv: 0807.0746.
- [10] A. Braverman, *Instanton counting via affine Lie algebras I: equivariant J-functions of (affine) flag manifolds and Whittaker vectors*, arXiv: math/0401409; A. Braverman, P. Etingof, *Instanton counting via affine Lie algebras II: from Whittaker vectors to the Seiberg-Witten prepotential*, arXiv: math/0409441.
- [11] R. Flume, R. Pogossian, *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:14 (2003), 2541–2563, arXiv: hep-th/0208176; H. Nakajima, K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, arXiv: math/0306198; *Lectures on instanton counting*, arXiv: math/0311058; U. Bruzzo, F. Fucito, *Nucl. Phys. B*, **678**:3 (2004), 638–655, arXiv: math-ph/0310036; F. Fucito, J. Morales, R. Poghossian, *JHEP*, **10** (2004), 037, 23 pp., arXiv: hep-th/0408090; S. Shadchin, *SIGMA*, **2** (2006), 008, 11 pp., arXiv: hep-th/0601167.
- [12] L. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv: 0906.3219.
- [13] N. Wyllard, *JHEP*, **11** (2009), 002, 22 pp., arXiv: 0907.2189; A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **825**:1–2 (2009), 1–37, arXiv: 0908.2569; *Phys. Lett. B*, **682**:1 (2009), 118–124, arXiv: 0909.3531; N. Drukker, J. Gomis, T. Okuda, J. Teschner, *JHEP*, **02** (2010), 057, 61 pp., arXiv: 0909.1105; G. Bonelli, A. Tanzini, *Phys. Lett. B*, **691**:2 (2010), 111–115, arXiv: 0909.4031; L. Alday, F. Benini, Y. Tachikawa, *Phys. Rev. Lett.*, **105**:14 (2010), 141601, 4 pp., arXiv: 0909.4776; R. Poghossian, *JHEP*, **12** (2009), 038, 14 pp., arXiv: 0909.3412; L. Hadasz, Z. Jaskólski, P. Suchanek, *JHEP*, **01** (2010), 063, 13 pp.; *Proving the AGT relation for $N_f = 0, 1, 2$ antifundamentals*, arXiv: 1004.1841; V. Alba, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **840**:3 (2010), 441–468, arXiv: 0912.2535; M. Taki, *JHEP*, **05** (2010), 038, arXiv: 0912.4789; *JHEP*, **07** (2011), 047, arXiv: 1007.2524; S. Yanagida, *J. Algebra*, **333** (2011), 273–294, arXiv: 1003.1049; *Norms of logarithmic primaries of Virasoro algebra*, arXiv: 1010.0528; N. Drukker, D. Gaiotto, J. Gomis, *The virtue of defects in 4D gauge theories and 2D CFTs*, arXiv: 1003.1112; H. Itoyama, T. Oota, *Nucl. Phys. B*, **838**:3 (2010), 298–330, arXiv: 1003.2929; C. Kozçaz, S. Pasquetti, F. Passerini, N. Wyllard, *JHEP*, **01** (2011), 045, 40 pp., arXiv: 1008.1412; H. Itoyama, T. Oota, N. Yonezawa, *Phys. Rev. D*, **82** (2010), 085031, 10 pp., arXiv: 1008.1861; K. Maruyoshi, F. Yagi, *JHEP*, **01** (2011), 042, 18 pp., arXiv: 1009.5553; G. Bonelli, K. Maruyoshi, A. Tanzini, F. Yagi, *JHEP*, **07** (2011), 055, 23 pp., arXiv: 1011.5417; A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *J. Phys. A*, **44**:8 (2011), 085401, 11 pp., arXiv: 1010.1734; *JHEP*, **03** (2011), 102, 26 pp., arXiv: 1011.3481.
- [14] B. Eynard, N. Orantin, M. Mariño, *JHEP*, **06** (2007), 058, 20 pp., arXiv: hep-th/0702110; B. Eynard, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, **10** (2009), 10011, 72 pp., arXiv: 0905.0535; Л. О. Чехов, Б. Эйнард, О. Маршал, *ТМФ*, **166**:2 (2011), 163–215, arXiv: 1009.6007.
- [15] A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **02** (2010), 030, 26 pp., arXiv: 0911.5721; *Towards a proof of AGT conjecture by methods of matrix models*, arXiv: 1011.5629.
- [16] T. Eguchi, S.-K. Yang, *Modern Phys. Lett. A*, **9**:31 (1994), 2893–2902, arXiv: hep-th/9407134.
- [17] A. Klemm, P. Sulkowski, *Nucl. Phys. B*, **819**:3 (2009), 400–430, arXiv: 0810.4944.
- [18] R. Dijkgraaf, C. Vafa, *Toda theories, matrix models, topological strings, and $n = 2$ gauge systems*, arXiv: 0909.2453.
- [19] A. Marshakov, “Strings, integrable systems, geometry and statistical models”, *Lie Theory and Its Applications in Physics*. V, eds. H.-D. Doebner, V.K. Dobrev, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004, 231–240, arXiv: hep-th/0401199.

- [20] A. Migdal, *Phys. Rept.*, **102**:4 (1983), 199–290.
- [21] R. Dijkgraaf, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **644**:1–2 (2002), 3–20, arXiv: hep-th/0206255; 21–39, arXiv: hep-th/0207106; *A perturbative window into non-perturbative physics*, arXiv: hep-th/0208048.
- [22] L. Chekhov, A. Mironov, *Phys. Lett. B*, **552**:3–4 (2003), 293–302, arXiv: hep-th/0209085.
- [23] L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov, D. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **562**:3–4 (2003), 323–338, arXiv: hep-th/0301071; Л. О. Чехов, А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, Д. Васильев, “Комплексная геометрия матричных моделей”, *Нелинейная динамика*, Сборник статей, Тр. МИАН, **251**, Наука, М., 2005, 265–306, arXiv: hep-th/0506075.
- [24] V. Kazakov, A. Marshakov, *J. Phys. A*, **36**:12 (2003), 3107–3136, arXiv: hep-th/0211236.
- [25] А. В. Маршаков, *ТМФ*, **147**:2 (2006), 163–228; **147**:3, 399–449.
- [26] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov, *Nucl. Phys. B*, **357**:2–3 (1991), 565–618.
- [27] A. Hanany, Y. Oz, *Nucl. Phys. B*, **452**:1–2 (1995), 283–312, arXiv: hep-th/9505075.
- [28] A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **380**:1–2 (1996), 75–80, arXiv: hep-th/9603140.
- [29] A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **11** (2009), 048, 16 pp., arXiv: 0909.3338.
- [30] D. Gaiotto, *N = 2 dualities*, arXiv: 0904.2715.
- [31] T. Eguchi, K. Maruyoshi, *JHEP*, **02** (2010), 022, 21 pp., arXiv: 0911.4797; **07** (2010), 081, 18 pp., arXiv: 1006.0828.
- [32] A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **477**:2 (1996), 577–605, arXiv: hep-th/9506136.
- [33] D. Gaiotto, *Asymptotically free N = 2 theories and irregular conformal blocks*, arXiv: 0908.0307.
- [34] A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **682**:1 (2009), 125–129, arXiv: 0909.2052.
- [35] E. Barnes, *Proc. London Math. Soc.*, **31**:1 (1899), 358–381; *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, **196** (1901), 265–387; *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **19** (1904), 374–425.
- [36] A. Gerasimov, A. Levin, A. Marshakov, *Nucl. Phys. B*, **360**:1–2 (1991), 537–558; A. Bilal, V. V. Fock, I. Kogan, *Nucl. Phys. B*, **359**:1–2 (1991), 635–672.
- [37] I. M. Krichever, *Commun. Pure. Appl. Math.*, **47** (1994), 437–475, arXiv: hep-th/9205110.
- [38] I. Krichever, A. Marshakov, A. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.*, **259**:1 (2005), 1–44, arXiv: hep-th/0309010.
- [39] L. Faddeev, R. Kashaev, *Modern Phys. Lett. A*, **9**:5 (1994), 427–434, arXiv: hep-th/9310070; R. Kashaev, *Quantization of Teichmüller spaces and the quantum dilogarithm*, arXiv: q-alg/9705021; Л. О. Чехов, В. В. Фок, *ТМФ*, **120**:3 (1999), 511–528, arXiv: math/9908165; V. V. Fock, A. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*, arXiv: math/0311149; J. Teschner, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:S2 (2004), 459–477, arXiv: hep-th/0303149; *Quantization of the Hitchin moduli spaces, Liouville theory, and the geometric Langlands correspondence I*, arXiv: 1005.2846.
- [40] Al. Zamolodchikov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:S2 (2004), 510–523, arXiv: hep-th/0312279; *On the three-point function in minimal Liouville gravity*, arXiv: hep-th/0505063.
- [41] S. Kharchev, D. Lebedev, M. Semenov-Tian-Shansky, *Commun. Math. Phys.*, **225**:3 (2002), 573–609, arXiv: hep-th/0102180.
- [42] N. A. Nekrasov, S. L. Shatashvili, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **177** (2009), 105–119, arXiv: 0901.4748.
- [43] K. Kozłowski, J. Teschner, *TBA for the Toda chain*, arXiv: 1006.2906.
- [44] M. Spreafico, *J. Number Theory*, **129**:9 (2009), 2035–2063.