Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Продольная диэлектрическая проницаемость квантовой вырожденной столкновительной плазмы, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 3, 431–443

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6739>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 11:44:11

© 2011 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

ПРОДОЛЬНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ КВАНТОВОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Найдена диэлектрическая проницаемость вырожденного электронного газа для столкновительной плазмы. Используется кинетическое уравнение Вигнера–Власова–Больцмана с интегралом столкновений в релаксационной форме в координатном пространстве. Исследованы коновские особенности диэлектрической проницаемости и выявлено их размывание в бесстолкновительной плазме.

Ключевые слова: вырожденный электронный газ, диэлектрическая проницаемость, интеграл столкновений, функция Линдхардта, коновские особенности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе выводятся формулы для проводимости и диэлектрической проницаемости квантовой электронной плазмы.

Диэлектрическая проницаемость является одной из важнейших характеристик плазмы. Эта величина необходима для описания процесса распространения и затухания плазменных колебаний, скин-эффекта, механизма проникновения электромагнитных волн в плазму [1]–[3] и для анализа других проблем в физике плазмы [4].

Диэлектрическая проницаемость в бесстолкновительной квантовой газовой плазме изучалась многими авторами (см., например, работы [5]–[10]). В работе [8], где исследовался одномерный случай, отмечалась важность вывода диэлектрической проницаемости с использованием квантового кинетического уравнения с интегралом столкновений в форме модели Бхатнагара–Гросса–Крука [11] (БГК-модели).

Настоящая работа посвящена выполнению этой задачи. Для ее решения мы применяем квантовое кинетическое уравнение Больцмана–Вигнера–Власова (БВВ-уравнение) с интегралом столкновений в форме τ -модели, называемым БГК-интегралом столкновений.

БВВ-уравнение записывается относительно функции Вигнера, которая является аналогом функции распределения электронов для квантовой плазмы [12], [13].

*Московский государственный областной университет, Москва, Россия.
E-mail: avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

Наиболее распространенным методом исследования квантовой плазмы является метод Хартри–Фока или эквивалентный ему метод приближения случайных фаз [14], [15].

В работе [16] этим методом получено выражение для диэлектрической проницаемости квантовой плазмы в τ -приближении, однако в работе [17] показано, что полученное выражение некорректно, так как не переходит в классическое выражение при условии пренебрежения квантовыми поправками. В работе [17] было предложено эмпирически подправленное выражение для диэлектрической проницаемости квантовой плазмы, свободное от указанного недостатка, с помощью которого авторы исследовали квантовые поправки к оптическим свойствам металла [18], [19].

Диэлектрическая проницаемость квантовой плазмы широко используется также для изучения экранировки электрического поля и возникающих при этом фриделевских осцилляций (см., например, работы [20]–[22]). В работе [23] изучена экранировка кулоновского поля в намагниченном электронном газе квантового цилиндра.

В теории квантовой плазмы существуют две принципиально различные возможности построения релаксационного кинетического уравнения в τ -приближении: в пространстве импульсов (в пространстве фурье-образов функции распределения) и в пространстве координат. На основании кинетического релаксационного уравнения в пространстве импульсов Мермином [24] в 1970 г. впервые был проведен последовательный вывод диэлектрической проницаемости для квантовой столкновительной плазмы. Отметим, что важность учета влияния столкновений на статическую продольную проницаемость квантовой плазмы при рассмотрении свойств сплавов подчеркивалась в работе [25].

Диэлектрические свойства квантовой столкновительной плазмы до сих пор остаются мало исследованной областью. По сути дела, единственной работой, в которой предпринята попытка корректно описать влияние столкновений на диэлектрические свойства квантовой плазмы, остается известная работа Мермина [24]. Однако даже в классическом случае описание кинетических процессов в газе и плазме существенно зависит от выбора вида интеграла столкновений. При этом широко используются модельные интегралы столкновений БГК с постоянной и переменной частотой столкновений, эллипсоидально-статистический интеграл столкновений, интеграл столкновений Шахова и т. д. Это отнюдь не является прихотью, так как для разных ситуаций наиболее адекватны различные интегралы столкновений. В квантовом случае ситуация еще более усложняется. Даже простейший релаксационный интеграл столкновений может иметь различные обобщения на квантовый случай. Возникает естественный вопрос: какие свойства диэлектрической проницаемости Мермина являются общими свойствами квантового описания плазмы, а какие – следствием выбора конкретного интеграла столкновений? Единственный способ выяснить это – исследовать квантовую диэлектрическую проницаемость с помощью другого, чем у Мермина, интеграла столкновений. Нами был выбран интеграл столкновений БГК. При этом наиболее удобно было вести рассмотрение с использованием функции Вигнера.

В настоящей работе выведено выражение для продольной диэлектрической проницаемости с использованием релаксационного уравнения в пространстве координат. Если в полученном выражении постоянную Планка устремить к нулю ($\hbar \rightarrow 0$),

получим в точности классическое выражение диэлектрической проницаемости невырожденной плазмы. Исследованы различные предельные случаи диэлектрической проницаемости и проведено сравнение с результатом Мермина.

2. РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим кинетическое БВВ-уравнение [26]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{ie}{\hbar} W[f] + B[f, f].$$

Здесь e – заряд электрона, $W[f]$ – функционал Вигнера–Власова от потенциала,

$$W[f] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[U\left(\mathbf{r} + \frac{\hbar \mathbf{b}}{2}, t\right) - U\left(\mathbf{r} - \frac{\hbar \mathbf{b}}{2}, t\right) \right] \times \\ \times f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) e^{i\mathbf{b}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})} d^3 b d^3 p', \quad (2.1)$$

$\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ – вектор, $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ – функция Вигнера для электронов, $\hbar$ – постоянная Планка, $U(\mathbf{r}, t)$ – скалярный потенциал электрического поля, $B[f, f]$ – интеграл столкновений.

Интеграл столкновений в общем случае для квантовой плазмы может иметь весьма сложный вид. В частности, он может быть и не локальным по координатам. Предельный случай такой квантовой нелокальности рассмотрен в работе [24]. В настоящей работе рассмотрен случай, когда интеграл столкновений можно представить в локальной форме. Конкретно, мы рассмотрим представление интеграла столкновений в форме стандартного модельного БГК-интеграла столкновений [11] (см. также работу [27], где проведено исследование этой модели). Тогда предыдущее уравнение перепишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{ie}{\hbar} W[f] + \nu [f_{\text{eq}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)]. \quad (2.2)$$

Здесь ν – эффективная частота рассеяния электронов (в частности, на примесях), f_{eq} – равновесная функция Ферми распределения электронов. В дальнейшем мы будем рассматривать достаточно низкие температуры, чтобы можно было считать электронный газ вырожденным. Тогда равновесная функция распределения выражается через функцию Хевисайда: $f_{\text{eq}} = \Theta(\mathcal{E}_{\text{eq}}(\mathbf{r}, t) - \mathcal{E})$, где функция $\Theta(x)$ – функция Хевисайда, $\Theta(x) = 1, x > 0$; $\Theta(x) = 0, x < 0$; $\mathcal{E} = p^2/(2m)$ – кинетическая энергия электронов; $\mathcal{E}_{\text{F}}(\mathbf{r}, t) = p_{\text{F}}^2(\mathbf{r}, t)/2m$ – возмущенная энергия Ферми электрона; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс электрона; $\mathbf{p}_{\text{F}}$ – импульс электрона на поверхности Ферми, которую мы считаем сферической.

Используемое кинетическое уравнение (2.2) учитывает релаксацию неравновесного состояния к локальному термодинамическому равновесию.

Будем считать, что функция распределения электронов зависит от одной пространственной координаты x , времени t и импульса $\mathbf{p}$, а скалярный потенциал электрического поля зависит от одной пространственной координаты x и времени t : $U(x, t) = U_0 e^{i(kx - \omega t)}$.

Линеаризацию уравнений (2.1) и (2.2) проведем относительно абсолютного фермиана $f_{\text{F}}(p) = \Theta(\mathcal{E}_{\text{F}} - \mathcal{E})$, где $\mathcal{E}_{\text{F}}$ – энергия электрона на поверхности Ферми, $\mathcal{E}_{\text{F}} = p_{\text{F}}^2/(2m)$.

Линеаризация функции Вигнера для электронов и равновесной функции распределения приводит к равенствам

$$f = f_F(p) + U_0 e^{i(kx - \omega t)} f_1(\mathbf{p}), \quad (2.3)$$

$$f_{\text{eq}} = f_F(p) + [\mathcal{E}_F(x, t) - \mathcal{E}_F] \delta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}), \quad (2.4)$$

где $f_1(\mathbf{p})$ – новая неизвестная функция, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Величина $\mathcal{E}_F(x, t) - \mathcal{E}_F$ описывает локальное изменение энергии Ферми электронного газа, обусловленное изменением его плотности. Наличие этого слагаемого в интеграле столкновений обеспечивает выполнение закона сохранения числа электронов.

В линейном приближении функционал Вигнера преобразуется к виду

$$W[f] = U(x, t) [\Theta_+(\mathbf{v}) - \Theta_-(\mathbf{v})],$$

где

$$\Theta_{\pm}(\mathbf{v}) = \Theta \left[v_F^2 - \left(v_x \mp \frac{\hbar k}{2m} \right)^2 - v_y^2 - v_z^2 \right].$$

Подставив выражения (2.3) и (2.4) в уравнение (2.2), получаем:

$$f_1(\mathbf{p})(\nu - i\omega + ikv_x)U(x, t) = -\frac{ie}{\hbar} W[f] + \nu \delta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}) (\mathcal{E}_F(x, t) - \mathcal{E}_F). \quad (2.5)$$

Величину $\mathcal{E}_F(x, t) - \mathcal{E}_F$ найдем из закона сохранения числа частиц. В результате получаем

$$\mathcal{E}_F(x, t) - \mathcal{E}_F = U(x, t) \frac{mA}{4\pi v_F}, \quad (2.6)$$

где

$$A = \int f_1(\mathbf{p}) d^3v. \quad (2.7)$$

Тогда из уравнений (2.5)–(2.7) следует:

$$f_1(\mathbf{p}) = -\frac{ie}{\hbar} \frac{\Theta_+(\mathbf{v}) - \Theta_-(\mathbf{v})}{\nu + i(kv_x - \omega)} + \frac{A\nu}{4\pi v_F^2} \frac{\delta(v_F - v)}{\nu + i(kv_x - \omega)}. \quad (2.8)$$

3. ПРОДОЛЬНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ И ПРОВОДИМОСТЬ

Подставляя выражение (2.8) в соотношение (2.7), получаем уравнение

$$A = -\frac{ie}{\hbar} \int \frac{\Theta_+(\mathbf{v}) - \Theta_-(\mathbf{v})}{\nu + i(kv_x - \omega)} d^3v + \frac{A\nu}{4\pi v_F^2} \int \frac{\delta(v_F - v)}{\nu + i(kv_x - \omega)} d^3v,$$

из которого находим

$$A = -\frac{ie}{\hbar} \frac{J(\omega, k, \nu)}{1 - g_0(\omega, k, \nu)}, \quad (3.1)$$

где введены обозначения

$$g_0(\omega, k, \nu) = \frac{i\nu}{2kv_F} \ln \frac{\omega + i\nu + kv_F}{\omega + i\nu - kv_F}, \quad (3.2)$$

$$J(\omega, k, \nu) = \int \frac{\Theta_+(\mathbf{v}) - \Theta_-(\mathbf{v})}{\nu + i(kv_x - \omega)} d^3v. \quad (3.3)$$

При выводе формулы (3.2) было использовано вычисление интеграла в сферических координатах:

$$\int \frac{\delta(v_F - v)d^3v}{\nu + i(kv_x - \omega)} = 2\pi v_F^2 \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\nu + i(kv_F\mu - \omega)} = 4\pi v_F^2 g_0(\omega, k, \nu).$$

Воспользовавшись далее определением функций $\Theta_{\pm}(\mathbf{v})$ для интеграла (3.3), получаем $J = J^+ - J^-$, где

$$J^{\pm}(\omega, k, \nu) = \int_{S_{\pm}^3} \frac{dv_x dv_y dv_z}{\nu + i(kv_x - \omega)}.$$

Здесь $S_{\pm}^3$ – шар с центром в точке $(\mp \hbar k/(2m), 0, 0)$, радиусом которого является скорость электрона на поверхности Ферми:

$$S_{\pm}^3: \left(v_x \pm \frac{\hbar k}{2m}\right)^2 + v_y^2 + v_z^2 \leq v_F^2.$$

После очевидной замены переменной $v_x \pm \hbar k/(2m) \rightarrow v_x$ получаем

$$J^{\pm} = \int_{S^3(0)} \frac{dv_x dv_y dv_z}{\nu + ik(v_x \pm \hbar k/(2m)) - i\omega},$$

где $S^3(0)$ – шар Ферми с центром в начале координат: $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \leq v_F^2$.

Шар Ферми $S^3(0)$ представим в виде объединения:

$$S^3(0) = \bigcup_{v_x=-v_F}^{v_x=v_F} S_{v_F^2-v_x^2}^2(0,0).$$

Здесь $S_{v_F^2-v_x^2}^2(0,0)$ есть круг вида $v_y^2 + v_z^2 < v_F^2 - v_x^2$. Теперь интегралы $J^{\pm}$ вычислим как повторные:

$$\begin{aligned} J^{\pm} &= \pi \int_{-v_F}^{v_F} \frac{(v_F^2 - v_x^2) dv_x}{\nu + ik(v_x \pm \hbar k/(2m)) - i\omega} = \\ &= \frac{2i\pi\nu v_F}{k^2} (\omega_{\mp} + i\nu) - \frac{i\pi\nu}{k^3} [(\omega_{\mp} + i\nu)^2 - k^2 v_F^2] \ln \frac{\omega_{\mp} + i\nu + kv_F}{\omega_{\mp} + i\nu - kv_F}, \end{aligned}$$

где

$$\omega_{\pm} = \omega \pm \frac{\hbar k^2}{2m}.$$

Разность интегралов J^+ и J^- равна

$$\begin{aligned} J &= -\frac{2i\pi\nu v_F \hbar}{m} + \frac{i\pi\nu}{k^3} [(\omega_+ + i\nu)^2 - k^2 v_F^2] \ln \frac{\omega_+ + i\nu + kv_F}{\omega_+ + i\nu - kv_F} - \\ &- \frac{i\pi\nu}{k^3} [(\omega_- + i\nu)^2 - k^2 v_F^2] \ln \frac{\omega_- + i\nu + kv_F}{\omega_- + i\nu - kv_F}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

или

$$J = -\frac{2i\pi\nu v_F \hbar}{m} [1 - g(\omega_+, k, \nu) + g(\omega_-, k, \nu)], \quad (3.5)$$

где

$$g(\omega_{\pm}, k, \nu) = \frac{m[(\omega_{\pm} + i\nu)^2 - k^2 v_F^2]}{2\hbar k^3 v_F} \ln \frac{\omega_{\pm} + i\nu + kv_F}{\omega_{\pm} + i\nu - kv_F}. \quad (3.6)$$

Следовательно, согласно формулам (2.8) и (3.1), построена и функция $f_1(\mathbf{p})$:

$$f_1(\mathbf{p}) = -\frac{ie}{\hbar} \left[\frac{\Theta_+(\mathbf{v}) - \Theta_-(\mathbf{v})}{\nu + i(kv_x - \omega)} + \frac{J}{4\pi v_F^2(1 - g_0)} \frac{\delta(v_F - v)}{\nu + i(kv_x - \omega)} \right], \quad (3.7)$$

где J определяется равенствами (3.5) и (3.6), а g_0 – равенством (3.2).

Рассмотрим связь электрического поля и потенциала $\mathbf{E} = -\text{grad } U$ и уравнение непрерывности для плотности тока и заряда $\partial\rho/\partial t + \partial j_x/\partial x = 0$. Здесь согласно определению диэлектрической проводимости $j_x = \sigma_1 E_x = -\sigma_1 ikU(x, t)$. Следовательно, $\partial j_x/\partial x = \sigma_1 k^2 U(x, t)$.

Учитывая, что для плотности заряда выполняется очевидное равенство

$$\rho = e \int f d\Omega_F = e \int [f_0(\mathcal{E}) + U(x, t)f_1] d\Omega_F,$$

получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i\omega e U(x, t) \int f_1 d\Omega_F.$$

Воспользовавшись теперь уравнением непрерывности, находим общую формулу для вычисления продольной проводимости:

$$\sigma_1 = \frac{ie\omega}{k^2} \int f_1 d\Omega_F = \frac{2ie\omega m^3}{(2\pi\hbar)^3 k^2} \int f_1 d^3v. \quad (3.8)$$

Подставляя функцию (3.7) в формулу (3.8) и пользуясь выражениями (3.2) и (3.3), получаем

$$\sigma_1 = \frac{ipe^2\omega m^3 v_F}{2\pi^3 \hbar^3 m k^2} \frac{J(\omega, k, \nu)}{1 - g_0(\omega, k, \nu)},$$

или, с учетом формул для числовой плотности электронов $3\pi^2 N = (mv_F/\hbar)^3$ и классической проводимости $\sigma_0 = e^2 N/m\nu$,

$$\sigma_1 = -\frac{3i\sigma_0\omega\nu}{2(kv_F)^2} \frac{1 - g(\omega_+, k, \nu) + g(\omega_-, k, \nu)}{1 - g_0(\omega, k, \nu)}. \quad (3.9)$$

Используя определение диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1 = 1 + 4\pi i\sigma_1/\omega$, с помощью формулы (3.9) можно получить выражение для продольной диэлектрической проницаемости плазмы:

$$\varepsilon_1(\omega, k, \nu) = 1 + \frac{3\omega_p^2}{2k^2 v_F^2} \frac{1 - g(\omega_+, k, \nu) + g(\omega_-, k, \nu)}{1 - g_0(\omega, k, \nu)}, \quad (3.10)$$

где ω_p – плазменная частота, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$.

Введем безразмерные параметры

$$z = x + iy, \quad x = \frac{\omega}{kv_F}, \quad y = \frac{\nu}{kv_F}, \quad x_p = \frac{\omega_p}{kv_F}, \quad q = \frac{k}{k_F}, \quad (3.11)$$

где $k_F = mv_F/\hbar$ – волновое число Ферми.

 Рис. 1. Коновская особенность при $x_p = 1$, $x = 0$.

В параметрах (3.11) безразмерную диэлектрическую проницаемость можно записать в виде

$$\varepsilon_l(x, y, q) = 1 + \frac{3}{2} x_p^2 \frac{1 - g(z, +q) + g(z, -q)}{1 - g_0(x, y)}, \quad (3.12)$$

где

$$g_0 = \frac{iy}{2} \ln \frac{x + iy + 1}{x + iy - 1}, \quad g(z, \pm q) = \frac{(z \pm q/2)^2 - 1}{2q} \ln \frac{z \pm q/2 + 1}{z \pm q/2 - 1}.$$

Пусть $\nu = 0$, т.е. плазма является бесстолкновительной. Тогда из выражения (3.10) вытекает следующая классическая формула для диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 + \frac{3\omega_p^2}{2k^2 v_F} [1 - g(\omega_-, k) + g(\omega_+, k)], \quad (3.13)$$

где

$$g(\omega_{\pm}, k) = \frac{m(\omega_{\pm}^2 - k^2 v_F^2)}{2\hbar k^3 v_F} \ln \frac{\omega_{\pm} + kv_F}{\omega_{\pm} - kv_F}.$$

В литературе эта формула называется (см., например, работы [20]–[22]) диэлектрической функцией Линдхарда [16]. Она выводится методом приближения случайных фаз.

В безразмерных переменных (3.11) диэлектрическая функция Линдхарда имеет вид

$$\varepsilon_l(x, q) = 1 + \frac{3}{2} x_p^2 [1 - g(x, +q) + g(x, -q)], \quad (3.14)$$

где

$$g(x, \pm q) = \frac{(x \pm q/2)^2 - 1}{2q} \ln \frac{x \pm q/2 + 1}{x \pm q/2 - 1}.$$

Рис. 2. Коновская особенность при $x_p = 10$, $x = 0$.

На рис. 1 изображена коновская особенность в случае $x_p = 1$, $x = 0$. Кривые 1, 2, 3 построены для значений безразмерной частоты столкновений $y = 0, 0.005, 0.01$ соответственно.

На рис. 2 и рис. 3 показаны коновские особенности в случае $x_p = 10$, $x = 0$; кривые 1, 2, 3 построены для значений безразмерной частоты столкновений $y = 0, 0.05, 0.01$ соответственно.

Перейдя к новым безразмерным переменным

$$z = x + iy, \quad x = \frac{\omega}{k_F v_F}, \quad y = \frac{\nu}{k_F v_F}, \quad x_p = \frac{\omega_p}{k_F v_F}, \quad q = \frac{k}{k_F}, \quad (3.15)$$

получаем следующую формулу для продольной диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_1(x, y, q) = 1 + \frac{3x_p^2}{2q^2} \frac{1 - g_+(z, q) + g_-(z, q)}{1 - g_0(x, y, q)}, \quad (3.16)$$

где

$$g_0 = \frac{iy}{2q} \ln \frac{x + iy + q}{x + iy - q}, \quad g_{\pm} = \frac{(z \pm q^2/2)^2 - q^2}{2q^3} \ln \frac{z + q \pm q^2/2}{z - q \pm q^2/2}.$$

Коновские особенности определяются согласно формуле (3.16) из четырех уравнений: $q^2 \pm 2q \pm 2z = 0$. Эти уравнения при $y = 0$ ($\nu = 0$) определяют четыре коновские особенности, две из которых при $\omega \neq 0$ лежат в окрестности точки $q = 2$: $q_{1,2} = 1 + \sqrt{1 \pm 2x}$, а две другие – в окрестности точки $q = -2$: $q_{3,4} = -1 - \sqrt{1 \pm 2x}$. При малых x из этих формул имеем

$$q_{1,2} \approx 2 \pm x \approx 2 \pm \frac{\omega}{k_F v_F}, \quad q_{3,4} \approx -2 \pm x \approx 2 \pm \frac{\omega}{k_F v_F}.$$

 Рис. 3. Коновская особенность при $x_p = 10$, $x = 0$.

В терминах размерного волнового числа Ферми коновские особенности определяются равенствами

$$k_{1,2} = k_F + \sqrt{k_F^2 \pm 2 \frac{k_F \omega}{v_F}} \approx 2k_F \pm \frac{\omega}{v_F},$$

$$k_{3,4} = -k_F - \sqrt{k_F^2 \pm 2 \frac{k_F \omega}{v_F}} \approx -2k_F \pm \frac{\omega}{v_F}.$$

Эти формулы можно переписать в виде

$$k_{1,2} = \frac{mv_F}{\hbar} \left[1 + \sqrt{1 \pm \frac{2\hbar\omega}{mv_F^2}} \right], \quad k_{3,4} = \frac{mv_F}{\hbar} \left[-1 - \sqrt{1 \pm \frac{2\hbar\omega}{mv_F^2}} \right].$$

Таким образом, в бесстолкновительной плазме ($\nu = 0$) при $\omega \neq 0$ происходит расщепление коновских особенностей.

4. СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТОМ МЕРМИНА

Мермином [24] было получено общее выражение для диэлектрической функции

$$\varepsilon^M(\omega, k) = 1 + \frac{(\omega + i\nu) [\varepsilon^\circ(\omega + i\nu, k) - 1]}{\omega + i\nu \varepsilon^\circ(\omega + i\nu, k) - 1/(\varepsilon^\circ(0, k) - 1)} \quad (4.1)$$

на основе кинетического уравнения для одночастичной матрицы плотности ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + i[\mathcal{E} + V, \rho] = \frac{\rho^{\text{l.e.}} - \rho}{\tau}$$

со временем релаксации τ и локально-равновесной матрицей плотности $\rho^{\text{л.е.}}$, причем $\mathcal{E}$ – кинетическая энергия электронов, V – самосогласованный потенциал, $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор, $\rho^{\text{л.е.}}$ – локально-равновесная функция распределения электронов $\rho = 1/(1 + e^{\mathcal{E} - \mu - \delta\mu})$, μ – безразмерный (приведенный) химический потенциал.

Диэлектрическая функция вычисляется в импульсном представлении:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \left\langle \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2} \left| \rho \right| \mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle,$$

где $|\mathbf{p}\rangle$ – собственное состояние импульса $\mathbf{p}$. Для удобства можно преобразовать приведенную матрицу плотности к распределению Вигнера в фазовом пространстве:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{R}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) d^3q,$$

где $\mathbf{R}$ – пространственная координата.

В формуле (4.1) введено обозначение $\varepsilon^\circ(\omega, k)$ – так называемая диэлектрическая функция Линдхарда, т. е. диэлектрическая функция, полученная для бесстолкновительной плазмы и определяемая равенством (3.10) при $\nu = 0$:

$$\varepsilon^\circ(\omega, k) \equiv \varepsilon_1(\omega, k) = 1 + \frac{3\omega_p^2}{2k^2v_F} [1 - g(\omega_+, k) + g(\omega_-, k)].$$

Выражение $\varepsilon^\circ(\omega + i\nu, k)$ означает, что аргументы диэлектрической функции Линдхарда $\omega_\pm$ заменены формально на $\omega_\pm + i\nu$, т. е.

$$\varepsilon_1^\circ(\omega + i\nu, k) - 1 = \frac{3\omega_p^2}{2k^2v_F^2} [1 - g(\omega_+ + i\nu, k) + g(\omega_- + i\nu, k)]; \quad (4.2)$$

выражение $\varepsilon^\circ(0, k)$ означает, что в аргументах диэлектрической функции Линдхарда $\omega_\pm$ формально положили $\omega = 0$, т. е.

$$\varepsilon_1^\circ(0, k) - 1 = \frac{3\omega_p^2}{2k^2v_F^2} [1 - g(0_+, k) + g(0_-, k)]. \quad (4.3)$$

Здесь

$$g(0_\pm, k) = \frac{m(\hbar k^2/(4m^2) - v_F^2)}{2\hbar k v_F} \ln \frac{\pm \hbar k/(2m) + v_F}{\pm \hbar k/(2m) - v_F}.$$

Отсюда следует, что эти две функции отличаются лишь знаком: $g(0_-, k) = -g(0_+, k)$. Из формул (4.2) и (4.3) видно, что

$$\frac{\varepsilon^\circ(\omega + i\nu, k) - 1}{\varepsilon^\circ(0, k) - 1} = \frac{1 - g(\omega_+ + i\nu) + g(\omega_- + i\nu)}{1 - g(0_+, k) + g(0_-, k)}. \quad (4.4)$$

С помощью соотношений (4.2)–(4.4) формула Мермина (4.1) в наших обозначениях записывается в виде

$$\varepsilon^M = 1 + \frac{3\omega_p^2}{2k^2v_F^2} \frac{(\omega + i\nu)g_0(k)G(\omega_\pm, \nu, k)}{\omega g_0(k) + i\nu G(\omega_\pm, \nu, k)}, \quad (4.5)$$

где

$$g_0(k) = 1 - g(0_+, k) + g(0_-, k), \quad G(\omega_{\pm}, \nu, k) = 1 - g(\omega_+ + i\nu, k) + g(\omega_- + i\nu, k).$$

Из формул (3.10) и (4.5) видно, что при $\nu \rightarrow 0$ выведенная в работе формула и формула Мермина переходят в одну и ту же диэлектрическую функцию для квантовой бесстолкновительной плазмы – линдхардовскую диэлектрическую функцию (3.13).

В формуле Мермина (4.5) перейдем к тем же переменным (3.15), что и в формуле (3.16). В результате получаем следующее выражение для диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_1^M(x, y, q) = 1 + \frac{3x_p^2}{2q^2} \frac{(x + iy)g_0(q)G(z, q)}{xg_0(q) + iyG(z, q)}. \quad (4.6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$g_0(q) = 1 - g(0_+, k) + g(0_-, k) = 1 - 2g(0_+, k) = 1 - \frac{q^2 - 4}{4q} \ln \frac{q + 2}{q - 2},$$

$$G = 1 - g_+ + g_-, \quad g_{\pm} = \frac{(z \pm q^2/2)^2 - q^2}{2q^3} \ln \frac{z + q \pm q^2/2}{z - q \pm q^2/2}.$$

Формулы (4.6) и (3.16) представляют собой функции диэлектрического отклика квантовой вырожденной столкновительной плазмы, выведенные на основе кинетического уравнения, взятого соответственно в импульсном и координатном пространствах.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интересно отметить, что в низкочастотном пределе, т.е. при $\omega = 0$, диэлектрическая функция Мермина не зависит от частоты столкновений ν . В самом деле, полагая в формуле (4.5) $x = 0$ ($\omega = 0$), получаем

$$\varepsilon_1^M(0, y, q) = 1 + \frac{3x_p^2}{2} \left[1 - \frac{q^2 - 4}{4q} \ln \frac{q + 2}{q - 2} \right]. \quad (5.1)$$

Из полученной в настоящей работе формулы (3.12) в низкочастотном пределе в безразмерных переменных (3.11) получается совсем другая формула:

$$\varepsilon_1(0, y, q) = 1 + \frac{3x_p^2}{2} \left[1 - \frac{iy}{2} \ln \frac{iy + 1}{iy - 1} \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{(iy + q/2)^2 - 1}{2q} \ln \frac{iy + q/2 + 1}{iy + q/2 - 1} + \frac{(iy - q/2)^2 - 1}{2q} \ln \frac{iy - q/2 + 1}{iy - q/2 - 1} \right], \quad (5.2)$$

которая переходит в формулу (5.1) при $y = 0$.

Отметим, что в низкочастотном статичном пределе ($\omega = 0$) мнимая часть диэлектрического отклика (3.12) равна нулю, и эта функция является действительной и имеет следующий вид:

$$\varepsilon_1(0, y, q) = 1 + \frac{3x_p^2}{2(1 - y \operatorname{arccotg} y)} \left[1 + y \left(\operatorname{arccotg} \frac{1 + q/2}{y} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \operatorname{arccotg} \frac{1 - q/2}{y} \right) - \frac{1 + y^2 - q^2/2}{2q} \ln \frac{y^2 + (1 - q/2)^2}{y^2 + (1 + q/2)^2} \right]. \quad (5.3)$$

Рис. 4. Диэлектрический отклик для золота. Кривые отвечают двум значениям параметра $\varepsilon = \nu/\omega_p$: $\varepsilon = 10^{-5}$ (сплошная линия) и $\varepsilon = 10^{-2}$ (штриховая линия).

Подчеркнем, что выражение (5.3) слабо зависит от частоты столкновений электронов. Для случая золота ($\omega_p = 1.37 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$, $v_F = 1.4 \cdot 10^8 \text{ см/с}$, $k_F = 8.2 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}$) на рис. 4 построены кривые диэлектрического отклика согласно формуле (5.3). Из рис. 4 видно, что эти кривые фактически совпадают, хотя эффективные частоты столкновений электронов различаются в 1000 раз. Отличие приведенных кривых проявляется лишь в окрестности коновских особенностей ($q = \pm 2$). Таким образом, функция диэлектрического отклика в статическом пределе обнаруживает слабую зависимость от частоты столкновений электронов.

Итак, в настоящей работе получено аналитическое выражение для продольной диэлектрической проницаемости вырожденной электронной плазмы с учетом квантовых эффектов. Используется кинетическое БВВ-уравнение с интегралом столкновений в форме релаксационной τ -модели в пространстве координат.

Показано, что в пределе, когда постоянная Планка стремится к нулю, полученное выражение переходит в классическую формулу для продольной диэлектрической проницаемости вырожденной плазмы.

Найдены статические пределы ($\omega \rightarrow 0$) диэлектрической проницаемости как для бесстолкновительной, так и для столкновительной плазмы.

Отмечается расщепление коновских особенностей в бесстолкновительной плазме.

Приводится сравнение с классическим результатом Мермина для диэлектрической проницаемости. Отметим, что формула Мермина получена с использованием кинетического релаксационного уравнения в пространстве импульсов. Для бес-

столкновительной плазмы как полученная в настоящей работе формула, так и формула Мермина переходят в одну и ту же формулу Линдхарда.

Список литературы

- [1] П. К. Шукла, Б. Элиассон, *УФН*, **180**:1 (2010), 55–82.
- [2] B. Eliasson, P. K. Shukla, *J. Plasma Phys.*, **76**:1 (2010), 7–17, arXiv:0911.4594.
- [3] В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Госатомиздат, М., 1961.
- [4] N. L. Tsintsadze, “Some New Aspects of Degenerate Quantum Plasma”, *New Frontiers in Advanced Plasma Physics*, AIP Conf. Proc., **1306**, eds. B. Eliasson, P. K. Shukla, AIP, Melville, N.Y., 2010, 75–88, arXiv:1010.0073.
- [5] Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, *УФН*, **70**:2 (1960), 247–286.
- [6] I. M. Gamba, M. P. Gualdani, C. Sparber, *Kinetic and Related Modes*, **2**:1 (2009), 181–189.
- [7] В. И. Татарский, *УФН*, **139**:4 (1983), 587–619.
- [8] G. Manfredi, “How to model quantum plasmas”, *Topics in Kinetic Theory* (Toronto, Canada, March 24–26, 2004), Fields Inst. Commun., **46**, eds. T. Passot, C. Sulem, P. L. Sulem, AMS, Providence, RI, 2005, 263–287, arXiv:quant-ph/0505004.
- [9] D. Pines, *J. Nucl. Energy C*, **2**:1 (1961), 5–17.
- [10] A. Arnold, *Transport Theory Statist. Phys.*, **30**:4–6 (2001), 561–584.
- [11] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook, *Phys. Rev.*, **94**:3 (1954), 511–525.
- [12] E. P. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**:5 (1932), 749–759.
- [13] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner, *Phys. Rep.*, **106**:3 (1984), 121–167.
- [14] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 10: *Физическая кинетика*, Наука, М., 1979.
- [15] Ф. Платцман, П. Вольф, *Волны и взаимодействия в плазме твердого тела*, Мир, М., 1975.
- [16] J. Lindhard, *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, **28**:8 (1954), 1–57.
- [17] K. L. Kliewer, R. Fuchs, *Phys. Rev.*, **181**:2 (1969), 552–558.
- [18] R. Fuchs, K. L. Kliewer, *Phys. Rev.*, **185**:3 (1969), 905–913.
- [19] R. Fuchs, K. L. Kliewer, *Phys. Rev. B*, **3**:7 (1971), 2270–2278.
- [20] W. Kohn, S. H. Vosko, *Phys. Rev.*, **119**:3 (1960), 912–918.
- [21] W. Kohn, L. J. Sham, *Phys. Rev.*, **137**:6A (1965), A1697–A1705.
- [22] У. Харрисон, *Теория твердого тела*, Мир, М., 1972.
- [23] П. А. Эминов, *ЖЭТФ*, **135**:5 (2009), 1029–1036.
- [24] N. D. Mermin, *Phys. Rev. B*, **1**:5 (1970), 2362–2363.
- [25] J. Kroha, *J. Non-crystalline Solids*, **250–252** (1999), 865–868, arXiv:cond-mat/9810068.
- [26] К. П. Гуров, *Основания кинетической теории. Метод Н. Н. Боголюбова*, Наука, М., 1966.
- [27] M. Opher, G. J. Morales, J. N. Leboeuf, *Phys. Rev. E*, **66**:1 (2002), 016407, 10 pp.

Поступила в редакцию 14.11.2010,
после доработки 17.03.2011