Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Л. Анева, Й. Г. Бранков, Алгебраический подход
к направленным стохастическим лавинам, *ТМФ*, 2011,
том 169, номер 3, 444–462

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6740>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:55:10

© 2011 г.

Б. Л. Анева*, Й. Г. Бранков^{†‡}

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К НАПРАВЛЕННЫМ СТОХАСТИЧЕСКИМ ЛАВИНАМ

Двумерная направленная стохастическая модель песочной горы изучается аналитически с помощью направленных абелевых алгебр, недавно введенных Алькаразом и Риттенбергом. Получены некоторые точные выражения для вероятностей всевозможных процессов обрушения, при которых некоторому узлу в стационарном состоянии передается произвольное число частиц. Предложено описание эволюции в виртуальном времени для направленных лавин на двумерных решетках. Ввиду неразрешимости общей задачи алгебраический подход применен в частных случаях направленных детерминированных лавин и тривиальных стохастических лавин, описывающих простое случайное блуждание двух частиц. Изучение этих случаев выяснило роль каждого отдельного вида обрушений в эволюции лавин. В общем случае квадратичной направленной алгебры точно определены максимальные возможные значения потока частиц в любой момент виртуального времени и числа заполнения (“высоты”) каждого узла в любой момент времени.

Ключевые слова: случайные процессы, неравновесные стационарные состояния, динамика лавин, направленные стохастические песочные горы, направленные абелевы алгебры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели песочных гор, введенные в 1987 г. Баком, Тангом и Визенфельдом, остаются предметом пристального внимания исследователей, поскольку эти модели представляют собой простейший пример систем, описывающих самоорганизующуюся критичность с внутренне присущей лавинообразной динамикой, которая напоминает динамику, наблюдаемую в природе [1]. Несмотря на свою простоту и на значительные усилия, приложенные для их нахождения, до сих пор не было дано строгого вывода критических показателей, описывающих стационарное состояние изотропной

*Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Bulgarian Academy of Science, Sofia, Bulgaria

[†]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: brankov@theor.jinr.ru

[‡]Institute of Mechanics, Bulgarian Academy of Science, Sofia, Bulgaria

Рис. 1. Схематическое представление повернутой на угол $\pi/4$ квадратной решетки с открытой нижней границей. Разнонаправленные правила опрокидывания для двух частиц обозначены стрелками, а соответствующие вероятности – греческими буквами.

модели Бака–Танга–Визенфельда. Однако требование абелевости процесса опрокидывания частиц в моделях критической высоты делает их аналитическое исследование более легким [2]. В работах [3]–[5] были строго выведены несколько важных характеристик стационарного состояния. Затем в работе [6] были введены и решены аналитически модели детерминированных направленных песочных гор. Стало очевидно, что эти модели принадлежат специальному классу универсальности с точно известными критическими показателями. Также в работах [7]–[9] рассматривались как изотропные, так и направленные модели песочных гор со стохастической динамикой. Численные расчеты критических показателей стохастических направленных песочных гор (СНПГ) показали, что они принадлежат другому классу универсальности [8], [9].

Проведенные в последнее время объемлющие вычисления [10] в рамках метода Монте-Карло на повернутой на угол $\pi/4$ квадратной решетки (см. рис. 1) показали, что двумерные СНПГ принадлежат классу универсальности с $\sigma_\tau = 1.780 \pm 0.005$. Если границы погрешности оценены корректно, то этот результат противоречит аналитическому предсказанию $\sigma_\tau = 1.75$ [11], [12], равно как и предыдущим численным оценкам [8], поэтому важно перепроверить критические показатели направленных стохастических лавин. Попытка продвинуться в этом направлении была предпринята в работе [13].

Новый подход к аналитическому изучению направленных лавин был предложен в работе [10]. Этот подход основан на исследовании направленных абелевых алгебр на двумерных ациклических решетках. Квадратичная алгебра, предложенная для описания решетки, изображенной на рис. 1, действует в объемлющем пространстве следующим образом:

$$a_{i,j}^2 = \alpha [\mu a_{i+1,j}^2 + (1 - \mu) a_{i,j} a_{i+1,j}] + (1 - \alpha) [\mu a_{i,j+1}^2 + (1 - \mu) a_{i,j} a_{i,j+1}], \quad (1)$$

где $a_{i,j}$ – генератор, связанный с узлом решетки с координатами (i, j) . Здесь нумерация узлов решетки такова, что $i - 1$ есть расстояние (в шагах решетки) от правой границы, а $j - 1$ есть расстояние от левой границы. Таким образом, ближайшими соседями узла (i, j) в направлении распространения (вниз) оказываются узлы $(i + 1, j)$ (левый сосед) и $(i + 1, j + 1)$ (правый сосед).

Уравнение (1) описывает процесс опрокидывания частиц из нестабильного узла (i, j) , что включает в себя следующие стохастические события: с вероятностью μ опрокидываются две частицы, при этом с вероятностью $\alpha\mu$ (с вероятностью $(1 - \alpha)\mu$) обе частицы перемещаются в левый (соответственно в правый) ближайший узел в направлении распространения; с вероятностью $1 - \mu$ одна из частиц опрокидывается, а вторая остается в указанном узле, при этом опрокинутая частица перемещается в соседний левый (правый) узел с вероятностью $\alpha(1 - \mu)$ (соответственно с вероятностью $(1 - \alpha)(1 - \mu)$).

2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ НАПРАВЛЕННАЯ КВАДРАТИЧНАЯ АЛГЕБРА

Мы рассматриваем СНПГ на повернутой квадратной решетке (рис. 1) с более простыми и удобными при теоретических исследованиях правилами опрокидывания, частный пример которых рассматривался в работах [11], [12]. В соответствии с этими правилами всякое нестабильное состояние приходит в стабильную конфигурацию (содержащую не более одной частицы) в результате последовательности двухчастичных опрокидываний: с вероятностью α (с вероятностью β) эти две частицы переносятся в левый (соответственно правый) ближайший узел решетки, расположенный впереди, или с вероятностью $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ одна из частиц переносится налево, а вторая – направо. Каждый узел решетки может испустить только четное число частиц, а получить – произвольное число частиц. Таким образом, можно легко классифицировать узлы решетки с точки зрения их влияния на поток частиц [11], [12]. Узел, получивший четное число частиц, излучает такое же их число, а потому не меняет поток и называется *пассивным*. Узел, получивший нечетное число $2n + 1$ частиц, называется *активным*, так как если этот узел был пустой, то он задерживает одну частицу и испускает оставшееся четное число $2n$ частиц (*отрицательная активность*), а если этот узел был занят, то он испускает все $2n + 2$ частиц, оказавшихся в нем, т.е. увеличивает поток на одну единицу (*положительная активность*). Было показано, что критическое состояние модели СНПГ представляет собой меру произведения со средней плотностью частиц $\rho = 1/2$.

Далее, представляется удобным пронумеровать узлы так, чтобы первая координата i задавала целочисленный шаг τ по времени, а вторая координата j нумеровала узлы, которые лавина способна достичь за время $\tau = i$ в горизонтальном (пространственном) направлении. Тем самым узлы решетки формируют треугольный массив $\mathcal{L} = \{(i, j) : j = 1, 2, \dots, i, i = 1, 2, \dots, T\}$, в котором T – размер решетки в пространственном направлении. В этих обозначениях изучаемая квадратичная алгебра имеет вид

$$a_{i,j}^2 = \alpha a_{i+1,j}^2 + \beta a_{i+1,j+1}^2 + \gamma a_{i+1,j} a_{i+1,j+1}. \quad (2)$$

В данном равенстве предполагается, что узлы (i, j) не лежат на открытой границе решетки $\partial\mathcal{L} = \{i = T, j = 1, 2, \dots, T\}$. Число алгебраических соотношений (2)

совпадает с числом узлов решетки. С узлами, лежащими на открытой границе, соотносятся генераторы, удовлетворяющие следующим соотношениям (см. уравнение (71) в работе [10]):

$$a_{T,j}^2 = 1, \quad j = 1, 2, \dots, T.$$

В исследуемом случае критическое стационарное состояние системы имеет вид (см. уравнение (73) из работы [10] при $\mu = 1$)

$$\Phi_{1,T} = \prod_{i=1}^T \prod_{j=1}^i \frac{1 + a_{i,j}}{2}.$$

Это условие отвечает мере произведения, в которой вероятности того, что узел свободен или занят всего одной частицей, совпадают. С помощью индукции можно показать, что $a_{i,j} \Phi_{1,T} = \Phi_{1,T}$ для $(i, j) \in \mathcal{L}$.

Лавина всегда будет начинаться в результате падения частиц в узел $(1, 1)$ до тех пор, пока он не перестанет быть стабильным. Ограничим время существования стационарного состояния интервалом от $i = \tau$ до $i = T$,

$$\Phi_{\tau,T} = \prod_{i=\tau}^T \prod_{j=1}^i \frac{1 + a_{i,j}}{2},$$

и опишем начало лавины как

$$a_{1,1}^2 \Phi_{2,T} = (\alpha a_{2,1}^2 + \beta a_{2,2}^2 + \gamma a_{2,1} a_{2,2}) \frac{1 + a_{2,1}}{2} \frac{1 + a_{2,2}}{2} \Phi_{3,T}.$$

Отсюда нетрудно увидеть, что лавина может остановиться на втором временном шаге $\tau = 2$ с вероятностью $\gamma/4$: если две частицы из начального узла перемещаются в различные соседние узлы (что происходит с вероятностью γ) и оба этих узла не были при этом заняты (что происходит с вероятностью $1/4$). Чтобы вычислить вероятности более мощных лавин, необходимо определить влияние того, что в данный узел в момент времени τ попало произвольное число частиц, на ограничение времени существования стационарного состояния интервалом $[\tau, T]$. В частности, следует вычислить произведение $a_{i,j}^n (1 + a_{i,j})/2$ при любом целом n . Поскольку результат зависит от четности числа n , рассмотрим по отдельности случаи четного $n = 2p$,

$$a_{i,j}^{2p} \frac{1 + a_{i,j}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2p} C_k^{(2p)} (1 + a_{i,j}) a_{i+1,j}^{2p-k} a_{i+1,j+1}^k, \quad (3)$$

и нечетного $n = 2p + 1$,

$$a_{i,j}^{2p+1} \frac{1 + a_{i,j}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2p} C_k^{(2p)} a_{i,j} a_{i+1,j}^{2p-k} a_{i+1,j+1}^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2p+2} C_k^{(2p+2)} a_{i+1,j}^{2p+2-k} a_{i+1,j+1}^k. \quad (4)$$

В первом случае, когда в стационарный узел (i, j) приходит четное число $2p$ частиц, все эти $2p$ частиц опрокидываются: с вероятностью $C_k^{(2p)}$ налево отправляются $2p - k$ частиц, а направо — k частиц, $k = 0, 1, \dots, 2p$. При этом само состояние узла (i, j) остается неизменным. Во втором случае, когда в стационарный узел (i, j)

попадает нечетное число $2p+1$ частиц, результат зависит от числа заполнения данного узла. Если узел был пуст, то опрокидываются только $2p$ частиц: с вероятностью $C_k^{(2p)}$ налево уходят $2p-k$ частиц и направо — k частиц, $k = 0, 1, \dots, 2p$, одна частица при этом остается в узле. Если узел заполнен, то опрокидываются все $2p+2$ частиц: с вероятностью $C_k^{(2p+2)}$ налево опрокидываются $2p+2-k$ частиц и направо — k частиц, $k = 0, 1, \dots, 2p+2$; узел при этом остается пустым. Тем не менее полное состояние узла (i, j) не меняется, поскольку вероятности пустого и однократно заполненного узла в стационарном состоянии равны друг другу.

Разрешив рекуррентные соотношения для коэффициентов $C_k^{(2p)}$,

$$C_k^{(2p+2)} = \alpha C_k^{(2p)} + \beta C_{k-2}^{(2p)} + \gamma C_{k-1}^{(2p)}, \quad k = 2, \dots, p,$$

при начальных условиях $C_0^{(0)} = 1$, $C_0^{(2)} = \alpha$, $C_1^{(2)} = \gamma$ и $C_2^{(2)} = \beta$, получим

$$C_k^{(2p)}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{p!}{(k-2m)! m! (p+m-k)!} \alpha^{p+m-k} \beta^m \gamma^{k-2m}, \quad k = 0, 1, \dots, p, \quad (5)$$

где символом $[k/2]$ обозначена целая часть вещественного числа $k/2$. С учетом свойства симметрии между левым и правым, $C_k^{2p}(\alpha, \beta, \gamma) = C_{2p-k}^{2p}(\beta, \alpha, \gamma)$, уравнение (5) полностью определяет коэффициенты $C_k^{2p}(\alpha, \beta, \gamma)$, $k = 0, 1, \dots, 2p$. Ниже приведены явные формулы для этих коэффициентов при $p = 2, 3$:

$$\begin{aligned} C_0^{(4)} &= \alpha^2, & C_1^{(4)} &= 2\alpha\gamma, & C_2^{(4)} &= 2\alpha\beta + \gamma^2, & C_3^{(4)} &= 2\beta\gamma, & C_4^{(4)} &= \beta^2, \\ C_0^{(6)} &= \alpha^3, & C_1^{(6)} &= 3\alpha^2\gamma, & C_2^{(6)} &= 3\alpha^2\beta + 3\alpha\gamma^2, & C_3^{(6)} &= 6\alpha\beta\gamma + \gamma^3, \\ C_4^{(6)} &= 3\alpha\beta^2 + 3\beta\gamma^2, & C_5^{(6)} &= 3\beta^2\gamma, & C_6^{(6)} &= \beta^3. \end{aligned}$$

Заметим, что $C_k^{(2p+1)} = 0$ при всех $k = 0, 1, \dots, 2p+1$.

Для того чтобы описать распределение лавин по их размеру, необходимо знать только число частиц, перемещенных в промежутке между моментами времени τ и $\tau+1$. Вероятность, с которой это число первый раз обращается в ноль, задает вероятность того, что лавина имеет продолжительность τ . Нас также интересует распределение вероятностей того, что мы получим лавину с данным полным числом опрокинутых частиц, что определяет “размер” лавины. Ни в одном из этих случаев мы не интересуемся конфигурационными изменениями, произошедшими в результате лавины. Следуя работе [10], символом $\hat{=}$ будем обозначать выражения, в которых все генераторы алгебры, оставшиеся за фронтом лавины, заменяются на единичные, например

$$a_{i,j}^{2p} \frac{1 + a_{i,j}}{2} \hat{=} \sum_{k=0}^{2p} C_k^{(2p)} a_{i+1,j}^{2p-k} a_{i+1,j+1}^k, \quad (6)$$

$$a_{i,j}^{2p+1} \frac{1 + a_{i,j}}{2} \hat{=} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2p} C_k^{(2p)} a_{i+1,j}^{2p-k} a_{i+1,j+1}^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2p+2} C_k^{(2p+2)} a_{i+1,j}^{2p+2-k} a_{i+1,j+1}^k. \quad (7)$$

Обозначим через $P(n_1, \dots, n_\tau \mid \tau)$ вероятность того, что в момент времени $i = \tau$ узлы $(\tau, 1), (\tau, 2), \dots, (\tau, \tau)$ имеют числа заполнения $n_1, n_2, \dots, n_\tau$ соответственно. Полное

число частиц в этот момент времени может варьироваться в пределах от нуля до некоторого конечного числа $n_{\max}(\tau)$. Теперь эволюция в виртуальном времени для лавины на решетке $\mathcal{L}$ описывается уравнением

$$a_{1,1}^2 \Phi_{2,T} \hat{=} \sum_{n=0}^{n_{\max}(\tau)} \left[\sum_{n_1+\dots+n_\tau=n} P(n_1, \dots, n_\tau \mid \tau) \prod_{k=1}^{\tau} a_{\tau,k}^{n_k} \right] \Phi_{\tau+1,T}, \quad \tau = 2, \dots, T-1. \quad (8)$$

Разумеется, лавина продолжается в промежутке времени между τ и $\tau+1$, только если по крайней мере одно число $n_k \geq 2$. В этом случае одночлен $\prod_{k=1}^{\tau} a_{\tau,k}^{n_k}$ задает возможное распределение частиц в слое τ , а поток частиц, попадающих на следующий слой $\tau+1$, получается применением формул (6) или (7) к каждому $a_{\tau,k}^{n_k}$ с $n_k \geq 2$. Фронт лавины в момент времени τ простирается от узла $j_{\min}(\tau)$ до узла $j_{\max}(\tau)$, где $j_{\min}(\tau)$ и $j_{\max}(\tau)$ – самый левый и самый правый нестабильные узлы.

Анализ эволюции лавины (8) при больших временах τ представляется невозможным. Можно получить некоторое представление о роли различных процессов опрокидывания, если перейти к рассмотрению двух предельных случаев алгебры (2): $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$ и $\alpha = \beta = 1/2$, $\gamma = 0$.

2.1. Направленные детерминированные лавины. Направленные детерминированные модели песочных гор были введены в работе [6], где найдены точные ответы для критических показателей лавины в пространстве произвольной размерности. Показано, что в двумерном пространстве модель эквивалентна специальному случаю направленной перколяции. В настоящей работе мы исследуем двумерный случай чисто алгебраическими методами.

Заметим, что если $\alpha = \beta = 0$ и, следовательно, $\gamma = 1$, то эволюция лавины становится детерминированной, поскольку обе опрокидывающиеся частицы всегда расходятся по разным ближайшим соседям в направлении вперед. Таким образом, левые и правые границы кластера нестабильного лавинообразного процесса совершают простые случайные блуждания. В этом случае коэффициенты (5) принимают вид $C_k^{(2p)}(0, 0, 1) = \delta_{k,p}$, и соотношения (6), (7) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{2p} \frac{1+a_{i,j}}{2} &\hat{=} a_{i+1,j}^p a_{i+1,j+1}^p, \\ a_{i,j}^{2p+1} \frac{1+a_{i,j}}{2} &\hat{=} \frac{1}{2} a_{i+1,j}^p a_{i+1,j+1}^p + \frac{1}{2} a_{i+1,j}^{p+1} a_{i+1,j+1}^{p+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Докажем теперь, что эволюция детерминированного лавинообразного процесса, задаваемая соотношениями (8) с правилами опрокидывания (9), при этом также существенно упрощается. Фронт лавины становится “компактным” (без щелей, отвечающих стабильным состояниям) и почти “плоским”: в каждом из нестабильных состояний могут находиться только две или три частицы. На первом шаге эволюции это условие, очевидно, выполняется, так как

$$\begin{aligned} a_{1,1}^2 \frac{1+a_{2,1}}{2} \frac{1+a_{2,2}}{2} &= \frac{a_{2,1}a_{2,2} + a_{2,1}^2a_{2,2} + a_{2,1}a_{2,2}^2 + a_{2,1}^2a_{2,2}^2}{4} \hat{=} \\ &\hat{=} \frac{1 + a_{2,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{2,1}^2a_{2,2}^2}{4}. \end{aligned}$$

Нетрудно увидеть, что с вероятностью $1/4$ лавина останавливается; если же она продолжается, то нестабильные состояния в момент времени $\tau = 2$ имеют числа заполнения, в точности равные 2. На следующем шаге получим

$$\begin{aligned} a_{1,1}^2 \prod_{i=2}^3 \prod_{j=1}^i \frac{1+a_{i,j}}{2} &\hat{=} \frac{1+a_{3,1}a_{3,2}+a_{3,2}a_{3,3}+a_{3,1}a_{3,2}^2 a_{3,3}}{4} \prod_{j=1}^3 \frac{1+a_{3,j}}{2} \hat{=} \\ &\hat{=} \frac{1}{32} (12 + 2a_{3,1}^2 + 5a_{3,2}^2 + 2a_{3,3}^2 + a_{3,2}^3 + 3a_{3,1}^2 a_{3,2}^2 + 3a_{3,2}^2 a_{3,3}^2 + \\ &\quad + a_{3,1}^2 a_{3,2}^3 + a_{3,2}^3 a_{3,2}^2 + a_{3,1}^2 a_{3,2}^2 a_{3,3}^2 + a_{3,1}^3 a_{3,2}^2 a_{3,3}^2). \end{aligned}$$

Набор нестабильных узлов, очевидно, остается компактным, а числа заполнения этих узлов могут принимать только значения 2 и 3. Установив справедливость этих свойств при $\tau = 3$, докажем теперь их справедливость и при $\tau + 1$.

В соответствии с предположением при некотором τ общий член операторных произведений в правых частях выражений (8) записывается как

$$a_{\tau,1}^{n_1} \dots a_{\tau,p}^{n_p} a_{\tau,p+1}^{n_{p+1}} \dots a_{\tau,p+q}^{n_{p+q}} a_{\tau,p+q+1}^{n_{p+q+1}} \dots a_{\tau,\tau}^{n_\tau},$$

где индексы $n_1, \dots, n_p$ и $n_{p+q+1}, \dots, n_\tau$ принимают значения 0, 1, а числа заполнения $n_{p+1}, \dots, n_{p+q}$ равны 2 или 3. Такой член описывает лавину с фронтом, охватывающим q попарно соседних нестабильных узлов. Поскольку каждый нестабильный узел испускает всего две частицы, после подстановки

$$a_{\tau,i} \hat{=} 1, \quad a_{\tau,i}^2 \hat{=} a_{\tau+1,i} a_{\tau+1,i+1}, \quad a_{\tau,i}^3 \hat{=} a_{\tau+1,i} a_{\tau+1,i+1}, \quad i \in \{1, 2, \dots, \tau\},$$

получим, что члены, отвечающие за генерирование эволюции лавины в момент времени $\tau + 1$, принимают вид

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\tau} a_{\tau,k}^{n_k} \Phi_{\tau+1,T} &\hat{=} \prod_{k=p+1}^{p+q} a_{\tau+1,k} a_{\tau+1,k+1} \left[\prod_{i=1}^{\tau+1} \frac{1+a_{\tau+1,i}}{2} \right] \Phi_{\tau+2,T} = \\ &= \left[\prod_{i=1}^p \frac{1+a_{\tau+1,i}}{2} \right] \frac{a_{\tau+1,p+1} + a_{\tau+1,p+1}^2}{2} \left[\prod_{k=p+2}^{p+q} \frac{a_{\tau+1,k}^2 + a_{\tau+1,k}^3}{2} \right] \times \\ &\quad \times \frac{a_{\tau+1,p+q+1} + a_{\tau+1,p+q+1}^2}{2} \Phi_{\tau+2,T} \hat{=} \\ &\hat{=} \frac{1 + a_{\tau+1,p+1}^2}{2} \left[\prod_{k=p+2}^{p+q} a_{\tau+1,k}^2 \right] \frac{1 + a_{\tau+1,p+q+1}^2}{2} \Phi_{\tau+2,T}. \end{aligned}$$

Из приведенных выше выражений можно заключить следующее:

- 1) фронт лавины остается компактным;
- 2) числа заполнения нестабильных состояний могут принимать только значения 2 или 3;
- 3) если надвигающийся фронт лавины имеет ширину q в момент времени τ , то в следующий момент времени $\tau + 1$ он может либо с вероятностью $1/4$ сузиться до $q - 1$, либо с вероятностью $1/2$ остаться той же ширины q , либо с вероятностью $1/4$ расшириться до $q + 1$.

Последнее свойство отражает то обстоятельство, что левая и правая границы компактного фронта лавины совершают независимые простые случайные блуждания на один шаг налево или направо. При этом шаг в сторону левого соседа спереди не меняет расстояния от левой границы, а шаг в сторону правого соседа увеличивает это расстояние на единицу. Обозначив через $P(L, \tau)$ вероятность возникновения фронта лавины ширины L в момент времени τ , получим рекуррентное соотношение

$$P(L, \tau + 1) = \frac{1}{4}P(L - 1, \tau) + \frac{1}{2}P(L, \tau) + \frac{1}{4}P(L + 1, \tau).$$

2.2. Простые случайные блуждания. В случае $\alpha = \beta = 1/2$, $\gamma = 0$ получим лавины, переносящие в точности две частицы по всей решетке, траектория которых представляет собой несмещенное простое случайное блуждание. Коэффициенты (5) при этом принимают вид

$$C_{2m}^{(2p)}(1/2, 1/2, 0) = 2^{-p} \binom{p}{m}, \quad C_{2m+1}^{(2p)}(1/2, 1/2, 0) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, p-1,$$

а соотношения (6), (7) перейдут в

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{2p} \frac{1 + a_{i,j}}{2} &\cong 2^{-p} \sum_{m=0}^p \binom{p}{m} a_{i+1,j}^{2(p-m)} a_{i+1,j+1}^{2m}, \\ a_{i,j}^{2p+1} \frac{1 + a_{i,j}}{2} &\cong 2^{-p-1} \sum_{m=0}^p \binom{p}{m} a_{i+1,j}^{2(p-m)} a_{i+1,j+1}^{2m} + \\ &\quad + 2^{-p-2} \sum_{m=0}^{p+1} \binom{p+1}{m} a_{i+1,j}^{2(p+1-m)} a_{i+1,j+1}^{2m}. \end{aligned}$$

Квадратичная алгебра теперь состоит из двух членов,

$$a_{i,j}^2 = \frac{1}{2}a_{i+1,j}^2 + \frac{1}{2}a_{i+1,j+1}^2,$$

которые действуют на стационарное состояние независимо, не меняя его. Докажем теперь, что в этом случае фронт каждой лавины имеет только один нестабильный узел, занятый двумя или тремя частицами. Такие лавины совершают простые случайные блуждания, завершающиеся на открытой границе системы в момент времени $\tau = T$.

На первом шаге эволюции лавины имеем

$$\begin{aligned} a_{1,1}^2 \frac{1 + a_{2,1}}{2} \frac{1 + a_{2,2}}{2} &= \frac{1}{8}(a_{2,1}^2 + a_{2,1}^3 + a_{2,1}^2 a_{2,2} + a_{2,1}^3 a_{2,2} + a_{2,2}^2 + a_{2,1} a_{2,2}^2 + \\ &\quad + a_{2,2}^3 + a_{2,1} a_{2,2}^3) \cong \frac{a_{2,1}^2 + a_{2,2}^2}{2} = \frac{a_{3,1}^2 + 2a_{3,2}^2 + a_{3,3}^2}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что с равной вероятностью $1/2$ обе частицы лавины перемещаются в левый или в правый соседний узел в направлении вперед. На следующем этапе с уровня $\tau = 2$ испускаются снова в точности две частицы, распределение при этом соответствует вероятностям при несмещенном случайном блуждании. Добавившись

до стационарного распределения на уровне $\tau = 3$, лавина продолжает распространяться тем же образом:

$$\begin{aligned} a_{1,1}^2 \prod_{i=2}^3 \prod_{j=1}^i \frac{1+a_{i,j}}{2} &\cong \frac{a_{3,1}^2 + 2a_{3,2}^2 + a_{3,3}^2}{4} \prod_{j=1}^3 \frac{1+a_{3,j}}{2} \cong \\ &\cong \frac{a_{3,1}^2 + 2a_{3,2}^2 + a_{3,3}^2}{4} = \frac{a_{4,1}^2 + 3a_{4,2}^2 + 3a_{4,3}^2 + a_{4,4}^2}{8}. \end{aligned}$$

Тем самым вплоть до момента времени $\tau = 3$ фронт каждой такой лавины содержит в точности одно нестабильное состояние с числом заполнения, которое может быть равно только 2 или 3. С каждого уровня испускаются ровно две частицы. Установив эти свойства при $\tau = 3$, покажем, что они будут выполнены и при $\tau + 1$.

В соответствии с предположением при некотором τ общий член операторных произведений в правых частях соотношений (8) имеет вид

$$\begin{aligned} a_{\tau,j}^2 \Phi_{\tau+1,T} &= \frac{a_{\tau+1,j}^2 + a_{\tau+1,j+1}^2}{2} \left[\prod_{i=1}^{\tau+1} \frac{1+a_{\tau+1,i}}{2} \right] \Phi_{\tau+2,T} = \\ &= \left[\prod_{i=1}^{j-1} \frac{1+a_{\tau+1,i}}{2} \right] \frac{a_{\tau+1,j}^2 + a_{\tau+1,j+1}^2}{4} \left[\prod_{i=j+1}^{\tau+1} \frac{1+a_{\tau+1,i}}{2} \right] \Phi_{\tau+2,T} + \\ &\quad + \left[\prod_{i=1}^j \frac{1+a_{\tau+1,i}}{2} \right] \frac{a_{\tau+1,j+1}^2 + a_{\tau+1,j+2}^2}{4} \left[\prod_{i=j+2}^{\tau+1} \frac{1+a_{\tau+1,i}}{2} \right] \Phi_{\tau+2,T} \cong \\ &\cong \frac{a_{\tau+2,j}^2 + 2a_{\tau+2,j+1}^2 + a_{\tau+2,j+2}^2}{4} \Phi_{\tau+2,T}. \end{aligned}$$

При общих значениях параметров α и $\beta = 1 - \alpha$ алгебраический вид эволюционного процесса в каждый момент виртуального времени отвечает процессам, в которых две частицы, испущенные из узла $(1, 1)$, перемещаются сквозь всю решетку вдоль траекторий с распределением вероятностей для смещенных простых случайных блужданий.

3. ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ НАПРАВЛЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПЕСОЧНЫХ ГОР

В данном разделе представлены точные результаты, которые описывают некоторые важные характеристики направленных стохастических лавин, удовлетворяющих общей алгебре (2): мы вычисляем максимальное значение $I_{\max}(\tau)$ для тока частиц и максимальное число заполнения $h_{\max}(\tau, j)$ произвольного узла (τ, j) , $j = 1, \dots, \tau$, в каждый заданный момент виртуального времени τ .

3.1. Максимальный ток в момент времени τ . При $\tau = 1$ начальным условием старта лавины является $I_{\max}(1) = 2$. При $\tau = 2$ величина $I_{\max}(2) = 4$ достигается в случае, когда оба узла $(2, 1)$ и $(2, 2)$ положительно активны, т. е. когда оба они заняты и в каждый из них приходит по одной частице при опрокидывании $a_{1,1}^2 \rightarrow \gamma a_{2,1} a_{2,2}$. В общем случае максимально возможный ток частиц $I_{\max}(\tau)$ в момент виртуального времени τ достигается в том случае, когда с уровня $\tau - 1$ испускается максимально возможный ток $I_{\max}(\tau - 1)$ и при этом максимально возможное

Рис. 2. Схематическое изображение лавины, приводящей к максимально нестабильному числу заполнения центрального узла на уровне с нечетным виртуальным временем τ . Натуральные числа над стрелками указывают число частиц, перенесенных в соответствующем направлении.

число узлов на уровне τ имеют положительную активность, т. е. они заняты и в каждый из них опрокидывается нечетное число частиц. Поскольку в силу алгебры (2) ток всегда четный, его максимальное значение, очевидно, зависит от четности τ . Примеры таких обрушений при виртуальных временах $\tau = 1, 2, 3, 4$ показаны на рис. 2.

Докажем сначала следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Максимальный ток частиц, выпускаемых с уровня τ , задается формулой*

$$I_{\max}(\tau) = \begin{cases} (\tau^2 + 1)/2 + 1, & \tau \text{ нечетное,} \\ \tau^2/2 + 2, & \tau \text{ четное.} \end{cases} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит из двух важных частей. Сначала надо найти лавины, которые переносят с уровня на уровень максимально возможное число частиц. Чтобы обеспечить наиболее благоприятные условия, рассмотрим стабильные конфигурации, в которых заняты все узлы на уровнях $1 \leq t \leq \tau$. Вторая часть состоит в вычислении рекуррентного соотношения, устанавливающего связь между $I_{\max}(\tau)$ и $I_{\max}(\tau - 2)$. Решения этого соотношения, взятые отдельно для нечетных и четных значений τ , задают искомый ответ.

Прежде всего мы докажем, что на каждом уровне с четным τ все его узлы могут быть положительно активными, а потому с этого уровня могут выпускаться $I_{\max}(\tau - 1) + \tau$ частиц. Такое событие происходит в результате следующей последовательности опрокидываний. Сначала каждый из $\tau/2$ узлов с нечетными номерами на уровне $\tau - 1$, т. е. узел $(\tau - 1, 2m - 1)$, $m = 1, \dots, \tau/2$, испускает по две частицы:

$$a_{\tau-1,2m-1}^2 \rightarrow \gamma a_{\tau,2m-1} a_{\tau,2m}, \quad m = 1, \dots, \tau/2, \quad (11)$$

так что в каждый из узлов уровня τ приходит в точности по одной частице. Это возможно, поскольку при $\tau \geq 3$ нестабильная конфигурация на уровне $\tau - 1$ содержит не более $I_{\max}(\tau - 2) + \tau - 1$ частиц: $I_{\max}(\tau - 2)$ частиц, пришедших с предыдущего уровня $\tau - 2$, и $\tau - 1$ частиц в узлах стационарной конфигурации на уровне $\tau - 1$. После завершения процессов опрокидывания (11) на уровне $\tau - 1$ останется $I_{\max}(\tau - 2) - 1$ частиц. Четная часть этого числа, а именно $I_{\max}(\tau - 2) - 2$ частиц, может быть перенесена на уровень τ произвольными порциями, состоящими из четного числа частиц, а одна частица останется на уровне $\tau - 1$. Таким образом, полное число частиц, накопленных в нестабильной конфигурации на уровне τ , равно $I_{\max}(\tau - 2) + 2\tau - 2$, и все они разбиваются на порции с четными числами заполнения в соответствующих узлах. Поэтому имеем для четного $\tau \geq 4$

$$I_{\max}(\tau) = I_{\max}(\tau - 1) + \tau = I_{\max}(\tau - 2) + 2\tau - 2.$$

Докажем теперь, что на уровне с нечетным τ может существовать не более $\tau - 1$ положительно активных состояний. Очевидно, что не все τ узлов могут быть активными, поскольку полученное число частиц $I_{\max}(\tau - 1)$ всегда четно, и их нельзя распределить по нечетному числу узлов τ так, чтобы в каждой порции было нечетное число частиц. Чтобы увидеть, как можно добиться того, чтобы пассивным остался только один узел, рассмотрим процессы (11) при $m = 1, \dots, (\tau - 1)/2$, в которых в точности по одной частице переносится в каждый из первых $\tau - 1$ узлов на уровне τ . Из последнего нестабильного узла $(\tau - 1, \tau - 1)$ на предшествующем уровне может испускаться или четное число частиц в узел (τ, τ) , что оставляет его пассивным, или порции, состоящие из нечетного числа частиц, в каждый из узлов $(\tau, \tau - 1)$ и (τ, τ) . В последнем случае получаем, что узел $(\tau, \tau - 1)$ будет пассивным, а узел (τ, τ) — положительно активным. Наличие всего одного пассивного узла на уровне τ сохранится, когда из оставшихся нестабильных узлов на уровне $\tau - 1$ будут испущены порции с четным числом частиц в узлы уровня τ . Таким образом, с уровня с нечетным τ может быть испущено максимум $I_{\max}(\tau) = I_{\max}(\tau - 1) + \tau - 1$ частиц. Поскольку $\tau - 1$ четно, с помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше, получаем, что $I_{\max}(\tau - 1) = I_{\max}(\tau - 2) + \tau - 1$. Отсюда для нечетных $\tau \geq 3$

$$I_{\max}(\tau) = I_{\max}(\tau - 1) + \tau - 1 = I_{\max}(\tau - 2) + 2\tau - 2.$$

В результате вне зависимости от четности τ имеет место рекуррентное соотношение

$$I_{\max}(\tau) - I_{\max}(\tau - 2) = 2\tau - 2, \quad \tau > 2. \quad (12)$$

Чтобы решить полученное рекуррентное соотношение, заметим, что в нечетные моменты виртуального времени $\tau = 2n - 1$, $n = 1, 2, \dots$, из этого соотношения вытекает формула

$$\sum_{k=2}^n [I_{\max}(2k - 1) - I_{\max}(2k - 3)] \equiv I_{\max}(2n - 1) - I_{\max}(1) = \sum_{k=2}^n (4k - 4) = 2n^2 - 2n.$$

В силу начального условия $I_{\max}(1) = 2$, производя подстановку $n = (\tau + 1)/2$, получаем выражение (10) для нечетных τ .

При четных $\tau = 2n$, $n = 1, 2, \dots$, из рекуррентного соотношения (12) имеем

$$\sum_{k=2}^n [I_{\max}(2k) - I_{\max}(2k-2)] \equiv I_{\max}(2n) - I_{\max}(2) = \sum_{k=2}^n (4k-2) = (2n)^2 - 2.$$

Принимая в расчет начальное условие $I_{\max}(2) = 4$ и подставляя $n = \tau/2$, получаем выражение (10) для четных τ .

3.2. Максимальное число заполнения узла в момент времени τ . При доказательстве результатов этого раздела используется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для каждого узла (τ, j) , $2 \leq \tau \leq T$, $1 \leq j \leq \tau$, его *область притяжения* есть множество всех предшествующих узлов, из которых частицы могут перемещаться в данный узел в процессе лавины, удовлетворяющей алгебре (2).

Способ установить максимально возможное число заполнения узла состоит в рассмотрении лавин, в которых реализуется максимально возможный поток частиц с уровня на уровень внутри области притяжения данного узла. В доказательстве предложения 1 были установлены следующие результаты:

1) лавина, переходящая с четного уровня на следующий за ним нечетный уровень, может переносить максимально *все за исключением одной* частицы в полностью занятую стабильную конфигурацию на нечетном уровне;

2) существует лавина, которая в процессе перехода с нечетного уровня на следующий за ним четный уровень переносит *все* частицы из полностью занятых стабильных конфигураций нечетного уровня.

Эти два утверждения были доказаны при условии, что все узлы в паре последовательно расположенных уровней могут принимать участие в лавине. В настоящем рассмотрении необходимо адаптировать эти результаты к случаю лавины, распространяющейся только в области притяжения данного узла, поэтому возникает проблема описания переноса частиц между отрезками последовательно расположенных уровней. Докажем сначала более сильные утверждения.

ЛЕММА. Рассмотрим отрезки на двух последовательно расположенных уровнях, для которых справедлив тот факт, что каждый узел на одном из отрезков имеет по крайней мере один ближайший соседний узел на другом. Тогда:

1) если число узлов на втором отрезке нечетно, то лавина может переносить вниз не более чем все частицы за исключением одной из полностью заполненных стабильных конфигураций на этом отрезке;

2) если число узлов на втором отрезке четно, то существует такая лавина, которая переносит вниз все частицы из полностью заполненных стабильных конфигураций на этом отрезке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеются три возможных типа конфигураций данных двух отрезков, которые удовлетворяют условиям леммы. С точки зрения изменения числа узлов при движении вниз от отрезка к отрезку эти конфигурации можно разбить на следующие классы:

1) конфигурации с возрастающим числом узлов:

$$\begin{aligned} & (i, j+1), (i, j+2), \dots, (i, j+m-1), \\ & (i+1, j+1), (i+1, j+2), \dots, (i+1, j+m-1), (i+1, j+m); \end{aligned} \tag{13}$$

2) конфигурации с неизменным числом узлов:

$$\begin{aligned} & (i, j+1), (i, j+2), \dots, (i, j+m-1), (i, j+m), \\ & (i+1, j+1), (i+1, j+2), \dots, (i+1, j+m-1), (i+1, j+m) \end{aligned} \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned} & (i, j), (i, j+1), \dots, (i, j+m-1), \\ & (i+1, j+1), (i+1, j+2), \dots, (i+1, j+m-1), (i+1, j+m); \end{aligned} \quad (15)$$

3) конфигурации с убывающим числом узлов:

$$\begin{aligned} & (i, j), (i, j+1), \dots, (i, j+m-1), (i, j+m), \\ & (i+1, j+1), (i+1, j+2), \dots, (i+1, j+m-1), (i+1, j+m). \end{aligned} \quad (16)$$

При этом в силу симметрии между левым и правым направлениями решетки в случае $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ достаточно рассмотреть только одну из конфигураций второго класса, например (15).

Отметим, что в используемых обозначениях число узлов на втором отрезке всегда равно m . С учетом четности числа m каждый из отмеченных выше классов распадается на два подкласса: с нечетным и четным m .

Пусть m – нечетное число. Ни одна из лавин не обращает все узлы второго отрезка уровня $i+1$ в положительно активные, поскольку каждая лавина переносит вниз четное число частиц, которое нельзя распределить по нечетному числу узлов порциями, содержащими нечетное число частиц. Тем не менее существует лавина, которая сделает положительно активными все занятые узлы на отрезке уровня $i+1$, кроме одного. Пример такого лавинообразного процесса включает опрокидывания

$$a_{i,k}^2 \rightarrow \gamma a_{i+1,k} a_{i+1,k+1}, \quad k = j+1, j+3, \dots, j+m-2. \quad (17)$$

В результате в каждой из конфигураций (13)–(16) во все узлы на втором отрезке, кроме самого последнего узла $(i+1, j+m)$, поступает в точности по одной частице. Из всех оставшихся нестабильных узлов на верхнем отрезке уровня i в соседние узлы на отрезке уровня $i+1$ могут испускаться порции с четным числом частиц. При этом все $m-1$ узлов $(i+1, k)$, $k = j+1, j+2, \dots, j+m-1$, становятся положительно активными, и только последний узел $(i+1, j+m)$ остается пассивным или, возможно, стабильным в случаях (13) и (15).

Рассмотрим теперь четные m . Лавину, превращающую все узлы второго отрезка в положительно активные, можно построить следующим образом. После опрокидываний (17) с $k = j+1, j+3, \dots, j+m-1$ во все узлы нижнего уровня $i+1$ падает ровно по одной частице. Тогда из оставшихся нестабильных узлов на верхнем отрезке уровня i порции с четным числом частиц перемещаются в соседние узлы на нижнем отрезке уровня $i+1$. Существование хотя бы одного такого соседа обеспечивается условиями леммы. Лемма доказана

Теперь можно доказать следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Максимальное число заполнения, достигаемое в центральном узле на уровне τ , задается следующими выражениями.*

В нечетные моменты виртуального времени $\tau = 2n - 1$ максимальное число заполнения в узлах $(2n - 1, n \pm p)$, $p = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, равно

$$h_{\max}(2n - 1, n \pm p) = \begin{cases} n(n - 1) - p(p - 1) + 3, & n - p \text{ четное,} \\ n(n - 1) - p(p + 1) + 3, & n - p \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (18)$$

Число заполнения достигает своего глобального максимума в центральном узле $(2n - 1, n)$; этот максимум равен

$$h_{\max}\left(\tau, \frac{\tau + 1}{2}\right) = \frac{\tau^2 - 1}{4} + 3. \quad (19)$$

В четные моменты виртуального времени $\tau = 2n$ максимальное число заполнения в каждом из узлов $(2n, n - p)$ и $(2n, n + p + 1)$, $p = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, равно

$$h_{\max}(2n, n - p) = h_{\max}(2n, n + p + 1) = \begin{cases} n^2 - p^2 + 3, & n - p \text{ четно,} \\ n^2 - p^2 - 2(p - 1), & n - p \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (20)$$

Число заполнения достигает своего максимума в каждом из центральных узлов $(2n, n)$ и $(2n, n + 1)$; он равен

$$h_{\max}(2n, n) = h_{\max}(2n, n + 1) = \begin{cases} \tau^2/4 + 3, & \tau/2 \text{ четное,} \\ \tau^2/4 + 2, & \tau/2 \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова возьмем наиболее выгодную стабильную конфигурацию, в которой область притяжения данного узла полностью занята. Поскольку детали анализа зависят от четности номера уровня τ , рассмотрим различные случаи по отдельности.

Рассмотрим сначала случай нечетного $\tau = 2n - 1$, $n = 2, 3, \dots$. Тогда область притяжения центрального узла $(2n - 1, n)$ представляет собой квадрат с вершинами в узлах $(1, 1)$, $(n, 1)$, (n, n) и $(2n - 1, n)$ (см. рис. 2). Если лавина уже началась, то полное число частиц в области притяжения равно $n^2 + 1$. Однако не все эти частицы могут попасть в выбранный узел $(2n - 1, n)$, поскольку до момента достижения этого узла лавина должна пройти через $N_{\text{odd}}(2n - 1) = n - 2$ промежуточных уровней с нечетным числом узлов, оставляя по одной частице на каждом из них. Поэтому

$$h_{\max}(2n - 1, n) = n^2 + 1 - (n - 2) = n^2 - n + 3 = \frac{\tau^2 - 1}{4} + 3. \quad (22)$$

Рассмотрим теперь сдвиг на $p = 1, 2, \dots, n - 1$ узлов влево или вправо от центрального узла $(2n - 1, n)$. Такой сдвиг меняет область притяжения из квадрата размера $n \times n$ в прямоугольник размера $(n + p) \times (n - p)$, поэтому число частиц в полностью занятой стабильной конфигурации в области притяжения узлов $(2n - 1, n \pm p)$ уменьшается до $n^2 - p^2$. Интересно отметить, что новая прямоугольная область притяжения содержит $2p + 1$ отрезков (от уровня $n - p$ до уровня $n + p$), на каждом из которых имеется одно и то же число узлов $n - p$. Следовательно, максимально возможное число частиц, переносимых лавиной в узлы $(2n - 1, n \pm p)$, зависит от четности числа $n - p$, равно как и от четности n .

Рис. 3. Распределение максимально возможного нестабильного числа заполнения в узле в момент виртуального времени $\tau = 53$. Так как $(\tau + 1)/2$ нечетно, максимум достигается в трех центральных узлах, хотя и в разных лавинах (см. раздел 4).

Когда $n - p$ четно, все частицы на $2p + 1$ центральных отрезках четной длины могут переноситься лавиной вниз (см. лемму). Исключая начальный и конечный узлы, получим, что останется $2(n - p - 2)$ отрезков неравной длины, половина из которых содержит нечетное число узлов. Таким образом, максимально возможное число частиц, которое может попасть в узлы $(2n - 1, n \pm p)$, равно для четного $n - p$

$$h_{\max}(2n - 1, n \pm p) = n(n - 1) - p(p - 1) + 3. \quad (23)$$

В результате в случае максимального сдвига $p = n - 2$ (p при этом должно быть нечетно), получим, что

$$h_{\max}(2n - 1, 2) = h_{\max}(2n - 1, 2n - 2) = 4n - 3 = 2\tau - 1.$$

Когда $n - p$ нечетно, все лавины оставляют на месте одну из частиц на $2p + 1$ центральных отрезках нечетной длины (см. лемму). Исключая начальный и конечный узлы, увидим, что снова остаются $2(n - p - 2)$ отрезков неодинаковой длины. Однако в промежутке между начальным (или конечным) узлом и центральными $2p + 1$ отрезками нечетной длины встретятся два набора отрезков, каждый из которых начинается и заканчивается отрезком четной длины (первый набор простирается от 2 до $n - p - 1$, а второй — от $n + p + 1$ до 2). Таким образом, останется $n - p - 3$ отрезков нечетной длины, следовательно, максимальное число частиц, которые могут попасть в узлы $(2n - 1, n \pm p)$, равно для нечетного $n - p$

$$h_{\max}(2n - 1, n \pm p) = n(n - 1) - p(p + 1) + 3. \quad (24)$$

Рис. 4. Схематическое изображение лавинообразного процесса, приводящего к максимально нестабильному числу заполнения в центральном узле уровня с четным τ в случае, когда число $\tau/2$ четно. Целые числа возле стрелок указывают число частиц, перенесенных в соответствующем направлении.

Заметим, что при $p = 0$ выражения (23) и (24) дают один и тот же результат (22) для глобального максимума в момент времени $\tau = 2n - 1$ вне зависимости от четности числа n . При нечетных n , подставив $p = 1$ в выражение (23), получим, что все три центральных узла имеют одно и то же максимальное число заполнения $h_{\max}(2n - 1, n \pm 1) = h_{\max}(2n - 1, n)$. Этот случай показан на рис. 3 для $n = 27$.

Рассмотрим теперь случай четных $\tau = 2n$, $n = 2, 3, \dots$. В силу симметрии решетки каждый из двух центральных узлов $(2n, n)$ и $(2n, n + 1)$ имеет одно и то же максимальное число заполнения. Для определенности рассмотрим область притяжения узла $(2n, n + 1)$. Она представляет собой прямоугольник размера $n \times (n + 1)$ с вершинами в узлах $(1, 1)$, $(n, 1)$, $(n + 1, n + 1)$ и $(2n, n + 1)$ (см. рис. 4). Лавина начинается в момент, когда полное число частиц в области притяжения равно $n(n + 1) + 1$. Снова не все из этих частиц смогут достичь конечного узла $(2n, n + 1)$, поскольку на пути к этому узлу лавина должна пройти через $N_{\text{odd}}(2n)$ промежуточных уровней с нечетным числом узлов, оставляя по одной частице на каждом из этих уровней. Особенность теперь состоит в том, что число $N_{\text{odd}}(2n)$ зависит от четности числа n , так как пересечение уровня $n + 1$ с областью притяжения содержит то же число узлов, что и уровень n .

Если n четно, то $N_{\text{odd}}(2n) = n - 2$, и для четного $\tau/2$ мы имеем

$$h_{\max}(2n, n + 1) = n(n + 1) + 1 - (n - 2) = n^2 + 3 = \frac{\tau^2}{4} + 3. \quad (25)$$

Этот случай проиллюстрирован для $\tau = 8$ лавиной, показанной на рис. 4.

Если n нечетно, то $N_{\text{odd}}(2n) = n - 2$, и для нечетного $\tau/2$ мы имеем

$$h_{\max}(2n, n + 1) = n(n + 1) + 1 - (n - 1) = n^2 + 2 = \frac{\tau^2}{4} + 2. \quad (26)$$

Рис. 5. То же схематическое изображение, что и на рис. 4, для уровня с четным τ в случае, когда $\tau/2$ нечетно.

Этот случай проиллюстрирован для $\tau = 6$ лавиной на рис. 5.

Рассмотрим теперь сдвиг на $p = 1, 2, \dots, n-1$ узлов влево от левого центрального узла $(2n, n)$ или вправо от правого центрального узла $(2n, n+1)$. При таком сдвиге область притяжения изменится: вместо прямоугольника размера $n \times (n+1)$ мы имеем прямоугольник размера $(n-p) \times (n+p+1)$. Таким образом, при условии что лавина началась, получим следующее: в полностью заполненной стабильной конфигурации в областях притяжений узлов $(2n, n-p)$ и $(2n, n+p+1)$ находятся $(n-p)(n+p+1)+1$ частиц. Отметим, что между уровнями $n-p$ и $n+p+1$ имеются $2p+2$ отрезка с равным числом узлов $n-p$. Тем самым число отрезков с нечетным числом узлов в области притяжения зависит только от четности числа $n-p$.

Когда $n-p$ четно, все частицы из $2p+2$ центральных отрезков четной длины могут быть перенесены лавиной вниз. Помимо начального и конечного состояний, остаются еще $2(n-p-2)$ промежуточных отрезков с различными длинами, половина из которых содержит нечетное число узлов. Тем самым максимальное число частиц, которые могут занимать узлы $(2n, n-p)$ и $(2n, n+p+1)$ с четной разностью $n-p$, равно

$$(n-p)(n+p+1)+1-(n-p-2)=n^2-p^2+3.$$

Когда $n-p$ нечетно, все лавины обязательно оставляют хотя бы одну частицу на каждом из $2p+2$ центральных отрезков нечетной длины. Исключая начальный и конечный узлы, мы вновь имеем, что остаются $2(n-p-2)$ отрезков неодинаковой длины: $n-p-2$ отрезков с длинами, возрастающими от 2 до $n-p-1$, и $n-p-2$ отрезков с длинами, убывающими от $n-p-1$ до 2. Поскольку каждая из указанных последовательностей отрезков начинается и заканчивается отрезком четной длины, число промежуточных отрезков с нечетным числом узлов равно $n-p-3$. Следовательно, максимальное число частиц, занимающих узлы $(2n, n-p)$ и $(2n, n+p+1)$

с нечетным $n - p$, равно

$$(n - p)(n + p + 1) + 1 - (n - p - 3) - (2p + 2) = n^2 - p^2 - 2(p - 1).$$

Предложение полностью доказано.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Направленные абелевы алгебры, недавно введенные в работе [10], использованы в настоящей работе для изучения направленных лавин, подчиняющихся правилам стохастического опрокидывания на повернутой квадратной решетке. Мы рассмотрели направленные квадратичные алгебры (2), которые в точности соответствуют правилам стохастического опрокидывания для лавин, исследованных аналитически в работах [11], [12]. В рамках различных непрерывных приближений в указанных работах предсказывалось существование согласованного набора критических индексов, что было подвергнуто сомнению в результате обширных компьютерных вычислений, представленных в работе [10].

Мы получили точные выражения (5) для вероятностей всех возможных опрокидываний, в результате которых происходит перенос произвольного числа частиц в узел стационарной конфигурации (см. формулы (3), (4)). Мы также предложили описание (8) эволюции в виртуальном времени направленных лавин на двумерных решетках, из которого в принципе можно вывести вероятностное распределение длительности лавины, однако решение этой задачи при больших временах не представляется возможным.

Нам удалось успешно применить алгебраический подход только к крайним случаям направленных детерминированных лавин (при $\alpha = \beta = 0$ в формуле (2)) и тривиальных стохастических лавин, описывающих простые случайные блуждания двух частиц (при $\alpha, \beta > 0$ и $\gamma = 0$ в формуле (2)). Тем не менее исследование этих случаев прояснило роль каждого конкретного вида опрокидывания в процессе эволюции лавины. Например, процесс, обеспечивающий как разрастание, так и затухание лавины, представляет собой опрокидывание нестабильного состояния, в результате которого нечетное число частиц переходит в каждый из ближайших соседних узлов впереди: если оба этих ближайших узла заняты (свободны), то число частиц в лавине возрастает (уменьшается) на две. С другой стороны, если в каждый из двух ближайших узлов в направлении вперед переносится четное число частиц, то имеет место разветвление лавины без потери или наращивания количества частиц в ней.

В общем случае мы нашли точные выражения для таких важных характеристик модели, как максимально возможные значения тока в каждый нечетный и четный момент времени (см. формулу (10)) и чисел заполнений (“высот”) всех узлов в каждый момент времени (см. предложение 2). В полученных ответах для максимального тока обнаруживается квадратичный рост с увеличением времени τ с ведущим асимптотическим членом $I_{\max}(\tau) \propto \tau^2/2$. Ведущий асимптотический член для максимальной возможной высоты узла также квадратичен по времени, $I_{\max}(\tau) \propto \tau^2/4$, при фиксированном конечном расстоянии от центрального узла (центральных узлов), в то время как при конечном расстоянии $d \geq 1$ от замкнутой границы это поведение заменяется на линейное $h_{\max}(\tau) \propto d\tau$ для четных d и $h_{\max}(\tau) \propto (d - 1)\tau$ для нечетных d . Данные законы асимптотического поведения находят простое эвристическое объяснение в терминах числа частиц, перенесенных в соответствующие области узлов.

Заметим, что максимумы локальных высот неограничены, следовательно, в общем случае они не достигаются одновременно в каждой конкретной лавине. Максимальная высота (число заполнения) узла в данный момент виртуального времени τ достигается в некоторой лавине, которая опустошает до максимально возможной степени область притяжения данного узла и направляет весь поток частиц в этот узел. В результате в таких специальных лавинах во все прочие узлы в момент времени τ не поступает ни одной частицы, а потому эти узлы остаются стабильными. Вычисленные экстремальные значения были получены при условии полной заполненности стабильной конфигурации соответствующей области решетки, вероятность существования такой конфигурации с ростом времени τ стремится к нулю как $2^{-\tau^2/2}$ для максимального тока и как $2^{-\tau^2/4}$ для максимальной высоты. Статистический вес таких событий существенно зависит от пока еще не решенной задачи нахождения вероятности всех возможных лавин, при которых реализуются указанные значения.

Что касается временной зависимости средней ширины фронта лавины $w_{av}(\tau)$ и среднего числа заполнения узла $h_{av}(\tau)$, усредненных по стационарному состоянию системы, существующие теории [11], [12], равно как и картина простых случайных блужданий [13] и компьютерные вычисления [8], [9], согласуются с законами масштабирования $w_{av}(\tau) \propto \tau^{1/2}$ и $h_{av}(\tau) \propto \tau^{1/4}$. Эти предсказания, очевидно, могут быть справедливы только на этапе нарастания мощности лавины.

Благодарности. Авторы глубоко признательны Совместному проекту ОИЯИ–Болгария за поддержку.

Список литературы

- [1] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.*, **59**:4 (1987), 381–384.
- [2] D. Dhar, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:14 (1990), 1613–1616.
- [3] V. B. Priezzhev, D. V. Kitarev, E. V. Ivashkevich, *Phys. Rev. Lett.*, **76**:12 (1996), 2093–2096.
- [4] E. V. Ivashkevich, V. B. Priezzhev, *Physica A*, **254**:1–2 (1998), 97–116, arXiv: cond-mat/9801182.
- [5] D. Dhar, *Physica A*, **263**:1–4 (1999), 4–25, arXiv: cond-mat/9808047.
- [6] D. Dhar, R. Ramaswamy, *Phys. Rev. Lett.*, **63**:16 (1989), 1659–1662.
- [7] S. S. Manna, *J. Phys. A*, **24**:7 (1991), L363–L369.
- [8] R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, *J. Phys. A*, **33**:3 (2000), L33–L39, arXiv: cond-mat/9907307; *Phys. Rev. E*, **62**:5 (2000), 6195–6205, arXiv: cond-mat/0007131.
- [9] A. Vazquez, *Numerical simulations of directed sandpile models*, arXiv: cond-mat/0003420.
- [10] F. C. Alcaraz, V. Rittenberg, *Phys. Rev. E*, **78**:4 (2008), 041126, 13 pp.
- [11] M. Paczuski, K. Bassler, *Phys. Rev. E*, **62**:4 (2000), 5347–5352, arXiv: cond-mat/0005340.
- [12] M. Kloster, S. Maslov, C. Tang, *Phys. Rev. E*, **63**:2 (2001), 026111, 4 pp., arXiv: cond-mat/0005528.
- [13] N. Zh. Bunzarova, *Phys. Rev. E*, **82**:3 (2008), 031116, 14 pp.

Поступила в редакцию 15.02.2011