Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Бабатин, Динамика оболочки в присутствии центрального тела, *ТМФ*, 2011, том 169, номер 3, 463–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:54:29

© 2011 г.

М. М. Бабатин*

ДИНАМИКА ОБОЛОЧКИ В ПРИСУТСТВИИ ЦЕНТРАЛЬНОГО ТЕЛА

На основе теории поверхностных слоев в рамках общей теории относительности построена идеализированная сферически-симметричная релятивистская модель взрывающегося объекта. Решение Вайды для радиально излучающей звезды сшивается на тонкой сферической оболочке с другим решением Вайды. Порождаемые условиями сшивки уравнения, описывающие движение оболочки и плотность излучения для решения Вайды, сведены к системе первого порядка; также дан общий анализ характеристик движения. Для нахождения уравнения движения сферически-симметричной излучающей оболочки в центральном гравитационном потенциале используется постньютоновское приближение.

Ключевые слова: теория гравитации, общая теория относительности, динамика оболочки, ударные волны.

1. ВВЕДЕНИЕ

С периодически испускаемым излучением, исходящим от коллапсирующих компактных объектов, связано несколько очень интересных и недостаточно хорошо понятых астрофизических сценариев. Примерами наиболее общих представителей этого класса объектов являются пульсары, гамма-барстеры и рентгеновские барстеры. Недавно сообщалось, что быстрое изменение яркости остатков молодых сверхновых, как правило, объясняемое их вращением, может быть также объяснено радиальными колебаниями компактного объекта [1]. В работе [2] гамма-барстеры описаны как объекты, которые преобразуют часть своей гравитационной энергии в гамма-излучение посредством колебаний поверхности нейтронной звезды. Кроме того, рентгеновские барстеры можно описать с помощью флуктуаций энергии двойной звездной системы, сопровождаемых термомеханическими колебаниями [3], [4]. Рентгеновские барстеры излучают чрезвычайно большое количество энергии, в основном в виде рентгеновских лучей, достигая своей максимальной яркости за миллисекунды [5]. Обычно предполагается, что такие вспышки связаны с нейтронными звездами, белыми карликами или черными дырами, которые являются двойными системами и получают вещество от своих нормальных партнеров, формируя аккреционный диск вокруг них; позже это вещество осаждается на поверхность звезды (если это нейтронная звезда или белый карлик).

*Department of Mathematics, College of Science, Al-Imam Muhammed Ibn Saud Islamic University, Kingdom of Saudi Arabia. E-mail: mmbabatin@imamu.edu.sa

Гравитационный коллапс является одним из примеров возможных экстремальных физических условий, при которых формируются черные дыры. Ясно, что изучение внешнего гравитационного поля центрального тела с излучающей сферической пылевой оболочкой представляет большой интерес с физической точки зрения, поскольку эта теория может стать идеализированной моделью всплесков на стадии, когда оболочка уже сформировалась и отделилась от коллапсирующего ядра. Динамика тонкой сферически-симметричной пылевой оболочки, движущейся в гравитационном поле центрального тела, изучена в работах [6], [7].

Целью настоящей работы является построение решений уравнений поля Эйнштейна путем сшивки двух решений Вайды на тонкой оболочке излучающего вещества. Статья организована следующим образом. В разделе 2 дано краткое изложение полезных результатов теории поверхностных слоев в рамках общей теории относительности. В разделе 3, используя метрику Вайды как внутри, так и снаружи оболочки, мы получаем систему уравнений движения и редуцируем ее к системе первого порядка, а также приводим анализ основных характеристик движения в постньютоновском приближении. Выводы представлены в разделе 4.

2. ФОРМАЛИЗМ

В общем случае времениподобная гиперповерхность Σ , которая разделяет риманово пространство-время M на две области $M^\pm$, представляет эволюцию тонкой сферической оболочки вещества. В областях $M^\pm$ введены взаимно независимые системы координат $x_\pm^\alpha$. Гиперповерхность Σ представляет собой границу обеих областей $M^\pm$, следовательно, внутренняя геометрия поверхности Σ , индуцированная метриками обеих областей $M^\pm$, должна быть одной и той же.

Предположим, что поверхность Σ параметризована внутренними координатами ξ^a , $x_\pm^\alpha = x_\pm^\alpha(\xi^a)$. Греческими буквами здесь и далее обозначены четырехмерные индексы, а латинскими – трехмерные индексы на Σ . Сигнатура метрики полагается равной $+2$, а ньютоновская гравитационная константа и скорость света равны единице. Базисные векторы $e_a = \partial/\partial\xi^a$, касательные к Σ , имеют компоненты $e_{a,\pm}^\alpha = \partial x_\pm^\alpha / \partial \xi^a$ относительно двух четырехмерных систем координат в областях $M^\pm$. Их скалярные произведения порождают индуцированную метрику $g_{ab}^\pm = g_{\mu\nu}^\pm e_{a,\pm}^\mu e_{b,\pm}^\nu$ на гиперповерхности Σ . Метрики, индуцированные метриками обеих областей $M^\pm$, должны быть тождественны, $g_{ab}^+(\xi) = g_{ab}^-(\xi) \equiv g_{ab}(\xi)$. Это условие не зависит от систем координат, выбранных в областях $M^\pm$. Единичный вектор n , нормальный к поверхности Σ , $(n_\alpha n^\alpha)_\pm = 1$, направлен наружу областей M^- и M^+ . Искривление поверхности Σ в пространствах $M^\pm$ характеризуется трехмерным внешним тензором кривизны

$$K_{ab}^\pm = -n_a^\pm \frac{De_{a,\pm}^\alpha}{\partial \xi^b} = e_{a\alpha,\pm} \frac{Dn^{\alpha,\pm}}{\partial \xi^b},$$

где $D/\partial \xi^b$ означает абсолютную производную по ξ^b . Тензор энергии-импульса t_{ab} на поверхности определяется скачком $[K_{ab}] = K_{ab}^+ - K_{ab}^-$, где квадратные скобки означают разность между значениями величины, вычисленными на внешней стороне (индекс $+$) и внутренней стороне (индекс $-$) гиперповерхности. Гиперповерхность Σ (сингулярная гиперповерхность первого порядка) описывает динамику поверхностного слоя, если $K_{ab}^+ \neq K_{ab}^-$.

Связь между внешней кривизной $K_{ab}^{\pm}$ и трехмерным внутренним тензором энергии-импульса $t_{ab} = t_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}$ определяется уравнением Эйнштейна, которое приобретает вид уравнения Ланкцоца

$$[K_{ab}] = -8\pi \left(t_{ab} - \frac{1}{2} t g_{ab} \right), \quad t = t_a^a.$$

Мы можем написать эту связь в виде

$$t_{ab} = -\frac{1}{8\pi} ([K_{ab}] - g_{ab}[K]),$$

где $[K] = g^{ab}[K_{ab}]$ представляет собой след внешней кривизны, таким образом, мы имеем уравнения поля для оболочки.

3. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Многообразия $M^{\pm}$, соответствующие внешней и внутренней сторонам оболочки, представлены решениями Вайды, задающими гравитационное поле радиально излучающего невращающегося тела с метрикой вида

$$ds_{\pm}^2 = -\left(1 - \frac{2m_{\pm}(\alpha)}{r}\right) d\alpha_{\pm}^2 + 2 d\alpha_{\pm} dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

где α – координатное время, $m_{\pm}$ – гравитационные массы снаружи и внутри оболочки. Пусть τ – собственное время вдоль участка линии с постоянными угловыми координатами на поверхности Σ . Площадь оболочки в момент τ равна $4\pi r^2$. Радиальные координаты r непрерывны при переходе через Σ в отличие от временных координат. Пусть уравнение поверхности Σ имеет вид $r_{\pm} = R_{\pm}(\tau)$ на обоих многообразиях [8] (динамика оболочки); таким образом, функция $R(\tau)$ описывает эволюцию оболочки во времени.

Касательный вектор линии тока на поверхностях $\Sigma^{\pm}$ задан уравнением

$$U = \dot{R} \frac{\partial}{\partial r} + X^{\pm} \frac{\partial}{\partial \alpha_{\pm}}, \quad X^{\pm} = \frac{d\alpha_{\pm}}{d\tau},$$

где точка означает производную по τ . Единичный нормальный вектор имеет вид $N = N^r \partial/\partial r + N^{\alpha\pm} \partial/\partial \alpha_{\pm}$. Для радиально излучающего объекта, учитывая условия ортонормированности $U \cdot U = -1$, $N \cdot N = 1$, $N \cdot U = 0$ и вспоминая, что $N_r > 0$, имеем $N_r = -X$ и $N_{\alpha} = \dot{R}$, где $X < 0$. Для внешней кривизны в областях $M^{\pm}$ получим

$$K_{\tau\tau}^{+} = \frac{1}{B} \left(\frac{m_{+}}{R^2} + \frac{X^{+} \dot{m}_{+}}{R} + \ddot{R} \right), \quad K_{\theta\theta}^{+} = -RB, \quad K_{\phi\phi}^{+} = K_{\theta\theta}^{+} \sin^2 \theta, \quad (1)$$

$$K_{\tau\tau}^{-} = \frac{1}{A} \left(\frac{m_{-}}{R^2} + \frac{X^{-} \dot{m}_{-}}{R} + \ddot{R} \right), \quad K_{\theta\theta}^{-} = -RA, \quad K_{\phi\phi}^{-} = K_{\theta\theta}^{-} \sin^2 \theta, \quad (2)$$

где $A = \sqrt{1 + \dot{R}^2 - 2m_{-}/R}$, $B = \sqrt{1 + \dot{R}^2 - 2m_{+}/R}$. Условия сшивки областей $M^{\pm}$ на поверхности Σ приводят к соотношениям

$$R(A - B) = m_0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{B} \left(\ddot{R} + \frac{m_{+}}{R^2} + \frac{L_R^{+}}{R} \right) - \frac{1}{A} \left(\ddot{R} + \frac{m_{-}}{R^2} + \frac{L_R^{-}}{R} \right) = 4\pi(\eta + 2P), \quad (4)$$

где $m_0 = 4\pi\eta R^2$ – масса поверхности оболочки, η и P – плотность энергии и давление на поверхности, $L_R^\pm$ – яркость оболочки. Пусть

$$\begin{aligned} X^+ &= \frac{d\alpha_+}{d\tau} = -(\dot{R} + B)^{-1}, & L_R^+ &= \dot{m}_+ X^+, \\ X^- &= \frac{d\alpha_-}{d\tau} = -(\dot{R} + A)^{-1}, & L_R^- &= \dot{m}_- X^-. \end{aligned} \quad (5)$$

Исключая η из (3), (4) получим

$$\ddot{R} = -\frac{m_-}{R^2} - \frac{Am_0}{2R^2} + \frac{1}{m_0}(BL_R^- - AL_R^+) + \frac{8\pi}{m_0}PABR. \quad (6)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$2R\ddot{R} = -\frac{2m_-}{R} - A(A - B) + \frac{2}{A - B}(BL_R^- - AL_R^+) + \frac{4}{\eta}ABP,$$

из которого следует, что $\ddot{R} < 0$. Движение оболочки можно интерпретировать как замедляющееся расширение или ускоряющееся сжатие. Случай $m_- = 0$, $m_+ = \text{const}$ детально изучался в работах [8] и [9].

Первый член в правой части уравнения (6) представляет собой ньютоновское ускорение оболочки, обусловленное центральным телом (силой взаимодействия оболочки со сферически-концентрическим телом массы m_-), второй член соответствует собственной гравитации оболочки, третий член представляет собой импульс, который передается оболочке излучением, испускаемым самой оболочкой в единицу времени, а четвертый член – это импульс, передаваемый оболочке излучением, испускаемым центральным телом в единицу времени; последний член описывает динамический эффект давления на движение оболочки, который порождает положительное (отталкивающее) ускорение.

3.1. Общая характеристика движения.

3.1.1. Уравнения движения как система первого порядка. Пусть функция $a(\tau)$ определена формулой

$$a(\tau) = \frac{\hat{m}(\tau)}{m_0(\tau)}, \quad (7)$$

где $\hat{m} = m_+ - m_-$ обозначает гравитационную массу оболочки, а m_0 – полную массу оболочки. Если ввести энергию связи оболочки в виде $m_0 - \hat{m}$, то $a(\tau)$ можно интерпретировать как параметр энергии связи (зависящий от времени); если $a(\tau) > 1$ ($a(\tau) < 1$), то оболочка обладает положительной (отрицательной) энергией связи. Из уравнений (2), (3) и (7) получим

$$A = a + \frac{\hat{m}}{2aR}, \quad (8)$$

$$B = a - \frac{\hat{m}}{2aR}. \quad (9)$$

Используя производные по τ уравнений (3) и (8), можно представить уравнение движения оболочки в следующей форме:

$$R(A - B) = \frac{\hat{m}}{a}, \quad (10)$$

$$\hat{m}\dot{a} = \dot{\hat{m}}a + a^2\dot{L} = a\dot{\hat{m}} - a^2\dot{m}_0, \quad (11)$$

где $L = L_R^+ - L_R^- = \dot{m}_+ X^+ - \dot{m}_- X^-$. Тогда

$$\hat{m}\dot{a} = \dot{\hat{m}}a \left(1 + \frac{a\dot{m}_+ X^+}{\dot{\hat{m}}} \right) - a\dot{m}_- X^-.$$

Уравнения (10), (11) представляют собой два соотношения между тремя неизвестными $\hat{m}$, a и R . Используя уравнения (7), (11), получим

$$\dot{m}_0 = \begin{cases} \dot{m}_- X^- - \dot{m}_+ X^+, & P = 0, \\ L_R^- - L_R^+ - P d(4\pi R^2)/d\tau, & P \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение (10), используя уравнения (2) и (8), в следующем виде:

$$\dot{R}^2 + V = a^2 - 1, \quad (12)$$

где

$$V = -\frac{\hat{m}^2}{4a^2 R^2} - \frac{m_+ + m_-}{R} \quad (13)$$

– эффективный потенциал. Уравнение (12) представляет собой первый интеграл для неизвестной функции $R(\tau)$. На основании уравнений (12), (13) можно ожидать, что оболочка может расширяться до бесконечности, только если $a \leq 0$ (неотрицательная энергия связи). Подставляя уравнения (5), (9) в (11), получим

$$\hat{m}\dot{a}(2aR\dot{R} + 2a^2R - \hat{m}) = \dot{\hat{m}}a(2aR\dot{R} - \hat{m}) - \frac{4a^3 R \hat{m} \dot{m}_-}{2aR\dot{R} + 2a^2R + \hat{m}}. \quad (14)$$

Уравнения (12), (14) вместе с условиями $a \geq 0$, $2a^2R \geq \hat{m} > 0$ порождают окончательную (неполную) систему уравнений, описывающую динамику излучающей оболочки. Уравнение (12) представляет собой зависящее от времени энергетическое уравнение, а уравнение (14) является дифференциальным условием, которому должны удовлетворять неизвестные величины $\hat{m}$, a и R .

Можно получить простую неизлучающую модель оболочки, коллапсирующей (или расширяющейся) под воздействием собственного веса в поле сферически-симметричного центрального тела с гравитационной массой m_- , если положить $\dot{m}_+ = 0$ и $\dot{m}_0 = 0$. Тогда параметр связи $a = \text{const}$. Максимальное значение радиуса оболочки $R_{\max}$, при котором $\dot{R} = 0$ (точка поворота), определяется формулой

$$\frac{R_{\max}}{m_+} = \frac{1}{2a(1-a^2)} (a(1 \pm \delta) \mp \sqrt{4\delta a^2 + (1-\delta)}),$$

где $\delta = m_-/m_+$. Пылевая оболочка в поле сферически-симметричного центрального тела не может всегда оставаться погруженной в сферу Шварцшильда. Это утверждение является обобщением результата, полученного в работе [8] для случая $\delta = 0$.

3.1.2. Смещение по частоте и яркость. Получим излучение, испущенное с поверхности оболочки на характерной частоте $\omega_e = -X^+$, в бесконечно удаленной точке пространства на частоте $\omega_r = -X^-$. Имеем

$$\frac{\omega_e}{\omega_r} = \frac{X^+}{X^-} = \frac{\dot{R} + A}{\dot{R} + B} \equiv \frac{d\alpha_{\pm}}{d\tau}.$$

Сдвиг по длине волны равен $\lambda_r - \lambda_e = \lambda_e(\dot{\alpha}_{\pm} - 1)$. Полная энергия, излученная оболочкой во всех направлениях в единицу времени (яркость системы), падающая

на оболочку (L_R^-), или испущенная из нее (L_R^+), имеет вид

$$L_R^\pm = \dot{m}_\pm X^\pm, \quad (15)$$

где $\dot{m}_\pm = m_\pm X^\pm$. Уравнения (2), (9) показывают, что $2aR\dot{R} + 2a^2R - \hat{m} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow 2m_+$. Следовательно, считая, что $\hat{m}$, a и R регулярны в этом пределе и $a \neq 0$, из уравнения (14) получим $\dot{m}_+ \rightarrow 0$. Оболочка перестает излучать при достижении радиуса Шварцшильда (при $m_- = \text{const}$). Спектральные линии приобретают фиолетовое смещение, если $\dot{R} > m_+/R$, или красное смещение, если $\dot{R} < m_+/R$; они всегда смещены в красную сторону при $\dot{R} < 0$.

3.1.3. Частная модель. Система уравнений (12), (14) не полна. Для нахождения явного решения необходимо выбрать некоторое уравнение связи для неизвестных функций. Выбор связи определяется требованием устранить из уравнений движения сингулярности, которые возникают, если считать, что $\dot{a} \neq 0$ при $2aR\dot{R} = \hat{m}$, полагая, что $\hat{m}$, a и R отличны от нуля. Поэтому

$$\dot{a} = -k(2aR\dot{R} - \hat{m}), \quad k = \text{const}. \quad (16)$$

Тогда уравнения (12), (14) можно переписать в виде

$$\dot{R}^2 = a^2 - 1 + \frac{\hat{m}^2}{4a^2R^2} + \frac{\hat{m} + 2m_-}{R}, \quad (17)$$

$$\dot{\hat{m}} = -\frac{k\hat{m}}{a}(2aR\dot{R} + 2a^2R - \hat{m}) - \frac{4a^2kR\hat{m}\dot{m}_-}{\dot{a}(2aR\dot{R} + 2a^2R + \hat{m})}. \quad (18)$$

Система уравнений первого порядка (16)–(18) описывает движение излучающей оболочки в симплексной релятивистской модели взрывающегося объекта. Система перестает излучать при $k = 0$ ($a, m_\pm = \text{const}$). Из уравнений (15), (17), (18) получим новую систему уравнений

$$\dot{R}^2 = \left(a + \frac{\hat{m}}{2aR}\right)^2 + \frac{2m_-}{R} - 1, \quad (19)$$

$$\hat{m} = \frac{2aR\dot{m}_+}{L_R^+} + 2aR\dot{R} + 2a^2R, \quad (20)$$

$$\dot{a} = -L_R^+ \left(\frac{2aR\dot{R} - \hat{m}}{2R\hat{m}} \right) \left(1 - \frac{\dot{m}_-}{\dot{m}_+} (1 + H) \right), \quad (21)$$

где

$$H = \frac{4a^2R\hat{m}}{(2aR\dot{R} + 2a^2R + \hat{m})(2aR\dot{R} - \hat{m})}.$$

Эта система представляет собой три уравнения на три неизвестные функции $\hat{m}(\tau)$, $a(\tau)$ и $R(\tau)$. Из уравнений (19) и (20) получим

$$L_R^+ = \left(\frac{\hat{m}\dot{a} - a\dot{m}_+}{a^2} \right) H_1,$$

где

$$H_1 = \frac{\dot{m}_+(2aR\dot{R} + 2a^2R + \hat{m})}{\dot{m}_+(2aR\dot{R} + 2a^2R + \hat{m}) + \dot{m}_-(2aR\dot{R} + \hat{m} + 2R\dot{R}^2 - \hat{m}^2/2a^2R)}.$$

Перепишем систему следующим образом:

$$a = -\frac{m_0}{2R} \pm \sqrt{1 + \dot{R}^2 - \frac{2m_-}{R}}, \quad (22)$$

$$L_R^+ = -\left(\frac{\dot{m}_0 a + \dot{m}_-}{a}\right) H_1, \quad (23)$$

$$\dot{a} = \left(\frac{\dot{m}_0 a + \dot{m}_-}{a}\right) \left(\frac{\dot{R}}{m_0} - \frac{1}{2R}\right) Z, \quad (24)$$

где

$$Z = \left(1 - \frac{\dot{m}_- + \dot{m}_- H}{\dot{m}_+}\right) H_1.$$

Вычисляя производную уравнения (22) и используя уравнения (21), (23), получим

$$\frac{\dot{R}\ddot{R} + m_- \dot{R}/R^2 - \dot{m}_-/R}{\sqrt{1 + \dot{R}^2 - 2m_-/R}} = \frac{\dot{m}_0}{2R} - \frac{m_0 \dot{R}}{2R^2} - L_R^+ \left(\frac{\dot{R}}{m_0} - \frac{1}{2R}\right) (2aR\dot{R} - \hat{m}) Z_1, \quad (25)$$

где

$$Z_1 = \left(\frac{1}{2aR\dot{R} - \hat{m}}\right) \left(1 - \frac{\dot{m}_- + \dot{m}_- H}{\dot{m}_+}\right).$$

Если $m_- = \text{const}$ и $\dot{m}_0 = -L_R^+$, то уравнение (25) можно записать в следующей классической форме:

$$\frac{\ddot{R} + m_-/R^2}{\sqrt{1 + \dot{R}^2 - 2m_-/R}} = -\frac{m_0}{2R^2} - \frac{L_R^+}{m_0}.$$

Это уравнение при $m_0 \equiv \hat{m}$ показывает, что испускание излучения порождает силу, направленную к центру, которая пытается притормозить изначальное расширение.

3.2. Постньютоновское уравнение движения. Поскольку все частицы оболочки движутся радиально и $ds^2 = d\tau^2$ (далее под α мы подразумеваем α_-), имеем

$$\left(\frac{d\tau}{d\alpha}\right)^2 = 1 - \frac{2m_-(\alpha)}{R} - \frac{u^2}{1 - 2m_-/R}, \quad (26)$$

где $u = dR/d\alpha$ – обычная скорость частиц оболочки. Так как $\dot{R} = dR/d\tau$,

$$\left(\frac{d\tau}{d\alpha}\right)^2 = \frac{(1 - 2m_-/R)^2}{1 - 2m_-/R + \dot{R}^2}.$$

Производная абсолютной скорости по координатному времени в уравнении (6) при $P = 0$ равна

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{f^3}{A^3} \tilde{F} - \frac{m_-}{R^2} \left(\frac{f^2 - 3u^2}{f}\right) + \frac{\dot{m}_- u}{R f^2} \left(\frac{d\tau}{d\alpha}\right)^3 \left(1 - \frac{2A^2}{f}\right), \quad (27)$$

где

$$f = 1 - \frac{2m_-}{R}, \quad \tilde{F} = -\frac{m_0}{2R^2} - \frac{L}{Am_0}, \quad L \equiv AL_R^+ - BL_R^-.$$

Уравнение (3) можно написать в виде

$$m_0 = R(A - B) \cong R \left[1 + \frac{1}{2} \left(\dot{R}^2 - \frac{2m_-}{R} \right) - 1 - \frac{1}{2} \left(\dot{R}^2 - \frac{2m_+}{R} \right) \right] = \hat{m}.$$

Гравитационная масса близка к собственной массе, и это согласуется с тем, что рассматриваемое приближение является ньютоновским. Разлагая уравнение (27) до порядка $\bar{u}^4/F$ (мы используем черту для обозначения постньютоновских величин), получим

$$\frac{du}{d\alpha} = -\frac{m_-}{R^2} + \frac{2m_-^2}{R^3} + 3u^2 \frac{m_-}{R^2} + \tilde{F} \left(\frac{d\tau}{d\alpha} \right)^3 + \dot{m}_- \left(\frac{d\tau}{d\alpha} \right) \left(-\frac{u}{R} - \frac{2m_- u}{R^2} \right). \quad (28)$$

Нужно найти потенциалы Φ , Ψ и $\bar{\xi}$ обычного постньютоновского приближения, а также вычислить абсолютную силу f^μ при радиальном движении. В общем случае потенциалы Φ , Ψ и $\bar{\xi}$ записываются как

$$\begin{aligned} \Phi(t, \bar{x}) &= -G \int d^3 \bar{x}' \frac{T^{(0)00}(t, \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|}, \\ \Psi(t, \bar{x}) &= - \int d^3 \bar{x}' \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + G T^{(2)00} + G T^{(2)il} \right), \\ \bar{\xi}_i(t, \bar{x}) &= -hG \int d^3 \bar{x}' \frac{T^{(1)i0}(t, \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|}, \end{aligned}$$

где G – постоянная Ньютона и $T^{(n)}$ – n -й порядок разложения тензора энергии-импульса [10]. Потенциал Φ имеет простой вид: $\Phi = -m_-/R$. Два других потенциала можно вычислить косвенным образом.

В общем случае мы имеем следующее соотношение четвертого порядка между собственным и координатным временем:

$$\left(\frac{d\tau^{(4)}}{d\alpha} \right)^2 = 1 + (2\Phi - \bar{u}^2) + 2(\Phi^2 + \Psi - \bar{\xi} \cdot \bar{u} + \Phi \bar{u}^2). \quad (29)$$

Разлагая уравнение (26) до порядка $\bar{u}^4$, получаем

$$\left(\frac{d\tau^{(4)}}{d\alpha} \right)^2 = 1 - \frac{2m_-(\alpha)}{R} - \bar{u}^2 - \frac{2m_-(\alpha)}{R} \bar{u}^2.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (29) найдем, что $\Phi^2 + \Psi - \bar{\xi} \cdot \bar{u} = 0$. Рассмотрим вращающееся сферически-симметричное тело, которое имеет угловую скорость ω в покоящейся системе отсчета. Тогда

$$\xi(t, x) = \frac{2G}{R^3} (x \times J),$$

где $\bar{J}$ – угловой момент. В этом случае $\bar{J} = 0$ и $\bar{\xi} = 0$. Тогда, $\Psi = -\Phi^2 = -(m_-/R)^2$. Следовательно, уравнение движения с точностью до четвертого порядка имеет следующий вид:

$$\frac{d\bar{u}}{d\alpha} = -\frac{m_-}{R^2} + \frac{2m_-^2}{R^3} + 3u^2 \frac{m_-}{R^2} + \left\{ \left(\frac{d\tau}{d\alpha} \right)^2 \left(\frac{f^R - f^0 \bar{u}}{m} \right) \right\}^{(4)} + Q \dot{m}_-, \quad (30)$$

причем

$$Q = \left\{ \left(\frac{d\tau}{d\alpha} \right) \left(-\frac{\bar{u}}{R} - \frac{2m_- \bar{u}}{R^2} \right) \right\}^{(4)},$$

где f^R , f^0 и m – абсолютная радиальная сила, временная компонента абсолютной силы и масса покоя небольшого участка оболочки соответственно. Из уравнений (28) и (30) имеем уравнение для небольшого участка оболочки:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\alpha} = -\frac{m_-}{R^2} + \frac{2m_-^2}{R^3} + 3u^2 \frac{m_-}{R^2} + \left\{ \left(\frac{d\tau}{d\alpha} \right)^2 \left(\frac{d\tau}{d\alpha} \frac{F_c^R}{m} \right) \right\}^{(4)} + Q\dot{m}_-, \quad (31)$$

где

$$F_c^R \equiv m\tilde{F} = -\frac{m\hat{m}}{2R^2} - \frac{L}{A}$$

– обычная классическая радиальная сила, в которой первый член представляет собой силу собственного тяготения оболочки, а второй – внешние и внутренние радиационные силы. Следовательно, уравнение (31) совпадает с уравнением (28).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поводом к написанию настоящей работы послужила необходимость объяснить замедление ударной волны, движущейся от поверхности звезды или вблизи черной дыры к внешней атмосфере. Посредством сшивки одного решения Вайды с другим решением на тонкой сферической оболочке, состоящей из радиально излучающего вещества, мы нашли решение уравнений поля Эйнштейна, которое, возможно, представляет интерес для астрофизиков. Мы получили общее уравнение движения и свели определяющуюся условиями сшивки (неполную) систему уравнений движения и плотности излучения для решения Вайды к системе уравнений первого порядка. Мы также представили общий анализ характеристик движения. Указанная система уравнений движения становится полной после добавления уравнения связи между неизвестными величинами, которое позволяет простейшим способом избежать нефизических сингулярностей в процессе движения. Для построения уравнения движения сферически-симметричной излучающей оболочки в центральном гравитационном потенциале используется постньютоновское приближение. Уравнение (6) при $P = 0$ имеет две сингулярные точки, в одной из которых оболочка осциллирует, а в другой – коллапсирует.

Список литературы

- [1] M. A. Abramowicz, *GRG Workshop on relativistic astrophysics*, Preprint SISSA, № 130A, 1989.
- [2] J. M. Hameury, J. P. Lasota, *AIP Conf. Proc.*, **141** (1986), 164–203.
- [3] R. Aquilano, M. Castagnino, L. Lara, *Astrophys. Space Sci.*, **138**:1 (1987), 41–48.
- [4] R. O. Aquilano, *Astrophys. Space Sci.*, **226**:2 (1995), 173–186; R. Aquilano, W. Barreto, L. A. Núñez, *Astrophys. Space Sci.*, **225**:2 (1995), 167–181.
- [5] J. Gallagher, S. Starrfield, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **16** (1978), 171–214.
- [6] V. H. Hamity, R. J. Gleiser, *Astrophys. Space Sci.*, **58**:2 (1978), 353–364.
- [7] M. Castagnino, N. Umerez, *Gen. Relativity Gravitation*, **15**:7 (1983), 625–634.
- [8] W. Israel, *Nuovo Cimento B*, **44**:1 (1966), 1–14.
- [9] A. Papapetrou, A. Hamoui, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A*, **9**:2 (1968), 179–211.
- [10] S. Weinberg, *Gravitational and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York, 1972.

Поступила в редакцию 23.11.2010,
после доработки 13.04.2011