Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Катаев, С. В. Михайлов, Новое представление эффектов нарушения конформной симметрии в калибровочных теориях поля в теории возмущений, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 2, 174–187

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6757>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:06:53

© 2012 г.

А. Л. Катаев*, С. В. Михайлов†

НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭФФЕКТОВ НАРУШЕНИЯ КОНФОРМНОЙ СИММЕТРИИ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Предложена гипотеза о детальной структуре представления для нарушающего конформную симметрию члена в обобщенном в рамках теории возмущений основном соотношении Крютера в случае КХД, перенормированной в схеме $\overline{\text{MS}}$. Установлена справедливость данного представления в приближении $O(\alpha_s^4)$. Использование сформулированного в работе варианта обобщенного соотношения Крютера позволяет найти связи между конкретными вкладами в коэффициенты ряда теории возмущений КХД для несинглетной по аромату части функции Адлера электрон-позитронной аннигиляции в адроны D_A^{ns} и в коэффициенты ряда теории возмущений для правила сумм Бьеркена S_{Bjp} глубокоэластичного рассеяния поляризованных лептонов на нуклонах. Найдены новые соотношения для коэффициентов разложения при α_s^4 для D_A^{ns} и S_{Bjp} . Выполнение одного из них служит дополнительной теоретической проверкой недавних компьютерных аналитических расчетов членов порядка α_s^4 в выражениях для этих двух физических величин.

Ключевые слова: квантовая теория поля, нарушение конформной симметрии, ряды теории возмущений, ренормгруппа, связь характеристик инклюзивных процессов.

1. Конформная симметрия лежит в основе важных теоретических исследований в различных безмассовых моделях квантовой теории поля [1], [2], включая квантовую электродинамику (КЭД) [3] и квантовую хромодинамику (КХД) (см. раздел 5 в работе [4]). Применение этой симметрии при изучении аксиально-векторной-векторной (АВВ) треугольной амплитуды позволило установить фундаментальное соотношение между важными характеристиками различных инклюзивных процессов [5]. В работе [5] исследуемыми характеристиками являются нормированные кварк-партоновые приближения для несинглетной по аромату части D_A^{ns} функции Адлера D_A процесса e^+e^- -аннигиляции в адроны и для несинглетной коэффициентной функции C^{Bjp} правила сумм Бьеркена S_{Bjp} процесса глубокоэластичного

*Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия. E-mail: kataev@ms2.inr.ac.ru

†Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: mikhs@theor.jinr.ru

рассеяния поляризованных лептонов на нуклонах, которая также входит в несинглетную часть правила сумм Эллиса–Джаффе глубоконеупругого рассеяния поляризованных лептонов на нуклонах.

Это основное соотношение Крютера было вскоре применено в работе [6] в модельном случае, когда в КЭД не учитываются диаграммы с лептонными вставками во внутренние фотонные линии. Соотношение также справедливо в умозрительном конформно-инвариантном пределе КХД. В этих случаях оно имеет вид

$$D \cdot C^{\text{Bjp}}|_{\text{ci}} = 1, \quad (1)$$

где величины в его левой части определены как

$$D_{\text{A}}^{\text{ns}}(a_s) = \left(N_c \sum_f Q_f^2 \right) D(a_s), \quad (2)$$

$$S_{\text{Bjp}}(a_s) = \left(\frac{1}{6} \frac{g_{\text{A}}}{g_{\text{V}}} \right) C^{\text{Bjp}}(a_s). \quad (3)$$

Известно, что в моделях квантовой теории поля конформная симметрия нарушается перенормировками зарядов. Такие перенормировки приводят к существованию ненулевых ренормгрупповых (РГ) β -функций (детальное изложение см. в [7]). Более того, фактор $\beta(a_s)/a_s$, где $a_s = \alpha_s/\pi$, возникает в результате перенормировки следа тензора энергии-импульса. Это свойство было в общих чертах сформулировано теоретически в работе [8] и показано явно в [9]–[12]. Оно связано с существованием конформной аномалии.

До появления работы [13] не было ясно, существует ли обобщение основного соотношения Крютера [5] на случай калибровочных теорий с фермионами, таких как КЭД и КХД, в высших порядках теории возмущений (ТВ) при явном проявлении перенормировки константы связи. В работе [13] были классифицированы групповые множители группы $SU(N_c)$, возникающие при умножении ряда ТВ КХД для функции D^{ns} в приближении $O(a_s^3)$, полученном аналитически в работе [14], и позднее в [15] в схеме $\overline{\text{MS}}$, на аналогичное приближение для функции C^{Bjp} , известное к тому времени из расчетов работы [16]. Проведенные в работе [13] исследования позволили найти дополнительный вклад в правую часть выражения (1):

$$D(a_s)C^{\text{Bjp}}(a_s) = 1 + \Delta_{\text{csb}}(a_s). \quad (4)$$

В третьем порядке ТВ “единица Крютера” модифицируется нарушающим конформную симметрию членом Δ_{csb} , который представим в виде

$$\Delta_{\text{csb}}(a_s) = \left(\frac{\beta(a_s)}{a_s} \right) P(a_s) = \left(\frac{\beta(a_s)}{a_s} \right) \sum_{m \geq 1} K_m a_s^m. \quad (5)$$

В этом порядке ТВ в фактор $\beta(a_s)/a_s$ входит не зависящая от схемы двухпетлевая РГ β -функция, а в множитель $P(a_s)$ – определенные в работе [13] коэффициенты K_1 и K_2 , причем K_2 зависит от квадратичных операторов Казимира C_{F} , C_{A} калибровочной группы $SU(N_c)$ и от числа ароматов фермионов n_{f} .

Открытие такого КХД-обобщения соотношения Крютера в третьем порядке ТВ [13] в схеме $\overline{\text{MS}}$ с фактором $\beta(a_s)/a_s$ явилось первым независимым теоретическим указанием на справедливость компьютерных аналитических вычислений поправки $O(a_s^3)$ в ряде ТВ для D -функции [14], [15] и аналогичных вычислений третьего члена ряда ТВ для C^{BjP} [16]. Отметим, что в дальнейшем это “проверочное” теоретическое указание было подтверждено независимыми компьютерными расчетами вклада порядка a_s^3 в D -функцию, проведенными в работе [17] с помощью иного теоретического подхода.

Следующие за лидирующими поправки ТВ к D -функции были ранее вычислены аналитически [18] и численно [19]. Эти результаты были вскоре подтверждены аналитически [20]. В случае C^{BjP} поправки того же порядка ТВ были получены в работе [21] и подтверждены позднее [22] с применением другой символьной вычислительной техники.

Для объяснения происхождения эффекта факторизации $\beta(a_s)/a_s$ в (5) в работе [23] к треугольной диаграмме АВВ-токов был применен метод операторного разложения в импульсном пространстве (более детальное обсуждение см. в [24]). В работе [23] также были приведены аргументы в пользу отсутствия противоречия между однопетлевой природой аксиальной аномалии [25] и многопетлевой структурой обобщения соотношения Крютера в КХД, заключающиеся в их связи с различными формфакторами в операторном разложении треугольной диаграммы АВВ-токов [23]. Было также указано на возможность факторизации многопетлевого множителя $\beta(a_s)/a_s$ при нарушающем конформную симметрию вкладе в выражении (5) во всех порядках ТВ [23] с коэффициентами K_m полинома $P(a_s)$, не фиксируемыми из проведенных рассмотрений. При этом подразумевалось использование схемы перенормировок $\overline{\text{MS}}$, в которой можно явно определить коэффициентные функции лидирующего оператора в методе операторного разложения. Второй из сделанных в работе [23] выводов был доказан в координатном пространстве в работе [26] и обсуждался ранее [27], но был опубликован лишь недавно [4].

Более феноменологически ориентированное рассмотрение этого варианта КХД-обобщения соотношения Крютера [13] в схеме $\overline{\text{MS}}$ проведено в работах [28] и [29], где для фиксации характерного масштаба энергий использовалась разработанная в [30] многопетлевая версия подхода Бродского–Лепаж–Маккензи [31], дополненная процедурой построения “соразмерных масштабов” [32]. Результатом явилось “восстановление” в порядке $O(a_s^3)$ “единицы Крютера” в правой части соотношения (4) путем включения нарушающего конформную симметрию члена в энергетический масштаб эффективного заряда для D -функции, что эквивалентно выбору некоторого масштаба в инвариантном заряде для D -функции, и включения нарушающего конформную симметрию члена в энергетический масштаб эффективного заряда для C^{BjP} [29].

В случае группы $SU(N_c)$ поправки $O(a_s^4)$ к функциям D^{ns} и $C^{\text{BjP}}(a_s)$ известны благодаря недавним аналитическим расчетам из работы [33], проведенным в схеме $\overline{\text{MS}}$. Данные вычисления с учетом трехпетлевых вкладов в β -функцию в этой схеме [34], [35] позволили фиксировать коэффициент K_3 в полиноме $P(a_s)$ в выражении (5) и показать справедливость результатов работы [28] при учете $O(a_s^4)$ -вкладов ТВ. Отметим, что явные результаты для C^{BjP} подтвердили выражения для вкладов КЭД в

правило сумм Бьеркена, содержащих ζ_3 , которые впервые появились в работе [36] в поправках четвертого порядка квантово-электродинамической ТВ в D^{ns} -функции. Этот член в правиле сумм Бьеркена ранее был получен в [37] на основе результатов работы [36] с использованием конформной симметрии и основного соотношения Крюгтера¹⁾. Найденное согласие явилось первым подтверждением справедливости расчетов работы [33].

Основная цель настоящей работы состоит в обосновании детального представления обобщенного соотношения Крюгтера в порядке a_s^4 , предложенного нами ранее [39]. Его новизна заключается в записи правой части соотношения (5) в виде двойного степенного разложения, в котором первым параметром разложения является функция $\beta(a_s)/a_s$, а вторым – константа связи a_s , а именно

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{csb}}(a_s) &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\beta(a_s)}{a_s} \right)^n \mathcal{P}_n(a_s) = \sum_{n \geq 1} \sum_{r \geq 1} \left(\frac{\beta(a_s)}{a_s} \right)^n P_n^{(r)} a_s^r = \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{r \geq 1} \left(\frac{\beta(a_s)}{a_s} \right)^n P_n^{(r)}[k, m] C_F^k C_A^m a_s^r,\end{aligned}\quad (6)$$

где $k + m = r$ и коэффициенты $P_n^{(r)}[k, m]$ содержат рациональные дроби и дзета-функции Римана от нечетных целых чисел. В отличие от коэффициентов полинома $P(a_s)$ в выражении (5), коэффициенты $\mathcal{P}_n(a_s)$ в соотношении (6) уже не зависят от числа ароматов кварков n_f .

2. Рассмотрим ряды ТВ для определенных в (2) и (3) нормированных на единицу несинглетной части функции Адлера D и коэффициентной функции правила сумм Бьеркена C^{Bjp} :

$$D = 1 + \sum_{n=1} d_n a_s^n, \quad C^{\text{Bjp}} = 1 + \sum_{l=1} c_l a_s^l. \quad (7)$$

Явные выражения для d_1, d_2, d_3 и c_1, c_2, c_3 через групповые факторы $SU(N_c)$ хорошо известны (см., например, [14], [16]). В конкретном случае группы $SU(3)$ четвертый коэффициент D -функции d_4 был аналитически вычислен в работе [40]. Недавно этот результат был обобщен на случай произвольной цветовой группы $SU(N_c)$ [33]. Аналогичный коэффициент c_4 для C^{Bjp} , также вычисленный в работе [33] (см. приложенный к версии статьи в архиве препринтов отдельный файл), имеет вид²⁾

$$\begin{aligned}c_4 &= \left[-\frac{3}{16} + \frac{1}{4}\zeta_3 + \frac{5}{4}\zeta_5 \right] \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{d_R} + \left[\frac{13}{16} + \zeta_3 - \frac{5}{2}\zeta_5 \right] \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{d_R} n_f - \\ &\quad - \left[\frac{4823}{2048} + \frac{3}{8}\zeta_3 \right] C_F^4 + \left[\frac{839}{2304} + \frac{451}{96}\zeta_3 - \frac{145}{24}\zeta_5 \right] C_F^3 T_F n_f +\end{aligned}$$

¹⁾Аргументы в пользу возможного объяснения появления на этом уровне ТВ ζ_3 -члена, нетипичного для известных ранее вкладов диаграмм, характеризующих фотонную функцию поляризации вакуума в КЭД без фермионных вставок во внутренние фотонные линии, приведены в работе [38].

²⁾Это выражение, согласующееся с результатом в электронном приложении к препринту работы [33], было восстановлено нами из ее текста, в котором приведен результат для величины $1/C^{\text{Bjp}}$.

$$\begin{aligned}
& + \left[-\frac{265}{576} + \frac{29}{24}\zeta_3 \right] C_F^2 T_F^2 n_f^2 + \frac{605}{972} C_F T_F^3 n_f^3 + \\
& + \left[-\frac{3707}{4608} - \frac{971}{96}\zeta_3 + \frac{1045}{48}\zeta_5 \right] C_F^3 C_A + \\
& + \left[-\frac{87403}{13824} - \frac{1289}{144}\zeta_3 + \frac{275}{144}\zeta_5 + \frac{35}{4}\zeta_7 \right] C_F^2 C_A T_F n_f + \\
& + \left[-\frac{165283}{20736} - \frac{43}{144}\zeta_3 + \frac{5}{12}\zeta_5 - \frac{1}{6}\zeta_3^2 \right] C_F C_A T_F^2 n_f^2 + \\
& + \left[\frac{1071641}{55296} + \frac{1591}{144}\zeta_3 - \frac{1375}{144}\zeta_5 - \frac{385}{16}\zeta_7 \right] C_F^2 C_A^2 + \\
& + \left[\frac{1238827}{41472} + \frac{59}{64}\zeta_3 - \frac{1855}{288}\zeta_5 + \frac{11}{12}\zeta_3^2 - \frac{35}{16}\zeta_7 \right] C_F C_A^2 T_F n_f + \\
& + \left[-\frac{8004277}{248832} + \frac{1069}{576}\zeta_3 + \frac{12545}{1152}\zeta_5 - \frac{121}{96}\zeta_3^2 + \frac{385}{64}\zeta_7 \right] C_F C_A^3, \tag{8}
\end{aligned}$$

где $\zeta_{2q+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (1/k)^{2q+1}$ – функции Римана нечетных аргументов. В фундаментальном представлении группы $SU(N_c)$ выражения для групповых факторов определяются как $C_F = (N_c^2 - 1)/(2N_c)$, $C_A = N_c$, $T_F = 1/2$, $d_F^{abcd} d_A^{abcd}/d_R = N_c(N_c^2 + 6)/18$, $d_F^{abcd} d_F^{abcd}/d_R = (N_c^4 - 6N_c^2 + 18)/(36N_c^2)$. Для группы $SU(3)$, что соответствует случаю КХД, имеем $C_F = 4/3$, $C_A = 3$, $d_R = 3$ и $d_F^{abcd} d_A^{abcd} = 15/2$, $d_F^{abcd} d_F^{abcd} = 5/12$.

Сильная проверка самосогласованности результатов, полученных в работах [40] и [33], следует из справедливости КХД-обобщения соотношения Крютера (5) при учете вкладов в левой части определения (4) поправок $O(a_s^4)$, вычисленных в схеме $\overline{\text{MS}}$. Напомним, что существование подобного обобщения с факторизацией множителя $\beta(a_s)/a_s$ не случайно. Оно было обнаружено в предыдущем порядке ТВ [13] и доказано во всех порядках в работе [26]. В работе [13] было показано, что в третьем порядке ТВ выражения для коэффициентов полинома $P(a_s)$ в (5) могут быть записаны как

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_1[1, 0, 0] C_F, \\
K_2 &= K_2[2, 0, 0] C_F^2 + K_2[1, 1, 0] C_F C_A + K_2[1, 0, 1] C_F T_F n_f. \tag{9}
\end{aligned}$$

Проведенные в [33] вычисления в четвертом порядке ТВ приводят к фиксации третьего члена полинома $P(a_s)$ в виде суммы шести слагаемых, пропорциональных произведению операторов Казимира группы $SU(N_c)$ и числа ароматов кварков n_f :

$$\begin{aligned}
K_3 &= K_3[3, 0, 0] C_F^3 + K_3[2, 1, 0] C_F^2 C_A + K_3[1, 2, 0] C_F C_A^2 + K_3[2, 0, 1] C_F^2 T_F n_f + \\
& + K_3[1, 1, 1] C_F C_A T_F n_f + K_3[1, 0, 2] C_F (T_F n_f)^2. \tag{10}
\end{aligned}$$

Аналитическое выражение для последнего коэффициента $K_3[1, 0, 2]$ в (10) совпадает с результатом работы [13], полученным в процессе вычислений аналогичных коэф-

фициентов, генерируемых в высших порядках ТВ произведением вкладов в функции $D(a_s)$ и C^{BjP} диаграмм с большим числом фермионных вставок во внутренние глюонные линии.

В соответствии со структурой члена $\Delta_{\text{csb}}(a_s)$ в соотношениях (5) и (6) нам потребуются конкретные значения коэффициентов РГ β -функции схемы $\overline{\text{MS}}$

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} a_s = \beta(a_s) = -a_s^2 (\beta_0 + \beta_1 a_s + \beta_2 a_s^2), \quad (11)$$

найденных в трехпетлевом приближении в [34] и подтвержденных в [35]. Коэффициенты β_i могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \beta_0[0, 1, 0]C_A + \beta_0[0, 0, 1]T_F n_f, \\ \beta_1 &= \beta_1[0, 2, 0]C_A^2 + \beta_1[0, 1, 1]C_A T_F n_f + \beta_1[1, 0, 1]C_F T_F n_f, \\ \beta_2 &= \beta_2[0, 3, 0]C_A^3 + \beta_2[0, 2, 1]C_A^2 T_F n_f + \beta_2[1, 1, 1]C_F C_A T_F n_f + \\ &\quad + \beta_2[0, 1, 2]C_A T_F^2 n_f^2 + \beta_2[2, 0, 1]C_F^2 T_F n_f + \beta_2[1, 0, 2]C_F T_F^2 n_f^2 \end{aligned} \quad (12)$$

со следующими элементами $\beta_j[\dots]$:

$$\begin{aligned} \beta_0[0, 1, 0] &= \frac{11}{12}, & \beta_0[0, 0, 1] &= -\frac{1}{3}, \\ \beta_1[0, 2, 0] &= \frac{17}{24}, & \beta_1[0, 1, 1] &= -\frac{5}{12}, & \beta_1[1, 0, 1] &= -\frac{1}{4}, \\ \beta_2[0, 3, 0] &= \frac{2857}{3456}, & \beta_2[0, 2, 1] &= -\frac{1415}{1728}, & \beta_2[1, 1, 1] &= -\frac{205}{576}, \\ \beta_2[0, 1, 2] &= \frac{79}{864}, & \beta_2[2, 0, 1] &= \frac{1}{32}, & \beta_2[1, 0, 2] &= \frac{11}{144}. \end{aligned} \quad (13)$$

3. Рассмотрим теперь вопрос об однозначности детального обобщения соотношения Крютера (6) по степеням β -функции. Мы приведем здесь дополнительные соображения в пользу нашего предположения о существовании такого обобщения (см. [39]) и представим его обоснование с использованием полученного в работе [33] приближения четвертого порядка ТВ для выражений (4), (5).

Вывод детального обобщения соотношения Крютера в схеме $\overline{\text{MS}}$ основывается на требовании независимости коэффициентов полинома $\mathcal{P}_n$ в (6) от коэффициентов β -функции, а следовательно, и от числа ароматов кварков n_f . Это свойство может быть реализовано путем перехода в нарушающем конформную симметрию члене $\Delta_{\text{csb}}(a_s)$ выражения (4) от представления (5) с единственной факторизованной β -функцией к представлению (6) в виде разложения по степеням $\beta(a_s)/a_s$. Предположение о справедливости такой формы записи члена $\Delta_{\text{csb}}(a_s)$ в четвертом порядке ТВ было сделано в работе [39] до публикации результатов в порядке a_s^4 аналитических расчетов D -функции и $C^{\text{BjP}}(a_s)$ [33]. Для ее явного вывода следует приравнять правые части двух представлений члена $\Delta_{\text{csb}}(a_s)$ из соотношений (5) и (6) в каждом порядке разложения по константе связи a_s . В интересующем нас приближении ТВ коэффициенты в правой части соотношения (5) связаны с аналогичными вкладами

в соотношения (6) следующей системой линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
K_1[1, 0, 0] &= P_1^{(1)}[1, 0], \\
K_2[2, 0, 0] &= P_1^{(2)}[2, 0], \\
K_2[1, 1, 0] &= P_1^{(2)}[1, 1] - \beta_0[0, 1, 0]P_2^{(1)}[1, 0], \\
K_2[1, 0, 1] &= -\beta_0[0, 0, 1]P_2^{(1)}[1, 0], \\
K_3[3, 0, 0] &= P_1^{(3)}[3, 0], \\
K_3[2, 1, 0] &= P_1^{(3)}[2, 1] - \beta_0[0, 1, 0]P_2^{(2)}[2, 0], \\
K_3[1, 2, 0] &= P_1^{(3)}[1, 2] - \beta_0[0, 1, 0]P_2^{(2)}[1, 1] - \beta_1[0, 2, 0]P_2^{(1)}[1, 0] + \\
&\quad + (\beta_0[0, 1, 0])^2 P_3^{(1)}[1, 0], \\
K_3[2, 0, 1] &= -\beta_1[1, 0, 1]P_2^{(1)}[1, 0] - \beta_0[0, 0, 1]P_2^{(2)}[2, 0], \\
K_3[1, 1, 1] &= -\beta_1[0, 1, 1]P_2^{(1)}[1, 0] - \beta_0[0, 0, 1]P_2^{(2)}[1, 1] + \\
&\quad + 2\beta_0[0, 1, 0]\beta_0[0, 0, 1]P_3^{(1)}[1, 0], \\
K_3[1, 0, 2] &= (\beta_0[0, 0, 1])^2 P_3^{(1)}[1, 0].
\end{aligned} \tag{14}$$

Однозначные решения этой системы определяют явные выражения для коэффициентов трех полиномов $\mathcal{P}_n(a_s)$ с не зависящими от числа ароматов n_f коэффициентами $P_n^{(r)}[k, m]$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1(a_s) &= \left(-\frac{21}{8} + 3\zeta_3\right)C_F a_s + \left[\left(\frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5\right)C_F^2 + \right. \\
&\quad + \left(-\frac{47}{48} + \zeta_3\right)C_F C_A\left]a_s^2 + \left[\left(\frac{2471}{768} + \frac{61}{8}\zeta_3 - \frac{715}{8}\zeta_5 + \frac{315}{4}\zeta_7\right)C_F^3 + \right. \\
&\quad + \left(\frac{16649}{1536} - \frac{11183}{192}\zeta_3 + \frac{1015}{24}\zeta_5 - \frac{105}{8}\zeta_7 + \frac{99}{4}\zeta_3^2\right)C_F^2 C_A + \\
&\quad + \left(\frac{2107}{192} + \frac{2503}{72}\zeta_3 - \frac{355}{18}\zeta_5 - 33\zeta_3^2\right)C_F C_A^2\left]a_s^3 + O(a_s^4), \\
\mathcal{P}_2(a_s) &= \left(\frac{163}{8} - 19\zeta_3\right)C_F a_s + \left[\left(-\frac{13597}{384} - \frac{2523}{16}\zeta_3 + \frac{375}{2}\zeta_5 + 27\zeta_3^2\right)C_F^2 + \right. \\
&\quad + \left(\frac{1433}{32} - \frac{1}{4}\zeta_3 - \frac{85}{2}\zeta_5 - 6\zeta_3^2\right)C_F C_A\left]a_s^2 + O(a_s^3), \\
\mathcal{P}_3(a_s) &= \left(-\frac{307}{2} + \frac{203}{2}\zeta_3 + 45\zeta_5\right)C_F a_s + O(a_s^2).
\end{aligned} \tag{15}$$

Отметим, что в четырехпетлевом члене β_3 РГ β -функции, вычисленном аналитически в работе [41] в случае группы $SU(N_c)$ и позднее подтвержденном в [42], появляются три новые групповые структуры $d_A^{abcd}d_A^{abcd}$, $d_F^{abcd}d_A^{abcd}n_f$ и $d_F^{abcd}d_F^{abcd}n_f^2$. В силу факторизации β -функции в (5) во всех порядках ТВ (см. доказательства в работах [26], [4]) делаем вывод, что появление этих дополнительных групповых структур не разрушит свойство факторизации четырехпетлевого приближения β -функции как в (5), так и в первом члене суммы в (6).

Еще один вывод следует из выполненных в работе [13] вычислений высших вкладов по степеням n_f , эквивалентных вычислению поправок, пропорциональных высшим степеням первого коэффициента РГ β -функции β_0 . Эти поправки определяют лидирующие вклады в полиномы $\mathcal{P}_n(a_s)$ нового представления для члена Δ_{csb} в (6), которые имеют вид

$$\mathcal{P}_n(a_s) = \frac{S_n}{4^n} 3^{(n-1)} C_F a_s + O(a_s^2). \quad (16)$$

При этом первые девять коэффициентов S_n , $1 \leq n \leq 9$, вычислены аналитически в работе [13].

4. Представление (6) может быть получено другим способом с применением развитого в работе [43] формализма β -разложений коэффициентов рядов ТВ (в схеме $\overline{\text{MS}}$). В этом подходе предлагается рассматривать разложение коэффициентов d_n и c_n по степеням коэффициентов β -функции $\beta_0, \beta_1, \dots$ с весовыми элементами $d_n[n_0, n_1, \dots]$, $c_n[n_0, n_1, \dots]$ вместо общепринятого разложения коэффициентов по степеням зависящего от аромата фактора $T_F n_f$, квадратичным операторам Казимира C_F и C_A и структурным константам цветовой группы $SU(N_c)$. Их первые аргументы (n_0) определяют степени коэффициентов β_0 при элементах $d_n[\cdot]$ и $c_n[\cdot]$, вторые аргументы (n_1) дают степени коэффициентов β_1 и т. д. Элементы $d_n[0, 0, \dots, 0]$, $c_n[0, 0, \dots, 0]$ являются вкладами, “очищенными” от перенормировок заряда и множителей β_i , степени которых здесь равны нулю ($n_i = 0$). Эти элементы совпадают со значениями коэффициентов d_n , c_n в гипотетическом пределе с β -функцией, тождественно равной нулю во всех порядках ТВ в КХД. Такой предел соответствует восстановлению конформной симметрии в эффективной квантово-полевой модели, переход к нему будет рассматриваться здесь как технический прием. В случае, когда все аргументы n_i элементов $d_n[\dots, m, 0, \dots, 0]$, $c_n[\dots, m, 0, \dots, 0]$ после некоторого индекса m равны нулю, упростим обозначения следующим образом: $d_n[\dots, m, 0, \dots, 0] = d_n[\dots, m]$, $c_n[\dots, m, 0, \dots, 0] = c_n[\dots, m]$. Соответствующие β -представления для первых нескольких коэффициентов выражения (7) суть

$$d_2 = \beta_0 d_2[1] + d_2[0], \quad (17)$$

$$d_3 = \beta_0^2 d_3[2] + \beta_1 d_3[0, 1] + \beta_0 d_3[1] + d_3[0], \quad (18)$$

$$d_4 = \beta_0^3 d_4[3] + \beta_1 \beta_0 d_4[1, 1] + \beta_2 d_4[0, 0, 1] + \beta_0^2 d_4[2] + \\ + \beta_1 d_4[0, 1] + \beta_0 d_4[1] + d_4[0]. \quad (19)$$

Аналогичные представления справедливы и для высших коэффициентов d_n рядов ТВ для D -функции, и для коэффициентов c_l ряда ТВ для C^{Vir} , определенных в (7), и т. п. Подчеркнем, что представления вида (17)–(19) являются однозначными. Коэффициенты $d_n[n-1]$, $c_n[n-1]$ совпадают с членами, генерируемыми цепочками одночастично-приводимых однопетлевых фермионных вставок в глюонные пропагаторы, и могут быть найдены, например, в работе [13]. Определение явного вида других элементов является отдельной непростой задачей. Их диаграммное представление обсуждалось в работе [43]. Ниже мы обсудим способ получения конкретных аналитических выражений для элементов коэффициентов d_n и c_l вплоть до поправок порядка a_s^3 .

Разложение (6) в совокупности с выражениями (17)–(19) позволяет найти соотношения между неизвестными элементами коэффициентов четвертого порядка ряда

ТВ d_4 , c_4 и элементами, входящими в коэффициенты третьего порядка ряда ТВ (которые будут явно приведены ниже).

В силу соотношения (1), следующего из ненарушенной конформной симметрии, восстанавливаемой в гипотетическом случае $\beta_i = 0$, находим явную связь между “очищенными” от перенормировок заряда вкладами:

$$c_n[0] + d_n[0] + \sum_{l=1}^{n-1} d_l[0]c_{n-l}[0] = 0. \quad (20)$$

Особенностью этого рекуррентного соотношения является возможность выразить сумму элементов n -го порядка ТВ через аналогичные элементы, входящие в коэффициенты низших приближений ТВ. Отсюда следует связь между “очищенными” элементами $c_4[0], d_4[0]$ коэффициентов четвертого порядка ТВ:

$$c_4[0] + d_4[0] = 2d_1d_3[0] - 3d_1^2d_2[0] + (d_2[0])^2 + d_1^4. \quad (21)$$

Отметим, что это соотношение содержит вклады не только C_F , но также и C_A . Напомним, что проекция выражения (21) на максимальную степень Казимира C_F , C_F^4 эквивалентна соотношению, использовавшемуся ранее в работе [37] при формулировке предложения о проверке результата КЭД для аналога коэффициента d_4 , впервые опубликованного в докладе [36].

Явное выражение для коэффициента d_3 в β -разложении было получено в работе [43] благодаря использованию вычисленного в [17] аналитического результата для вклада в третий коэффициент ряда ТВ функции Адлера $D(a_s, n_f, n_{\bar{g}})$ поправок с числом $n_{\bar{g}}$ мультиплетов глюино в приближении, когда в суперсимметричном варианте КХД не учитываются вклады скалярных кварков (скварков). На уровне поправок порядка a_s^2 приведенный в [17] аналитический результат для глюинного вклада совпадает с численным результатом работы [44], а глюинная поправка порядка a_s^3 , вычисленная аналитически в работе [17] в схеме $\overline{MS}$, была подтверждена в работе [45].

Элемент $d_3[2]$ в выражении (18) получить несложно. Его значение можно также извлечь из результатов работы [13]. Затем следует разделить в выражении для d_3 вклады от членов $\beta_1 d_3[0, 1]$ и $\beta_0 d_3[1]$. Оба они линейны по числу ароматов кварков n_f . Они разделяются при использовании дополнительной степени свободы – упомянутого выше глюинного вклада, помеченного числом глюинных мультиплетов $n_{\bar{g}}^3$.

При этом можно найти явный вид функций $n_f = n_f(\beta_0, \beta_1)$ и $n_{\bar{g}} = n_{\bar{g}}(\beta_0, \beta_1)$. Эти выражения могут быть получены после учета глюинных вкладов в первые два коэффициента β -функции для подобного расширения КХД. Эти двухпетлевые результаты известны из выполненных в работе [48] вычислений. Именно таким образом в работе [43] были получены определенные в формулах (17), (18) коэффициенты

³⁾ Отметим, что возможность существования глюино, более легкого, чем скварки Минимальной стандартной суперсимметричной модели (МССМ), с массой в области $m_{\bar{g}} \geq 195$ ГэВ не противоречила экспериментальным данным Тэватрона [46], но недавно была исключена данными, полученными на Большом адронном коллайдере (БАК). Однако совместный детальный анализ имеющихся данных БАК, полученных коллаборациями CMS и ATLAS, все еще не исключает возможности существования варианта МССМ с более тяжелым, чем скварки, глюино с массой в области $m_{\bar{g}} \geq 400$ ГэВ [47].

β -разложения членов d_2 и d_3 . Мы приводим здесь результаты работы [43], лишь несколько изменив нормировочные коэффициенты:

$$d_1 = \frac{3}{4}C_F, \quad d_2[1] = \left(\frac{33}{8} - 3\zeta_3\right)C_F, \quad d_2[0] = -\frac{3}{32}C_F^2 + \frac{1}{16}C_FC_A, \quad (22)$$

$$d_3[2] = \left(\frac{151}{6} - 19\zeta_3\right)C_F, \quad (23)$$

$$d_3[1] = \left(-\frac{27}{8} - \frac{39}{4}\zeta_3 + 15\zeta_5\right)C_F^2 - \left(\frac{9}{64} - 5\zeta_3 + \frac{5}{2}\zeta_5\right)C_FC_A,$$

$$d_3[0, 1] = \left(\frac{101}{16} - 6\zeta_3\right)C_F, \quad (24)$$

$$d_3[0] = -\frac{69}{128}C_F^3 + \frac{71}{64}C_F^2C_A + \left(\frac{523}{768} - \frac{27}{8}\zeta_3\right)C_FC_A^2.$$

Выразим теперь элементы $c_3[\cdot]$ в аналогичном виде. Применяя формулу (20) для определения $c_3[0]$ и учитывая аналитическое значение для $d_3[0]$ (24), получаем

$$c_1 = -\frac{3}{4}C_F, \quad c_2[1] = -\frac{3}{2}C_F, \quad c_2[0] = \frac{21}{32}C_F^2 - \frac{1}{16}C_FC_A,$$

$$c_3[2] = -\frac{115}{24}C_F, \quad c_3[1] = \left(\frac{83}{24} - \zeta_3\right)C_F^2 + \left(\frac{215}{192} - 6\zeta_3 + \frac{5}{2}\zeta_5\right)C_FC_A, \quad (25)$$

$$c_3[0, 1] = \left(-\frac{59}{16} + 3\zeta_3\right)C_F, \quad c_3[0] = -\frac{3}{128}C_F^3 - \frac{65}{64}C_F^2C_A - \left(\frac{523}{768} - \frac{27}{8}\zeta_3\right)C_FC_A^2.$$

Разложения, аналогичные формулам (17), (18), были использованы ранее в работе [49] как для функции Адлера, так и для правила сумм Бьеркена. Однако при этом учитывались лишь члены, пропорциональные степеням β_0 (включая нулевую степень). В целом более последовательно использовать подход работы [43], который предписывает учитывать также вклад двухпетлевого коэффициента β_1 в РГ β -функции.

Подставляя теперь соотношения вида (17)–(19) для d_i и c_i в предложенное нами представление (6), приходим к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(a_s) &= a_s \{P_1^{(1)} + a_s P_1^{(2)} + a_s^2 P_1^{(3)}\} = \\ &= -a_s \{c_2[1] + d_2[1] + a_s(c_3[1] + d_3[1] + d_1(c_2[1] - d_2[1])) + \\ &\quad + a_s^2(c_4[1] + d_4[1] + d_1(c_3[1] - d_3[1]) + d_2[0]c_2[1] + d_2[1]c_2[0])\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(a_s) &= a_s \{P_2^{(1)} + a_s P_2^{(2)}\} = \\ &= a_s \{c_3[2] + d_3[2] + a_s(c_4[2] + d_4[2] - d_1(c_3[2] - d_3[2]))\}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mathcal{P}_3(a_s) = a_s P_3^{(1)} = -a_s \{c_4[3] + d_4[3]\} = a_s C_F \left(\frac{307}{2} - \frac{203}{2}\zeta_3 - 45\zeta_5\right), \quad (28)$$

$$\mathcal{P}_n(a_s) = a_s P_n^{(1)} = (-1)^{n-1} a_s \{c_n[n-1] + d_n[n-1]\}. \quad (29)$$

Конкретное выражение для формулы (29) определено в (16). Подчеркнем, что полученный ранее аналитический вид формул (15) приобретает конкретную связь с методом β -разложения (см. формулы (26)–(28)). Элементы $d_n[n-1](c_n[n-1])$

определяются диаграммами, содержащими единственный глюонный пропагатор с цепочкой одночастично-приводимых однопетлевых фермионных вставок (так называемые лидирующие ренормалонные вклады), и могут быть определены из результатов, полученных в [13]. Элементы $d_n[l]$, $l < n - 1$, определяются диаграммами, которые содержат по крайней мере два глюонных пропагатора, причем оба содержат одночастично-приводимые однопетлевые фермионные вставки (так называемые нелидирующие ренормалонные вклады). Подобные классы диаграмм до сих пор явно не вычислялись. Используя основной теоретический результат (6), явно проверенный нами в четвертом порядке ТВ, можно получить соотношения между элементами β -разложений коэффициентов $d_4(d_n)$ и $c_4(c_n)$. Так, первый член полинома $P_1(a_s)$ в (6) определяется следующей цепочкой равенств:

$$\begin{aligned} P_1^{(1)} &= -c_2[1] - d_2[1] = -c_3[0, 1] - d_3[0, 1] = -c_4[0, 0, 1] - d_4[0, 0, 1] = \dots = \\ &= -c_n[\underbrace{0, 0, \dots, 1}_{n-1}] - d_n[\underbrace{0, 0, \dots, 1}_{n-1}] = C_F \left(-\frac{21}{8} + 3\zeta_3 \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Второй член $P_1^{(2)}$ этого же полинома, аналитически фиксированный в (15), также связывает различные элементы β -представлений:

$$\begin{aligned} P_1^{(2)} &= -c_3[1] - d_3[1] - d_1(c_2[1] - d_2[1]) = \\ &= -c_4[0, 1] - d_4[0, 1] - d_1(c_3[0, 1] - d_3[0, 1]) = \dots = \\ &= -c_n[\underbrace{0, \dots, 1}_{n-2}] - d_n[\underbrace{0, \dots, 1}_{n-2}] - d_1(c_{n-1}[\underbrace{0, \dots, 1}_{n-2}] - d_{n-1}[\underbrace{0, \dots, 1}_{n-2}]) = \\ &= \left(\frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 \right) C_F^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Однако для получения аналитических значений коэффициентов $P_1^{(3)}$ и $P_2^{(2)}$ с применением метода β -разложения необходимо найти представления для коэффициентов четвертого порядка в рядах ТВ для функций $D(a_s)$ и $C^{\text{BjP}}(a_s)$.

Это может быть сделано после дополнительных аналитических вычислений вкладов глюино в эти важные физические величины в четвертом порядке ТВ и учете трехпетлевых глюонных эффектов в РГ β -функции КХД, вычисленных в схеме $\overline{\text{MS}}$ в работе [50].

Полученные выше соотношения позволяют вывести новое теоретическое выражение для суммы коэффициентов четвертого порядка ТВ $d_4 + c_4$. Для этого фиксируем число ароматов фермионов n_f из условия $\beta_0(n_f = n_0) = 0$, что соответствует анзацу Банка-Закса [51] и приводит к значению $T_F n_0 = (11/4)C_A$. В этом случае получаем

$$\begin{aligned} c_4(n_0) + d_4(n_0) &= c_4[0] + d_4[0] + \beta_2(n_0)(c_4[0, 0, 1] + d_4[0, 0, 1]) + \\ &+ \beta_1(n_0)(c_4[0, 1] + d_4[0, 1]). \end{aligned} \quad (32)$$

Слагаемые в правой части формулы (32) известны из выражений (21), (30) (а именно, $-c_4[0, 0, 1] - d_4[0, 0, 1]$) и из выражения (31) (член $-c_4[0, 1] - d_4[0, 1]$). Подставляя в β_1 и β_2 фиксированное выше значение n_0 , из соотношения (32) получаем

$$\begin{aligned} d_4(n_0) + c_4(n_0) &= -\frac{333}{1024}C_F^4 + C_A C_F^3 \left(-\frac{1661}{3072} + \frac{1309}{128}\zeta_3 - \frac{165}{16}\zeta_5 \right) + \\ &+ C_A^2 C_F^2 \left(-\frac{3337}{1536} + \frac{7}{2}\zeta_3 - \frac{105}{16}\zeta_5 \right) + C_A^3 C_F \left(-\frac{28931}{12288} + \frac{1351}{512}\zeta_3 \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Фиксируя число ароматов кварков $n_f = n_0$ в конкретном аналитическом результате для $d_4(n_0) + c_4(n_0)$, следующем из вычислений [33], находим согласие с правой частью формулы (33).

Таким образом, применение выведенного в настоящей работе в четвертом порядке ТВ нового вида обобщенного соотношения Крютера (6), а также метода β -разложения работы [43] и анзаца Банка–Закса [51] позволили получить дополнительный аргумент в пользу правильности результатов сложных и длительных аналитических компьютерных вычислений, проведенных группой сотрудников ИЯИ, Института теоретической физики частиц (Карлсруэ) и НИИЯФ МГУ [33]. Кроме того, отсутствие в правой части (33) трансцендентных членов, пропорциональных ζ_7 и ζ_3^2 , при обращении в нуль коэффициента β_0 подтверждает сделанное в [33] наблюдение о пропорциональности подобных вкладов в определенные в схеме $\overline{\text{MS}}$ коэффициенты d_4 и c_4 (см. результаты работы [33] и выражение (8)) первому коэффициенту РГ β -функции КХД.

Благодарности. Настоящая работа докладывалась на XVI Международном семинаре по физике высоких энергий “Quarks-2010” (6–12 июня 2010 г., Коломна) и на Международном семинаре “Структура адронов и КХД: от низких к высоким энергиям–2010” (5–9 июля 2010 г., Гатчина). Авторы выражают признательность организаторам этих семинаров за приглашение. Мы благодарны К. Г. Четыркину и Д. И. Казакову за полезные вопросы и обсуждения, Д. Броздхарсту, А. Г. Грозину и О. В. Теряеву за интерес к нашей работе, С. Бродскому, Р. Крютеру и П. Минковскому за поддержку и комментарии по литературе после появления электронного препринта. Одному из нас (А. Л. Катаеву) также приятно отметить интерес и внимательное отношение к данной работе А. В. Гаркуши. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00182).

Список литературы

- [1] В. А. Матвеев, Р. М. Мурадян, А. Н. Тавхелидзе, *ЭЧАЯ*, **2:1** (1971), 5–32.
- [2] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, *Phys. Rept.*, **323:3–4** (2000), 183–386, arXiv: hep-th/9905111.
- [3] M. Baker, K. Johnson, *Physica A*, **96:1–2** (1979), 120–130.
- [4] V. M. Braun, G. P. Korchemsky, D. Mueller, *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **51:2** (2003), 311–398, arXiv: hep-ph/0306057.
- [5] R. J. Crewther, *Phys. Rev. Lett.*, **28:21** (1972), 1421–1424.
- [6] S. L. Adler, C. G. Callan, D. J. Gross, R. Jackiw, *Phys. Rev. D*, **6:10** (1972), 2982–2988.
- [7] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1984.
- [8] M. S. Chanowitz, J. R. Ellis, *Phys. Lett. B*, **40:3** (1972), 397–400.
- [9] N. K. Nielsen, *Nucl. Phys. B*, **120:2** (1977), 212–220.
- [10] S. L. Adler, J. C. Collins, A. Duncan, *Phys. Rev. D*, **15:6** (1977), 1712–1721.
- [11] J. C. Collins, A. Duncan, S. D. Joglekar, *Phys. Rev. D*, **16:2** (1977), 438–449.
- [12] P. Minkowski, *On the anomalous divergence of the dilatation current in gauge theories*, Preprint № 76-0813, Univ. of Bern, Bern, 1976.
- [13] D. J. Broadhurst, A. L. Kataev, *Phys. Lett. B*, **315:1–2** (1993), 179–187, arXiv: hep-ph/9308274.
- [14] S. G. Gorishny, A. L. Kataev, S. A. Larin, *Phys. Lett. B*, **259:1–2** (1991), 144–150.
- [15] L. R. Surguladze, M. A. Samuel, *Phys. Rev. Lett.*, **66:5** (1991), 560–563; Erratum, **66:18** (1991), 2416.

- [16] S. A. Larin, J. A. M. Vermaseren, *Phys. Lett. B*, **259**:3 (1991), 345–352.
- [17] K. G. Chetyrkin, *Phys. Lett. B*, **391** (1997), 402–412, arXiv: hep-ph/9608480.
- [18] K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, F. V. Tkachov, *Phys. Lett. B*, **85**:2–3 (1979), 277–279.
- [19] M. Dine, J. R. Sapiirstein, *Phys. Rev. Lett.*, **43**:10 (1979), 668–671.
- [20] W. Celmaster, R. J. Gonsalves, *Phys. Rev. Lett.*, **44**:9 (1980), 560–564.
- [21] S. G. Gorishny, S. A. Larin, *Phys. Lett. B*, **172**:1 (1986), 109–112.
- [22] E. B. Zijlstra, W. L. van Neerven, *Phys. Lett. B*, **297**:3–4 (1992), 377–384.
- [23] Г. Т. Габададзе, А. Л. Катаев, *Письма в ЖЭТФ*, **61**:6 (1995), 439–443.
- [24] A. L. Kataev, “The generalized Crewther relation: the peculiar aspects of the analytical perturbative QCD calculations”, *Proceedings of the 2nd Workshop on Continuous Advances in QCD* (Minneapolis, MN, 28–31 March, 1996), ed. M. I. Polikarpov, World Scientific, Singapore, 1996, 107–132, arXiv: hep-ph/9607426, Preprint INR-0926-96.
- [25] S. L. Adler, W. A. Bardeen, *Phys. Rev.*, **182**:5 (1969), 1517–1536.
- [26] R. J. Crewther, *Phys. Lett. B*, **397**:1–2 (1997), 137–142, arXiv: hep-ph/9701321.
- [27] D. Muller, Private communication, 1996.
- [28] S. J. Brodsky, G. T. Gabadadze, A. L. Kataev, H. J. Lu, *Phys. Lett. B*, **372**:1–2 (1996), 133–140, arXiv: hep-ph/9512367.
- [29] J. Rathsman, *Phys. Rev. D*, **54**:5 (1996), 3420–3426, arXiv: hep-ph/9605401.
- [30] G. Grunberg, A. L. Kataev, *Phys. Lett. B*, **279**:3–4 (1992), 352–358.
- [31] S. J. Brodsky, G. P. Lepage, P. B. Mackenzie, *Phys. Rev. D*, **28**:1 (1983), 228–235.
- [32] S. J. Brodsky, H. J. Lu, *Phys. Rev. D*, **51**:7 (1995), 3652–3668, arXiv: hep-ph/9405218.
- [33] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn, *Phys. Rev. Lett.*, **104**:13 (2010), 132004, 4 pp., arXiv: 1001.3606.
- [34] O. V. Tarasov, A. A. Vladimirov, A. Y. Zharkov, *Phys. Lett. B*, **93**:4 (1980), 429–432.
- [35] S. A. Larin, J. A. M. Vermaseren, *Phys. Lett. B*, **303**:3–4 (1993), 334–336, arXiv: hep-ph/9302208.
- [36] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, “Massless propagators: applications in QCD and QED”, *Proceedings of 8th International Symposium on Radiative Corrections (RADCOR 2007): Application of Quantum Field Theory to Phenomenology* (Florence, Italy, 1–6 October 2007), 2007, 023, arXiv: 0810.4048.
- [37] A. L. Kataev, *Phys. Lett. B*, **668**:4 (2008), 350–352, arXiv: 0808.3121.
- [38] A. L. Kataev, *Phys. Lett. B*, **691**:2 (2010), 82–86, arXiv: 1005.2058.
- [39] A. L. Kataev, S. V. Mikhailov, “New extended Crewther-type relation”, *Proceeding of 9th International Symposium on Radiative Corrections (RADCOR 2009): Application of Quantum Field Theory to Phenomenology* (Ascona, Switzerland, October 25–30, 2009), 2010, 036, arXiv: 1001.0728.
- [40] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:1 (2008), 012002, 4 pp., arXiv: 0801.1821.
- [41] T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren, S. A. Larin, *Phys. Lett. B*, **400**:3–4 (1997), 379–384, arXiv: hep-ph/9701390.
- [42] M. Czakon, *Nucl. Phys. B*, **710**:1–2 (2005), 485–498, arXiv: hep-ph/0411261.
- [43] S. V. Mikhailov, *JHEP*, **06** (2007), 009, 28 pp., arXiv: hep-ph/0411397; “Any order generalization of BLM procedure in QCD”, *Proceedings of the 13th International Seminar Quarks 2004* (Pushkinskie Gory, Russia, May 24–30, 2004), **2**, eds. D. G. Levkov, V. A. Matveev, V. A. Rubakov, INR, Moscow, 2005, 536–550.
- [44] А. Л. Катаев, А. А. Пивоваров, *Письма в ЖЭТФ*, **38**:6 (1983), 309–310.
- [45] L. J. Clavelli, L. R. Surguladze, *Phys. Rev. Lett.*, **78**:9 (1997), 1632–1635, arXiv: hep-ph/9610493.
- [46] D. I. Kazakov, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **203–204** (2010), 118–154, arXiv: 1010.5419.

- [47] S. Akula, N. Chen, D. Feldman, M. Liu, Z. Liu, P. Nath, G. Peim, *Phys. Lett. B*, **699**:5 (2011), 377–382, arXiv: 1103.1197.
- [48] M. E. Machacek, M. T. Vaughn, *Nucl. Phys. B*, **236**:1 (1984), 221–232.
- [49] C. N. Lovett-Turner, C. J. Maxwell, *Nucl. Phys. B*, **452**:1–2 (1995), 188–212, arXiv: hep-ph/9505224.
- [50] L. Clavelli, P. W. Coulter, L. R. Surguladze, *Phys. Rev. D*, **55**:7 (1997), 4268–4272, arXiv: hep-ph/9611355.
- [51] T. Banks, A. Zaks, *Nucl. Phys. B*, **196**:2 (1982), 189–204.