Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Владимиров, О масштабно-инвариантной асимптотике (автомодельности) в квантовой теории поля, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 1, 118–121

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6750>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:37:44

© 2012 г.

В. С. Владимиров*

О МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНОЙ АСИМПТОТИКЕ (АВТОМОДЕЛЬНОСТИ) В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Подводится итог 40-летним исследованиям масштабнo-инвариантного (авто-модельного) поведения формфактора, наблюдаемого в адрон-лептонных глубоко-конеупругих процессах рассеяния при высоких энергиях и больших переданных импульсах, в рамках аксиоматики Боголюбова квантовой теории поля. Этот подход способствовал возникновению нового понятия – цвета кварков – в квантовой хромодинاميке.

Ключевые слова: масштабная инвариантность, автомодельность, цвет.

Вот уже больше года с нами нет нашего друга и коллеги Альберта Никифоровича Тавхелидзе. Всем нам, науке России и Грузии остались научные труды и мысли, созданные им институты, кафедры, отделы и лаборатории, добрые и полезные дела Альберта Никифоровича. Я знал его с середины 50-х гг. прошлого века, когда он приехал из Грузии в Москву, в школу Н. Н. Боголюбова, продолжать образование в области теоретической физики. Чтобы преодолеть недостаточную подготовку, он много работал, посещал различные семинары в Москве (МИАН, МГУ) и в Дубне (ОИЯИ), проявлял завидную любознательность к новым направлениям в теоретической физике, в особенности к бурно развивавшейся в то время квантовой теории поля (КТП).

Совместно с Н. Н. Боголюбовым и А. Н. Тавхелидзе мне довелось участвовать в чисто математической работе по масштабнo-инвариантному (автомодельному) поведению, наблюдаемому в адрон-лептонных глубококонеупругих (и родственных) процессах рассеяния при высоких энергиях и больших переданных импульсах в рамках аксиоматики Боголюбова КТП [1].

Для определенности рассматривается глубококонеупругий процесс рассеяния электронов на нуклонах

$$e + N \rightarrow e + \dots$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: vladim@mi.ras.ru

Асимптотика формфакторов $W_{\mu\nu}(q, p)$ – преобразование Фурье коммутатора токов – рассматривается в бёркеновской области

$$|q^2| \rightarrow \infty, \quad \nu = 2pq \rightarrow \infty, \quad \xi = -\frac{q^2}{2pq} = \text{const}, \quad (1)$$

где $|q^2|$ – энергия и ν – переданный импульс. Исследуется также асимптотическое поведение коммутатора токов в окрестности светового конуса $x^2 = 0$.

Формфакторы выражаются через инвариантные функции $F_{1,2}(q, p)$ и $W_{1,2}(q, p)$, которые в лабораторной системе $p = (1, 0)$ принимают вид $F_{1,2}(q)$ и $W_{1,2}(q)$. Формфакторы $F(q)$ и $W(q)$ (индексы опускаем) принадлежат к классу причинных функций и обладают следующими свойствами:

- 1) $F(q) = F(-q)$,
- 2) $F(q) = 0$, если $-q^2/|2q^0| > 1$,
- 3) $\tilde{F}(x) = 0$, если $x^2 < 0$,
- 4) $F(q) = F(q^0, |q|)$,
- 5) $\epsilon(q^0)F(q) \geq 0$.

(Обобщенная) функция $F(q)$ медленного роста называется *причинной*, если ее преобразование Фурье обращается в нуль вне светового конуса $x^2 < 0$. При условиях 1–4 бёркеновская область (1) принимает вид

$$|q^2| \rightarrow \infty, \quad \nu = 2q^0 \rightarrow \infty, \quad -\frac{q^2}{2q^0} = \zeta, \quad q_0 \sim |q|, \quad (2)$$

а для функции $F(q) = F(\zeta, \nu)$ существует единственная (обобщенная) функция $\psi(|u|, \lambda^2)$ с носителем в области

$$\{(u, \lambda^2): |u| \leq 1, \lambda^2 \geq (1 - \sqrt{1 - u^2})^2\}$$

и такая, что имеет место представление Йоста–Лемана–Дайсона, которое формально можно записать как

$$F(\zeta, \nu) = \frac{2\pi}{\nu} \int_0^\infty d\lambda^2 \int_0^1 \rho^2 d\rho \psi(\rho, \lambda^2), \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 d\mu \delta\left(\zeta + \frac{\rho^2 + \lambda^2}{\nu} - \rho\mu\sqrt{1 + \frac{4\zeta}{\nu}}\right),$$

причем из условия 2 следует, что $F(\zeta, \nu) = 0$, если $\zeta > 1$.

Теперь предположим, что при достаточно больших λ^2 обобщенная (весовая) функция $\psi(\rho, \lambda^2)$ есть обычная функция по λ^2 и при некоторых $k > -1$ существует отличный от нуля предел (в смысле обобщенных функций по ρ)

$$\lim_{\lambda^2 \rightarrow \infty} \frac{\psi(\rho, \lambda^2)}{\lambda^{2k}} = \psi_0(\rho) \neq 0. \quad (4)$$

Отсюда в бьеркеновской области для физических значений $0 \leq \zeta \leq 1$ после длинных выкладок получаем асимптотическое равенство

$$F(\zeta, \nu) \sim \nu^k F(\zeta),$$

$$F(\zeta) = \frac{2\pi}{k+1} \int_{\zeta}^1 \rho \psi_0(\rho) (\rho - \zeta)^{k+1} d\zeta. \quad (5)$$

Обозначим через $F_{1,2}(\zeta)$ и $W_{1,2}(\zeta)$ соответствующие предельные выражения, определяемые формулой (5), для формфакторов $F_{1,2}(q, p)$ и $W_{1,2}(q, p)$. Тогда в бьеркеновской области получим асимптотические соотношения Бьеркена

$$W_1(\zeta, \nu) \sim \frac{1}{2} [F_2(\zeta) F_1(\zeta)], \quad W_2(\zeta, \nu) \sim \frac{2\zeta}{\nu} [F_2(\zeta) - F_1(\zeta, \nu)],$$

$$W_1(\zeta, \nu) \sim \frac{\nu}{4\zeta} W_2(\zeta) \quad (6)$$

для физических значений $0 \leq \zeta \leq 1$. Отметим, что для свободного поля асимптотические соотношения (6) превращаются в точные равенства. Изучим теперь асимптотическое поведение $\tilde{F}(x)$ в окрестности светового конуса $x^2 = 0$. В силу свойств 1–4 имеет место представление

$$\tilde{F}(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^\infty D(x, \lambda^2) \Delta(|x|, \lambda) d\lambda^2, \quad (7)$$

где $D(x, \lambda)$ – перестановочная функция для свободных скалярных частиц массы λ , а спектральная функция $\Delta(|x|, \lambda^2)$ выражается формулой

$$\Delta(r, \lambda^2) = 4\pi \int_0^1 \psi(\rho, \lambda^2) \frac{\sin(\rho r)}{r} \rho d\rho. \quad (8)$$

В произвольной системе отсчета из формул (7) и (8) получаем

$$\tilde{F}(x, p) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^\infty D(x, \lambda^2) \Delta(\sqrt{(px)^2 - x^2}, \lambda^2) d\lambda^2. \quad (9)$$

Отсюда при выполнении условия (4) выводим асимптотическое поведение функции $\tilde{F}(x, p)$ в окрестности светового конуса $x^2 = 0$:

$$\tilde{F}(x, p) \sim \frac{i}{\pi} G(px) \epsilon(x^0) (-\square)^k \delta'(x^2),$$

$$G(px) = 4\pi \int_0^1 \psi_0(\rho) \frac{\sin(\rho px)}{px} \rho d\rho. \quad (10)$$

Вывод. При предположениях 1–4 и существовании предела (4) поведение (10) функции $\tilde{F}(x, p)$ в окрестности светового конуса $x^2 = 0$ определяется той же предельной спектральной функцией $\psi_0(\rho)$, что и масштабно-инвариантное (автомодельное) поведение (5) функции $F(q, p)$ в бьеркеновской области (1). Указанные асимптотики не противоречат аксиоматике КТП Боголюбова [2].

Добавление. Справедливо и обратное утверждение: из асимптотического поведения (10) функции $\tilde{F}(q, p)$ в окрестности светового конуса следует асимптотическое поведение (5) функции $F(q)$.

Этот результат получен совместно с Завьяловым [3], [4] на основе математически более корректных доказательств. Вместо асимптотического условия (4) было использовано квазиасимптотическое условие для обобщенных причинных функций

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\psi(\rho, \lambda^2 \zeta)}{\lambda^{2k}} = \psi_0(\rho) f_{k+1}(\zeta), \quad (11)$$

где

$$f_k(x) = \theta(x) \frac{x^{k-1}}{G(k)}$$

есть k -я первообразная $\delta(x)$ -функции, $\theta(x)$ – функция Хевисайда. Предел в формуле (11) понимается в смысле обобщенных функций по переменным (ρ, ζ) .

Этот подход способствовал новому пониманию структуры вещества в квантовой хромодинамике (см., например, работы [5], [6]), а математики поняли, как правильно формулировать тауберовы теоремы типа Харди–Литтлвуда для обобщенных функций многих (комплексных) переменных [7].

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, А. Н. Тавхелидзе, *ТМФ*, **12**:3 (1972), 305–330.
- [2] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [3] В. С. Владимиров, Б. И. Завьялов, *ТМФ*, **50**:2 (1982), 163–194.
- [4] Б. И. Завьялов, *ТМФ*, **19**:2 (1974), 163–171.
- [5] В. А. Матвеев, А. Н. Тавхелидзе, *ЭЧАЯ*, **37**:3 (2006), 574–596.
- [6] N. Bogolubov, V. Matveev, A. Tavkhelidze, “Colored quarks”, *Gravitation and Elementary Particle Physics*, Adv. Sci. Tech. USSR Phys. Ser., ред. А. А. Logunov, Mir, 1983, 220–285.
- [7] В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*, Наука, М., 1986.