Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Н. Липатов, Свойства аналитичности высокоэнергетических амплитуд рождения для $N = 4$ суперсимметрии, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 2, 206–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6759>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 05:40:07

© 2012 г.

Л. Н. Липатов^{*†}

СВОЙСТВА АНАЛИТИЧНОСТИ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ АМПЛИТУД РОЖДЕНИЯ ДЛЯ $N = 4$ СУПЕРСИММЕТРИИ

Исследуются свойства аналитичности шестихвостной планарной амплитуды в $N = 4$ суперсимметрии в мультiredжевской кинематике для частиц в конечном состоянии. При неупругих процессах важную роль играют соотношения Стайнмана, поскольку они позволяют фиксировать фазовую структуру вкладов полюса Редже и манделстамовского разреза. Эти вклады инвариантны относительно преобразования Мёбиуса в поперечном импульсном пространстве. Свойства аналитичности и факторизации позволяют воспроизвести двухпетлевые поправки к шестихвостной амплитуде Берна–Диксона–Смирнова в $N = 4$ суперсимметрии, полученные ранее в приближении главных логарифмов с использованием унитарности в s -канале. Кроме того, исследована гипотеза экспоненцирования для так называемой остаточной функции в мультiredжевской кинематике. Шестихвостную амплитуду в приближении главных логарифмов можно полностью воспроизвести из анзаца Берна–Диксона–Смирнова с использованием аналитичности и факторизации Редже.

Ключевые слова: свойства аналитичности, уравнение Балицкого–Фади́на–Кураева–Липатова, планарные амплитуды, суперсимметрия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Амплитуда упругого рассеяния в квантовой хромодинамике (КХД) при высоких энергиях $\sqrt{s}$ и фиксированном переданном импульсе $q = \sqrt{-t}$ для перехода $AB \rightarrow A'B'$ при определенных спиральностях частиц λ_i в приближении главных логарифмов (ПГЛ) имеет реджевский вид [1]

$$A_{2 \rightarrow 2} = 2g\delta_{\lambda_A \lambda_{A'}} T_{AA'}^c \frac{s^{1+\omega(t)}}{t} gT_{BB'}^c \delta_{\lambda_B \lambda_{B'}}, \quad t = -\vec{q}^2. \quad (1)$$

Глюонная траектория Редже $j(t) = 1 + \omega(t)$ в ПГЛ имеет вид

$$\omega(-\vec{q}^2) = -\frac{\alpha_s N_c}{(2\pi)^2} (2\pi\mu)^{2\epsilon} \int d^{2-2\epsilon}k \frac{\vec{q}^2}{\vec{k}^2(\vec{q}-\vec{k})^2} \approx -a \left(\ln \frac{\vec{q}^2}{\mu^2} - \frac{1}{\epsilon} \right), \quad (2)$$

^{*}Санкт-Петербургский институт ядерной физики, Гатчина, Россия.
E-mail: lipatov@thd.npi.spb.ru

[†]Institute for Theoretical Physics, Hamburg University, Germany

где введена размерная регуляризация ($D = 4 - 2\epsilon$), а μ – точка перенормировки для константы взаимодействия g Хоофта

$$a = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi} (4\pi e^{-\gamma})^\epsilon. \quad (3)$$

Глюонная траектория также известна в следующем за главным приближении в КХД [2] и в суперсимметричных калибровочных моделях [3].

Для нахождения полного сечения в ПГЛ достаточно вычислить амплитуды рождения в мультiredжевской кинематике для глюонов в конечном состоянии. Они имеют простой факторизованный вид [1]:

$$\begin{aligned} A_{2 \rightarrow 2+n} = & -2sg\delta_{\lambda_A \lambda_{A'}} T_{AA'}^{c_1} \frac{s_1^{\omega(-\vec{q}_1^2)}}{\vec{q}_1^2} g C_\mu(q_2, q_1) e_\mu^*(k_1) \times \\ & \times T_{c_2 c_1}^{d_1} \frac{s_2^{\omega(-\vec{q}_2^2)}}{\vec{q}_2^2} \dots \frac{s_{n+1}^{\omega(-\vec{q}_{n+1}^2)}}{\vec{q}_{n+1}^2} g \delta_{\lambda_B \lambda_{B'}} T_{BB'}^{c_{n+1}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$s = (p_A + p_B)^2 \gg s_r = (k_r + k_{r-1})^2 \gg \vec{q}_r^2, \quad k_r = q_{r+1} - q_r. \quad (5)$$

Матрицы T_{bc}^a представляют собой генераторы калибровочной группы $SU(N_c)$ в присоединенном представлении, а $C_\mu(q_r, q_{r-1})$ – эффективные реджеон-реджеон-глюонные вершины. В случае, когда вектор поляризации $e_\mu(k_1)$ описывает рождающийся глюон с определенной спиральностью, можно получить [4]

$$C \equiv C_\mu(q_2, q_1) e_\mu^*(k_1) = \sqrt{2} \frac{q_2^* q_1}{k_1^*}, \quad (6)$$

где использовано комплексное обозначение $q = q_x + iq_y$ для двумерных поперечных векторов.

Амплитуду упругого рассеяния с вакуумными квантовыми числами в t -канале можно вычислить, используя унитарность в s -канале [1]. В этом подходе померон появляется как составное состояние двух реджеонизованных глюонов. Удобно представить поперечные глюонные координаты в комплексном виде вместе с их канонически-сопряженными импульсами:

$$\rho_k = x_k + iy_k, \quad \rho_k^* = x_k - iy_k, \quad p_k = i \frac{\partial}{\partial \rho_k}, \quad p_k^* = i \frac{\partial}{\partial \rho_k^*}. \quad (7)$$

В координатном представлении уравнение Балицкого–Фадина–Кураева–Липатова (БФКЛ) для волновой функции померона можно записать как [1]

$$E\Psi(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = H_{12}\Psi(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2), \quad \Delta = -\frac{\alpha_s N_c}{2\pi} \min E, \quad (8)$$

где Δ – померонный интерсепт, входящий в выражение $\sigma_t \sim s^\Delta$ для высокоэнергетических асимптотик полного сечения. Гамильтониан БФКЛ имеет простое операторное представление [5]:

$$H_{12} = \ln |p_1 p_2|^2 + \frac{1}{p_1 p_2^*} (\ln |\rho_{12}|^2) p_1 p_2^* + \frac{1}{p_1^* p_2} (\ln |\rho_{12}|^2) p_1^* p_2 - 4\psi(1), \quad (9)$$

где $\rho_{12} = \rho_1 - \rho_2$ и $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$. Кинетическая энергия пропорциональна сумме двух глюонных траекторий Редже $\omega(-|p|_i^2)$, $i = 1, 2$. Потенциальная энергия $\sim \ln |\rho_{12}|^2$ связана с произведением вершин рождения двух глюонов C_μ . Гамильтониан инвариантен относительно преобразования Мёбиуса [6]

$$\rho_k \rightarrow \frac{a\rho_k + b}{c\rho_k + d}, \quad (10)$$

где a , b , c и d – комплексные параметры. Собственные значения двух операторов Казимира выражаются в терминах соответствующих конформных весов как

$$m = \frac{1}{2} + i\nu + \frac{n}{2}, \quad \tilde{m} = \frac{1}{2} + i\nu - \frac{n}{2}, \quad (11)$$

и для главной серии унитарных представлений $SL(2, C)$ параметр ν является вещественным, а n – целым.

Оказывается, что БФКЛ-померон обладает в ПГЛ положительным интерсептом $\Delta = g^2 N_c \ln 2 / \pi^2$, что не согласуется с унитарностью в s -канале. Чтобы восстановить унитарность, нужно учесть диаграммы с произвольным числом реджезованных глюонов в t -канале. Составные состояния этих глюонов описываются уравнением Бартелса–Квечинского–Прашалоновича (БКП) [7]. В пределе $N_c \rightarrow \infty$ соответствующий гамильтониан имеет свойство голоморфной отделимости [8]:

$$H = \frac{1}{2} \sum_k H_{k,k+1} = \frac{1}{2} (h + h^*), \quad [h, h^*] = 0. \quad (12)$$

Голоморфный гамильтониан представляет собой сумму БФКЛ-гамильтонианов $h_{k,k+1}$:

$$h = \sum_k h_{k,k+1}, \quad h_{12} = \ln(p_1 p_2) + \frac{1}{p_1} (\ln \rho_{12}) p_1 + \frac{1}{p_2} (\ln \rho_{12}) p_2 - 2\psi(1). \quad (13)$$

Соответственно волновая функция Ψ обладает свойством голоморфной факторизации [8] и является дуально-симметричной относительно преобразования [9]

$$p_i \rightarrow \rho_{i,i+1} \rightarrow p_{i+1}. \quad (14)$$

Более того, в голоморфном и антиголоморфном секторах имеются интегралы движения, коммутирующие между собой и с h [5], [10].

Интегрируемость БФКЛ-динамики впервые была показана в работе [10]. Это связано с тем фактом, что в ПГЛ h совпадает с локальным гамильтонианом гейзенберговской спиновой модели [11].

В следующем за главным логарифмическом приближении интегральное ядро для уравнения БФКЛ было построено в работах [3], [12]. Вследствие мёбиусовской инвариантности решения уравнений БФКЛ и БКП можно классифицировать по аномальной размерности $\gamma = 1/2 + i\nu$ операторов с твистом 2 и конформным спином $|n|$.

Исходно собственное значение ядра БФКЛ в следующем за главным приближении было вычислено в КХД (см. работы [12]). Оно содержит вклады, пропорциональные символам Кронекера $\delta_{n,0}$ и $\delta_{n,2}$. Однако в $N = 4$ суперсимметрии эти неаналити-

ческие члены сокращаются, и в работах [3], [13] было получено простое выражение, обладающее свойствами эрмитовой отделимости. Более того, окончательный результат для двухпетлевого случая представляет собой сумму специальных функций, обладающих свойствами максимальной трансцендентальности [13]. В ином контексте в этой модели была вычислена однопетлевая матрица аномальных размерностей для операторов твиста 2, при этом собственные значения оказались пропорциональными $\psi(1) - \psi(j - 1)$, что связано с интегрируемостью уравнения эволюции для квазипартонных операторов в $N = 4$ суперсимметрии [14]. Для других операторов интегрируемость в этой модели была установлена также и в высших петлях [15], [16].

Принцип максимальной трансцендентальности, предложенный в работе [13], позволяет выделить универсальную аномальную размерность вплоть до трех петель в $N = 4$ суперсимметрии [17], [18] из результатов КХД [19]. Этот принцип также был полезен при нахождении замкнутого интегрального уравнения для касповой аномальной размерности в этой модели [20], [21], удовлетворяющей соответствию АдС–КТП (конформная теория поля) [22]–[24]. В рамках асимптотического анзаца Бете с поправками за счет конечных размеров принцип максимальной трансцендентальности позволяет вычислить аномальную размерность вплоть до пяти петель [25] в соответствии с предсказаниями БФКЛ. Более того, в работах [18], [26] был получен интерсепт БФКЛ-померона при больших значениях постоянной взаимодействия t' Хоофта в $N = 4$ суперсимметрии. Следующие за главным порядком поправки к уравнению БФКЛ можно получить, используя эффективное действие для взаимодействий реджезованных глюонов [27], [28].

Простой анзац для амплитуд рождения глюонов с максимальным нарушением спиральности в планарном пределе для $N = 4$ суперсимметрии был предложен в работе Берна, Диксона и Смирнова (БДС) [29]. Этот анзац в упругом случае при большом значении константы взаимодействия получил подтверждение в работе [30]. Однако впоследствии были получены предсказания для многочастичной амплитуды рождения, отличающиеся от сделанных БДС [31]. В работе [32] было показано, что уже в шестихвостном случае анзац БДС не согласуется с соотношениями Стайнмана [33], которые эквивалентны требованию того, что амплитуда рождения не имеет одновременных особенностей в перекрывающихся каналах. Результат БДС также не получил подтверждения прямыми двухпетлевыми вычислениями [34]. Причина нарушения анзаца БДС связана с тем, что амплитуда БДС для перехода $2 \rightarrow 4$ в мультiredжевской кинематике не содержит вклада от манделстамовского разреза [35]. Эта новая особенность появляется в j_2 -плоскости в t_2 -канале в физических кинематических областях, где инварианты в прямых каналах имеют знаки $s, s_2 > 0$, $s_1, s_3 < 0$ или $s, s_1, s_2, s_3 < 0$, $s_{012}, s_{123} > 0$ [32]. В ПГЛ вклад разреза для шестихвостной амплитуды был вычислен с использованием уравнения БФКЛ [36]. Соответствующую амплитуду в области $s, s_2 > 0$, $s_1, s_3 < 0$ можно записать в факторизованном виде:

$$M_{2 \rightarrow 4} = M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}}(1 + i\Delta_{2 \rightarrow 4}), \quad (15)$$

где $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}}$ – амплитуда БДС [29], а

$$\Delta_{2 \rightarrow 4} = \frac{a}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2 + n^2/4} \left(\frac{q_3^* k_a^*}{k_b^* q_1^*} \right)^{i\nu - n/2} \left(\frac{q_3 k_a}{k_b q_1} \right)^{i\nu + n/2} (s_2^{\omega(\nu, n)} - 1). \quad (16)$$

Здесь k_a, k_b – поперечные компоненты импульсов получающегося глюона, q_1, q_2, q_3 – импульсы реджеонов в соответствующих кроссканалах и

$$\omega(\nu, n) = 4a \operatorname{Re} \left(2\psi(1) - \psi \left(1 + i\nu + \frac{n}{2} \right) - \psi \left(1 + i\nu - \frac{n}{2} \right) \right). \quad (17)$$

Поправка Δ представляет собой мёбиусовский инвариант в импульсном пространстве и в соответствии с результатами работ [37] может быть выражена через четырехмерные ангармонические отношения [36].

Кроме того, было показано, что в общем случае манделстамовского разреза, соответствующего составному состоянию n реджезованных глюонов, гамильтониан совпадает с локальным гамильтонианом для открытой интегрируемой гейзенберговской спиновой цепочки [38].

В настоящей работе мы воспроизводим некоторые результаты работы [36], используя общие аргументы, основанные только на аналитичности и факторизации шестихвостной амплитуды, без каких-либо условий унитарности, встроенных в подход БФКЛ. Кроме того, в ПГЛ исследован экспоненцирующий анзац с дополнительным фазовым множителем для амплитуды БДС.

2. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ В МУЛЬТИРЕДЖЕВСКОЙ КИНЕМАТИКЕ

Амплитуду БДС [29] для перехода $2 \rightarrow 3$ можно записать в мультiredжевской кинематике в следующем виде, согласуя с соотношениями Стайнмана (см. работу [32]):

$$\frac{M_{2 \rightarrow 3}^{\text{BDS}}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)} = (-s_1)^{\omega_{12}} (-s\kappa_{12})^{\omega_2} c_1^{12} + (-s_2)^{\omega_{21}} (-s\kappa_{12})^{\omega_1} c_2^{12}, \quad \kappa_{12} = |k_a|^2, \quad (18)$$

где $\Gamma(t_i)$ – вычеты реджезованных глюонов, k_a – поперечный импульс рожденной частицы; точку нормировки μ^2 в реджевских множителях мы положили равной единице. Реджевские траектории глюона имеют вид

$$\omega_r = \omega(|q_r|^2) = -\frac{\gamma_K}{4} \ln \frac{|q_r|^2}{\lambda^2}, \quad \gamma_K \approx 4a, \quad a = \frac{g^2 N_c}{8\pi^2}, \quad \omega_{12} = \omega_1 - \omega_2, \quad (19)$$

где γ_K – касповая аномальная размерность, а $\lambda^2 = \mu^2 e^{1/\epsilon}$ для $D = 4 - 2\epsilon$ при $\epsilon \rightarrow -0$. Вещественные коэффициенты c_1^{12}, c_2^{12} равны [32]

$$c_1^{12} = |\Gamma_{12}| \frac{\sin(\pi(\omega_1 - \omega_a))}{\sin(\pi\omega_{12})}, \quad c_2^{12} = |\Gamma_{12}| \frac{\sin(\pi(\omega_2 - \omega_a))}{\sin(\pi\omega_{21})}, \quad (20)$$

где реджеон-реджеон-глюонная вершина Γ_{12} в физической области $s, s_1, s_2 > 0$ имеет вид

$$\Gamma_{12}(\ln \kappa_{12} - i\pi) = |\Gamma_{12}| e^{i\pi\omega_a}, \quad \omega_a = \frac{\gamma_K}{8} \ln \frac{|k_a|^2 \lambda^2}{|q_1|^2 |q_2|^2}, \quad (21)$$

$$\ln |\Gamma_{12}| = \frac{\gamma_K}{4} \left(-\frac{1}{4} \ln^2 \frac{|k_a|^2}{\lambda^2} - \frac{1}{4} \ln^2 \frac{|q_1|^2}{|q_2|^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{|q_1|^2 |q_2|^2}{\lambda^4} \ln \frac{|k_a^2|}{\mu^2} + \frac{5}{4} \zeta_2 \right). \quad (22)$$

Хорошо известно, что одночастичная амплитуда рождения с обменами реджеонами с определенными сигнатурами $\tau_1, \tau_2 = \pm 1$ в кроссканалах t_1 и t_2 имеет факторизованный вид во всех физических областях [39]:

$$\frac{M_{2 \rightarrow 3}^{\tau_1 \tau_2}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)} = |s_1|^{\omega_1} \xi_1 V^{\tau_1 \tau_2} |s_2|^{\omega_2} \xi_2, \quad V^{\tau_1 \tau_2} = \frac{\xi_{12}}{\xi_1} c_1^{12} + \frac{\xi_{21}}{\xi_2} c_2^{12}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= e^{-i\pi\omega_1} - \tau_1, & \xi_2 &= e^{-i\pi\omega_2} - \tau_2, \\ \xi_{12} &= e^{-i\pi\omega_{12}} + \tau_1\tau_2, & \xi_{21} &= e^{-i\pi\omega_{21}} + \tau_1\tau_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Более того, при рождении двух частиц в мультиреджевской кинематике амплитуду с определенными сигнатурами τ_i в трех кроссканалах можно также представить в факторизованном виде [39]:

$$\frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\tau_1 \tau_2 \tau_3}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_3)} = |s_1|^{\omega_1} \xi_1 V^{\tau_1 \tau_2} |s_2|^{\omega_2} \xi_2 V^{\tau_2 \tau_3} |s_3|^{\omega_3} \xi_3, \quad (25)$$

где $V^{\tau_2 \tau_3}$ получается из $V^{\tau_1 \tau_2}$ (23) соответствующими подстановками:

$$V^{\tau_2 \tau_3} = \frac{\xi_{23}}{\xi_2} c_1^{23} + \frac{\xi_{32}}{\xi_3} c_2^{23}. \quad (26)$$

Для второго рождающегося глюона с поперечным импульсом k_b коэффициенты c^{23} и фаза ω_b имеют вид

$$c_1^{23} = |\Gamma_{23}| \frac{\sin(\pi(\omega_2 - \omega_b))}{\sin(\pi\omega_{23})}, \quad c_2^{23} = |\Gamma_{23}| \frac{\sin(\pi(\omega_3 - \omega_b))}{\sin(\pi\omega_{32})}, \quad (27)$$

$$\omega_b = \frac{\gamma_K}{8} \ln \frac{|k_b|^2 \lambda^2}{|q_2|^2 |q_3|^2}, \quad |k_b|^2 = \left| \frac{s_2 s_3}{s_{123}} \right|. \quad (28)$$

В соответствии с соотношениями Стайнмана гипотеза Редже приводит к следующему выражению для вклада полюса Редже $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}}$ [32], [39]:

$$\begin{aligned} \frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_3)} &= (-s_1)^{\omega_{12}} (-s_{012}\kappa_{12})^{\omega_{23}} (-s\kappa_{12}\kappa_{23})^{\omega_3} c_1^{12} c_1^{23} + \\ &+ (-s_3)^{\omega_{32}} (-s_{123}\kappa_{23})^{\omega_{21}} (-s\kappa_{12}\kappa_{23})^{\omega_1} c_2^{12} c_2^{23} + \\ &+ (-s\kappa_{12}\kappa_{23})^{\omega_2} (-s_1)^{\omega_{12}} (-s_3)^{\omega_{32}} c_1^{12} c_2^{23} + \\ &+ (-s_2)^{\omega_{21}} (-s_{012}\kappa_{12})^{\omega_{13}} (-s\kappa_{12}\kappa_{23})^{\omega_3} \frac{\sin(\pi\omega_1)}{\sin(\pi\omega_2)} \frac{\sin(\pi\omega_{23})}{\sin(\pi\omega_{13})} c_2^{12} c_1^{23} + \\ &+ (-s_2)^{\omega_{23}} (-s_{123}\kappa_{23})^{\omega_{31}} (-s\kappa_{12}\kappa_{23})^{\omega_1} \frac{\sin(\pi\omega_3)}{\sin(\pi\omega_2)} \frac{\sin(\pi\omega_{21})}{\sin(\pi\omega_{31})} c_2^{12} c_1^{23}. \end{aligned} \quad (29)$$

Это представление выполнено во всех физических областях, различающихся знаками импульсов p_A, p_B, k_1 и k_2 . Используя тождество

$$\frac{\sin(\pi\omega_1)}{\sin(\pi\omega_2)} \frac{\sin(\pi\omega_{23})}{\sin(\pi\omega_{13})} \frac{\xi_{13}\xi_2}{\xi_{23}\xi_1} + \frac{\sin(\pi\omega_3)}{\sin(\pi\omega_2)} \frac{\sin(\pi\omega_{21})}{\sin(\pi\omega_{31})} \frac{\xi_{31}\xi_2}{\xi_{21}\xi_3} = 1, \quad (30)$$

можно проверить факторизацию Редже для амплитуд с определенными сигнатурами $M_{2 \rightarrow 4}^{\tau_1 \tau_2 \tau_3}$ (25). Заметим, что имеет место еще одно полезное соотношение:

$$\frac{\sin(\pi\omega_1) \sin(\pi\omega_{23})}{\sin(\pi\omega_2) \sin(\pi\omega_{13})} + \frac{\sin(\pi\omega_3) \sin(\pi\omega_{21})}{\sin(\pi\omega_2) \sin(\pi\omega_{31})} = 1. \quad (31)$$

Амплитуду рождения двух глюонов в мультiredжевской кинематике можно записать как сумму реджевского полюса и вкладов от манделстамовского разреза [32]

$$M_{2 \rightarrow 4} = M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}} + M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}, \quad (32)$$

где $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}$ не равно нулю только в двух кинематических областях, задаваемых неравенствами $s, s_2 > 0, s_1, s_3 < 0$ и $s, s_1, s_2, s_3 < 0, s_{012}, s_{123} > 0$.

Отвечающее полюсу слагаемое (29) в области $s, s_2 > 0, s_1, s_3 < 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}}}{|s_1|^{\omega_1} |s_2|^{\omega_2} |s_3|^{\omega_3} \Gamma(t_1) \Gamma(t_3)} &= e^{-i\pi\omega_3} c_1^{12} c_1^{23} + e^{-i\pi\omega_1} c_2^{12} c_2^{23} + e^{-i\pi\omega_2} c_1^{12} c_2^{23} + \\ &+ e^{-i\pi\omega_2} \left(e^{i\pi\omega_{13}} \frac{\sin(\pi\omega_1) \sin(\pi\omega_{23})}{\sin(\pi\omega_2) \sin(\pi\omega_{13})} + e^{-i\pi\omega_{13}} \frac{\sin(\pi\omega_3) \sin(\pi\omega_{21})}{\sin(\pi\omega_2) \sin(\pi\omega_{31})} \right) c_2^{12} c_1^{23}. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя соотношение

$$\begin{aligned} e^{i\pi\omega_{13}} \frac{\sin(\pi\omega_1) \sin(\pi\omega_{23})}{\sin(\pi\omega_2) \sin(\pi\omega_{13})} + e^{-i\pi\omega_{13}} \frac{\sin(\pi\omega_3) \sin(\pi\omega_{21})}{\sin(\pi\omega_2) \sin(\pi\omega_{31})} &= \\ = \cos(\pi\omega_{13}) + i \frac{\sin(\pi\omega_1) \sin(\pi\omega_{23}) + \sin(\pi\omega_3) \sin(\pi\omega_{21})}{\sin(\pi\omega_2)}, \end{aligned} \quad (34)$$

можно упростить этот результат:

$$\begin{aligned} \frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}}}{|s_1|^{\omega_1} |s_2|^{\omega_2} |s_3|^{\omega_3} |\Gamma_{12}| |\Gamma_{23}| \Gamma(t_1) \Gamma(t_3)} &= \\ = -e^{-i\pi\omega_2} \frac{\sin(\pi\omega_{2a})}{\sin(\pi\omega_{12})} \left(e^{-i\pi\omega_{1b}} + 2i \frac{\sin(\pi\omega_1)}{\sin(\pi\omega_2)} \sin(\pi\omega_{2b}) \right) + \\ + e^{-i\pi\omega_b} \frac{\sin(\pi\omega_{1a})}{\sin(\pi\omega_{12})} = \frac{2 \sin(\pi\omega_a) \sin(\pi\omega_b)}{i \sin(\pi\omega_2)} + e^{-i\pi\omega_2} e^{i\pi(\omega_a + \omega_b)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Можно представить M^{pole} в области $s, s_2 > 0, s_1, s_3 < 0$ как сумму трех вкладов:

$$\begin{aligned} \frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}}}{|s_1|^{\omega_1} |s_2|^{\omega_2} |s_3|^{\omega_3} |\Gamma_{12}| |\Gamma_{23}| \Gamma(t_1) \Gamma(t_3)} &= \frac{2e^{-i\pi\omega_2} \cos(\pi\omega_2) \sin(\pi\omega_a) \sin(\pi\omega_b)}{i \sin(\pi\omega_2)} + \\ + ie^{-i\pi\omega_2} \sin(\pi(\omega_a + \omega_b)) + e^{-i\pi\omega_2} \cos(\pi\omega_{ab}), \quad \omega_{ab} = \frac{\gamma_K}{4} \ln \frac{|k_a| |q_3|}{|k_b| |q_1|}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь два первых слагаемых имеют фазовую структуру вклада от разреза $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}$, рассмотренного ниже в выражении (40), и их можно туда включить, что позволяет переопределить $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}}$ как

$$\frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}}}{|s_1|^{\omega_1} |s_2|^{\omega_2} |s_3|^{\omega_3} |\Gamma_{12}| |\Gamma_{23}| \Gamma(t_1) \Gamma(t_3)} = e^{-i\pi\omega_2} \cos(\pi\omega_{ab}). \quad (37)$$

Действительно, в соответствии с обсуждавшимся выше представлением для планарных амплитуд в мультiredжевской кинематике вклад от разреза можно представить следующим образом (это соответствует двум последним слагаемым в выражении для вклада от полюса (29)) (ср. с работой [38]):

$$M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}} \sim (1 - \Phi^{\omega_{13}})(-s_{012}\kappa_{12})^{\omega_{13}}(-s\kappa_{12}\kappa_{23})^{\omega_3}(-s_2)^{\omega_{21}} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\omega_{2'}}{2\pi i} \phi(\omega_{2'})(-s_2)^{\omega_{2'}}. \quad (38)$$

Здесь мы ввели величину Φ , которая совпадает с ангармоническим отношением, связанным с конформной инвариантностью амплитуд рождения в импульсном пространстве:

$$\Phi = \frac{ss_2}{s_{012}s_{123}}, \quad 1 - \Phi \approx \frac{|k_a + k_b|^2}{s_2}, \quad (39)$$

а парциальная волна $\phi(\omega_2)$ вещественна при вещественном ω_2 и зависит от различных инвариантов в кроссканалах. Приведенное выше выражение для $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}$ отлично от нуля только в двух областях, где $\Phi = e^{\mp 2\pi i}$ (на самом деле этот факт фиксирует относительный коэффициент для двух слагаемых в первом множителе в выражении (38)). Из этого представления можно заключить, что фазовая структура вклада от разреза при $s, s_2 > 0$, $s_1, s_3 < 0$ (что соответствует $\Phi = e^{-2\pi i}$) определяется выражением

$$\frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}}{|s_1|^{\omega_1}|s_2|^{\omega_2}|s_3|^{\omega_3}|\Gamma_{12}||\Gamma_{23}|\Gamma(t_1)\Gamma(t_3)} = ie^{-i\pi\omega_2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\omega_{2'}}{2\pi i} f(\omega_{2'})e^{-i\pi\omega_{2'}}|s_2|^{\omega_{2'}}. \quad (40)$$

Переопределенная парциальная волна $f(\omega_{2'})$ может содержать полюс $\sim 1/\omega_{2'}$, позволяющий поглотить слагаемые $\sim ie^{-i\pi\omega_2}$ из $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}}$ в $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}$, как это было сделано при переходе от формулы (36) к выражению (37).

Аналогично вклады от полюса и разреза в области $s, s_1, s_2, s_3 > 0$, $s_{012}, s_{123} > 0$ ($\Phi = e^{2\pi i}$) можно представить в виде

$$\frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}}}{|s_1|^{\omega_1}|s_2|^{\omega_2}|s_3|^{\omega_3}|\Gamma_{12}||\Gamma_{23}|\Gamma(t_1)\Gamma(t_3)} = \cos(\pi\omega_{ab}), \quad (41)$$

$$\frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}}{|s_1|^{\omega_1}|s_2|^{\omega_2}|s_3|^{\omega_3}|\Gamma_{12}||\Gamma_{23}|\Gamma(t_1)\Gamma(t_3)} = -i \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\omega_{2'}}{2\pi i} f(\omega_{2'})|s_2|^{\omega_{2'}}. \quad (42)$$

3. СВОЙСТВА ФАКТОРИЗАЦИИ И АНАЛИТИЧНОСТИ $M_{2 \rightarrow 4}$

В мультiredжевской кинематике для физического канала, в котором $s, s_2 > 0$, $s_1, s_3 < 0$, амплитуда БДС имеет вид (см. работу [32])

$$\frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}}}{|s_1|^{\omega_1}|s_2|^{\omega_2}|s_3|^{\omega_3}|\Gamma_{12}||\Gamma_{23}|\Gamma(t_1)\Gamma(t_3)} = C e^{-i\pi\omega_2} e^{i\pi(\omega_a + \omega_b)} = e^{-i\pi\omega_2} e^{i\pi\delta}, \quad (43)$$

где

$$\delta = \frac{\gamma_K}{4} \ln \frac{|q_1||q_2||k_a||k_b|}{|k_a + k_b|^2|q_2|^2} \quad (44)$$

и для фазового множителя C мы использовали выражение

$$C = \exp\left(\frac{\gamma_K}{4} i\pi \ln \frac{|q_1|^2|q_3|^2}{|k_a + k_b|^2\lambda^2}\right). \quad (45)$$

Заметим, что фаза δ не содержит инфракрасных расходимостей, и ее можно записать в виде

$$\delta = \frac{\gamma_K}{8} \ln \frac{u_2 u_3}{(1 - u_1)^2}, \quad (46)$$

где u_r – ангармонические отношения инвариантов в импульсном пространстве:

$$u_1 = \Phi = \frac{ss_2}{s_{123}s_{012}}, \quad u_2 = \frac{s_3 t_1}{s_{123} t_2}, \quad u_3 = \frac{s_1 t_3}{s_{012} t_2}. \quad (47)$$

Соответственно в физической области, где $s, s_1, s_2, s_3 < 0$, $s_{012}, s_{123} > 0$, амплитуду БДС можно записать следующим образом:

$$\frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}}}{|s_1|^{\omega_1} |s_2|^{\omega_2} |s_3|^{\omega_3} |\Gamma_{12}| |\Gamma_{23}| \Gamma(t_1) \Gamma(t_3)} = C e^{-i\pi\omega_2} e^{i\pi(\omega_a + \omega_b)} = e^{-i\pi\delta}. \quad (48)$$

Согласно гипотезе, сформулированной в работах [31], [40], правильное выражение для $M_{2 \rightarrow 4}$ можно получить из $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}}$, умножая его на множитель c , являющийся функцией этих ангармонических отношений:

$$M_{2 \rightarrow 4} = c M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}}. \quad (49)$$

Гипотеза факторизации вместе с обсуждавшимся выше представлением $M_{2 \rightarrow 4}$ в виде суммы вкладов реджевского полюса и манделштамовского разреза (32) приводит к следующему соотношению для c , справедливому в области $s, s_2 > 0$, $s_1, s_3 < 0$:

$$c e^{i\pi\delta} = \cos(\pi\omega_{ab}) + i \int_{-\infty}^{i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} f(\omega) e^{-i\pi\omega} (1 - u_1)^{-\omega}, \quad 1 - u_1 \approx \frac{|k_a + k_b|^2}{s_2} \rightarrow +0. \quad (50)$$

Здесь $f(\omega)$ – вещественная функция, зависящая от двух инвариантных переменных

$$\phi_2 = \frac{u_2}{1 - u_1} \approx \frac{|q_1|^2 |k_b|^2}{|k_a + k_b|^2 |q_2|^2}, \quad \phi_3 = \frac{u_3}{1 - u_1} \approx \frac{|q_3|^2 |k_a|^2}{|k_a + k_b|^2 |q_2|^2}. \quad (51)$$

Фазы δ и ω_{ab} также можно выразить в терминах этих переменных:

$$\delta = \frac{\gamma_K}{8} \ln(\phi_3 \phi_2), \quad \omega_{ab} = \frac{\gamma_K}{8} \ln \frac{\phi_3}{\phi_2}. \quad (52)$$

Аналогично для амплитуды рождения в области $s, s_1, s_2, s_3 < 0$, $s_{012}, s_{123} > 0$ можно вывести соотношение

$$c e^{-i\pi\delta} = \cos(\pi\omega_{ab}) - i \int_{-\infty}^{i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} f(\omega) (u_1 - 1)^{-\omega}, \quad u_1 > 1. \quad (53)$$

Приведенные выше представления для c справедливы на вторых листах римановой поверхности этой функции при $u_1 \rightarrow 1$. В квазимультiredжевской кинематике $s_1, s_3 \gg s_2 \sim t_1 \sim t_2 \sim t_3$ ангармоническое отношение u_1 не близко к единице. Первый лист римановой поверхности для c соответствует амплитуде рождения $M_{2 \rightarrow 4}$ в кинематической области, где $s, s_1, s_2, s_3 > 0$. В этой области амплитуда регулярна при $u_1 = 1$ и имеет сингулярность при $u_1 = 0$.

Для иллюстрации этих свойств аналитичности рассмотрим амплитуду БДС в области $s, s_1, s_2, s_3 > 0$. Она содержит следующие зависимости от u_1 [32]:

$$\ln M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}} = -\frac{\gamma_K}{8} \left(\text{Li}_2(1 - u_1) + \ln u_1 \ln(-\sqrt{u_2 u_3}) + \frac{1}{2} \ln^2 u_1 \right) + \dots, \quad (54)$$

куда мы включили также фазу $i\pi(\omega_a + \omega_b)$ и использовали тождество

$$\frac{|q_1| |q_3| |k_1| |k_2|}{-s_2 |q_2|^2} = -\sqrt{u_2 u_3}. \quad (55)$$

Используя интегральное представление для функции дилогарифма $\text{Li}_2(z)$

$$\text{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{dx}{x} \ln(1 - x) = z \int_1^\infty \frac{dz'}{z'(z' - z)} \ln z', \quad (56)$$

можно заключить, что однопетлевая амплитуда БДС [29] имеет сингулярности при $u_1 = 0$:

$$I_6^{(1)} + F_6^{(1)} = -\frac{\gamma_K}{8} \int_{-\infty}^0 \frac{(1 - u_1) du'_1}{(1 - u'_1)(u_1 - u'_1)} (\ln(1 - u'_1) - \ln(-\sqrt{u_2 u_3}) - \ln(-u'_1)) + \dots \quad (57)$$

В мультитреджевском режиме, где $s, s_2 > 0$, $s_1, s_3 < 0$, инвариант u_1 близок к единице:

$$u_1 \approx e^{-2\pi i} \left(1 - \frac{|k_1 + k_2|^2}{s_2} \right), \quad (58)$$

а амплитуда должна продолжаться на второй лист плоскости u_1 через нижний край разреза при $u_1 < 0$, что порождает дополнительный член (см. работу [32])

$$\Delta(I_6^{(1)} + F_6^{(1)}) = -\pi i \frac{\gamma_K}{4} \left(\ln(1 - u_1) - \ln \frac{t_1 t_3}{s_2 \lambda^2} - \ln u_1 \right). \quad (59)$$

Заметим, что этот член также имеет сингулярность при $u_1 = 1$ и является чисто мнимым в физической области $u_1 < 1$.

В следующем разделе мы рассмотрим двухпетлевой вклад. В этом случае второй порядок разложения экспоненты БДС на первом листе также можно представить в виде дисперсионного интеграла, связывающего его вещественную и мнимую части. Однако это выражение не согласуется с соотношениями Стайнмана.

4. ДВУХПЕТЛЕВАЯ АМПЛИТУДА РОЖДЕНИЯ $M_{2 \rightarrow 4}$

Для амплитуды рождения в ПГЛ с использованием унитарности в s -канале было получено следующее выражение для $M_{2 \rightarrow 4}$ в области $s, s_2 > 0$, $s_1, s_3 < 0$ для двухпетлевого случая [36]:

$$M_{2 \rightarrow 4} = c M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}}, \quad c = 1 + \frac{a^2}{4} r_2 + O(a^3), \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned} r_2 \approx & \text{Li}_2(1 - u_1) \ln \frac{(1 - u_1)}{u_2} \ln \frac{(1 - u_1)}{u_3} + \\ & + \text{Li}_2(1 - u_2) \ln \frac{(1 - u_2)}{u_3} \ln \frac{(1 - u_2)}{u_1} + \text{Li}_2(1 - u_3) \ln \frac{(1 - u_3)}{u_2} \ln \frac{(1 - u_3)}{u_1}. \end{aligned} \quad (61)$$

Здесь мы ввели четырехмерные ангармонические отношения (47) и включили дополнительные члены, чтобы обеспечить инвариантность $M_{2 \rightarrow 4}$ при циклических перестановках. Дополнительные вклады не существенны в мультiredжевской кинематике, хотя для точного двухпетлевого результата они важны. Заметим, что другая физическая область $s, s_1, s_2, s_3 < 0, s_{012}, s_{123} > 0$, где $u_1 = e^{2\pi i}$, также правильно описывается приведенным выше выражением (61) для r_2 .

Кроме того, следует учитывать аналогичный вклад от разреза в амплитуду перехода $3 \rightarrow 3$. Однако на самом деле он уже содержится в уравнении (61) вследствие соотношений (ср. с работами [32], [36])

$$\begin{aligned} \frac{s_{13}s_{02}}{st_2'} &= u_2 \rightarrow 1 + \frac{|q_1 + q_3 - q_2|^2}{t_2'}, & \frac{1 - u_2}{u_1} &\rightarrow \frac{|q_1 + q_3 - q_2|^2 |q_2|^2}{|q_3|^2 |q_1|^2}, \\ \frac{u_1}{u_3} &\rightarrow \frac{|q_3|^2 |q_1|^2}{|k_2|^2 |k_1|^2}. \end{aligned} \quad (62)$$

Таким образом, наше выражение (61) в двухпетлевом случае приводит к правильным мультiredжевским асимптотикам во всех каналах. Более того, конформная инвариантность в импульсном представлении также справедлива в случае высших петель в ПГЛ, если заменить ангармонические отношения в двумерном поперечном подпространстве соответствующими четырехмерными отношениями $u_{2,3}$, а степень логарифма $\ln s_2$ при больших s_2 – выражением

$$-2\pi i \frac{\ln^n s_2}{n} \rightarrow (-1)^{n-1} \int_0^{1-u_1} \frac{dt}{t} \ln^{n-1} t \ln(1-t), \quad (63)$$

которое можно записать в терминах функции полилогарифма $\text{Li}_{n+1}(z)$.

Разложим амплитуду БДС в области $s, s_2 > 0, s_{012}, s_{123} < 0$ в ряд по теории возмущений, чтобы исследовать возможность исправления плохих свойств аналитичности за счет множителя c , зависящего от ангармонических отношений. Ее можно представить в соответствующей кинематике в виде [32]

$$M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}} = C \Gamma(t_1) (-s_1)^{\omega_1} \Gamma(\ln \kappa_{12} - i\pi) (-s_2)^{\omega_2} \Gamma(\ln \kappa_{23} - i\pi) (-s_3)^{\omega_3} \Gamma(t_2), \quad (64)$$

который уже был упрощен выше (см. формулу (43)). Заметим, что фаза δ в выражении (44) не содержит инфракрасных расходимостей и зависит от ангармонического отношения в двумерном импульсном пространстве. Ее можно записать также в терминах четырехмерных ангармонических отношений (46).

Член первого порядка в разложении фазы по δ в формуле (43) соответствует вкладу манделстамовского разреза в однопетлевом приближении [32]. Член второго порядка $-\pi^2 \delta^2 / 2$ в разложении фазового множителя

$$e^{i\pi\delta} = 1 + i\pi\delta - \pi^2 \frac{\delta^2}{2} + \dots \quad (65)$$

противоречит соотношениям Стайнмана и аналитическим свойствам $M_{2 \rightarrow 4}$, если не учитывать дополнительный логарифмический вклад $\sim \ln s_2$, появляющийся в множителе c . С другой стороны, результат ПГЛ для c в двухпетлевом приближении после его аналитического продолжения в область $s, s_2 > 0, s_1, s_3 < 0$ можно записать

в виде [36]

$$c \approx 1 - 2\pi i \frac{a^2}{4} \ln s_2 \ln \frac{|k_2|^2 |q_1|^2}{|k_1 + k_2|^2 |q_2|^2} \ln \frac{|k_1|^2 |q_3|^2}{|k_1 + k_2|^2 |q_2|^2} + \dots \quad (66)$$

Он не содержит фазового множителя $e^{-\pi i}$ в аргументе $\ln s_2$ из-за чисто мнимой асимптотики функции $\text{Li}_2(1 - u_1)$ в формуле (61) при $u_1 \rightarrow e^{-2\pi i}$. Чтобы получить правильную вещественную часть для $F_{2 \rightarrow 4}$ в соответствии с фазовой структурой вклада от разреза (38), зависящего от аргумента $-s_2$, требуется где-то найти вещественный член

$$\Delta c = -\frac{a^2 \pi^2}{2} \ln \frac{|k_2|^2 |q_1|^2}{|k_1 + k_2|^2 |q_2|^2} \ln \frac{|k_1|^2 |q_3|^2}{|k_1 + k_2|^2 |q_2|^2}. \quad (67)$$

Замечательно, что эта поправка уже содержится в множителе БДС в выражении (49). Действительно, Δc можно записать как

$$\begin{aligned} \Delta c &= -\frac{a^2 \pi^2}{2} \left(\ln^2 \frac{|k_1| |k_2| |q_1| |q_2|}{|k_1 + k_2|^2 |q_2|} - \ln^2 \frac{|k_1| |q_3|}{|k_2| |q_1|} \right) \approx \\ &\approx -\frac{f_K^2 \pi^2}{32} \left(\ln^2 \frac{|k_1| |k_2| |q_1| |q_2|}{|k_1 + k_2|^2 |q_2|^2} - \ln^2 \frac{|k_1| |q_3|}{|k_2| |q_1|^2} \right) = -\pi^2 \frac{\delta^2}{2} + \pi^2 \frac{\omega_{ab}^2}{2}. \end{aligned} \quad (68)$$

Первый вклад $-\delta^2/2$ является членом второго порядка при разложении фазового множителя $e^{i\delta}$ в выражении (43), а второй вклад $\omega_{ab}^2/2$ имеет знак, противоположный знаку члена второго порядка в разложении множителя $\cos \omega_{ab}$, включенного во вклад от полюса $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}}$ (37). Заметим, что фазовый множитель $e^{-i\pi\omega_2}$ присутствует во всех трех амплитудах $M_{2 \rightarrow 4}$, $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}}$ и $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}$.

Таким образом, двухпетлевой результат для амплитуды рождения двух глюонов в ПГЛ находится в полном согласии с требованиями аналитичности и гипотезой факторизации (49). На самом деле этот результат полностью следует из указанных свойств без какой бы то ни было необходимости решать уравнение БФКЛ [36]. Более того, ядро БФКЛ можно вычислить из двухпетлевой поправки. Заметим, что свойства аналитичности вклада от разреза (38) предсказывают чисто мнимый результат также для поправки к r_2 (не пропорциональной $\ln s_2$). Недавно [41] это предсказание было подтверждено путем аналитического продолжения точного выражения для двухпетлевой амплитуды рождения, полученной в работах [42], [43]. Это означает, что представление шестихвостной амплитуды в терминах P -экспонент [40] согласуется с вкладом манделстамовского разреза по крайней мере в двухпетлевом случае [36].

Аналогично в физической области $s, s_1, s_2, s_3 < 0$, $s_{012}, s_{123} > 0$ множитель c в двухпетлевом случае можно представить в виде

$$c \approx 1 + 2\pi i \frac{a^2}{4} (\ln(-s_2) - i\pi) \ln \frac{|k_2|^2 |q_1|^2}{|k_1 + k_2|^2 |q_2|^2} \ln \frac{|k_1|^2 |q_3|^2}{|k_1 + k_2|^2 |q_2|^2} + \dots \quad (69)$$

Здесь вещественный член $\sim a^2 \pi^2$ противоречит свойствам аналитичности для вклада от манделстамовского разреза в данной области, и, как и выше, он сокращается с двухпетлевыми разложениями фазы БДС и вкладом от полюса:

$$\Delta c = -\pi^2 \frac{\delta^2}{2} + \pi^2 \frac{\omega_{ab}^2}{2}. \quad (70)$$

5. ГИПОТЕЗА ЭКСПОНЕНЦИРОВАНИЯ

Как утверждалось выше, в области $s, s_2 > 0, s_1, s_3 < 0$ для многопетлевой амплитуды $M_{2 \rightarrow 4}$ в ПГЛ и за его пределами можно воспользоваться соотношениями

$$M_{2 \rightarrow 4} = c M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}} = M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}} + M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}, \quad (71)$$

где c – инвариантная функция трех ангармонических отношений в импульсном пространстве. Амплитуда БДС определяется уравнением (43), выражение $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{pole}}$ известно явно (см. формулу (37)), а свойства аналитичности $M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}$ определяются интегралом (40).

Эти соотношения можно рассматривать как систему уравнений для вещественных функций c и $f(\omega_2)$, хотя они не полны, поскольку, например, в двухпетлевом случае можно добавить к результату поправку вида (см. работу [41])

$$\Delta M_{2 \rightarrow 4} = i a^2 \Delta^N \text{ПГЛ}(\Phi_2, \Phi_3), \quad (72)$$

где Φ_2 и Φ_3 даются уравнением (51).

Обобщая гипотезу БДС, можно предположить, что правильная амплитуда $M_{2 \rightarrow 4}$ имеет экспоненциальный вид. Однако ниже будет показано, что множитель c не может быть чисто фазовым в области $s, s_2 > 0, s_1, s_3 < 0$:

$$c \neq e^{i\phi}. \quad (73)$$

Это заключение основано на том факте, что в ПГЛ известна комплексная структура амплитуды рождения (включая фазу анзаца БДС).

Начнем с дисперсионного представления для вклада разреза в амплитуду рождения в ПГЛ (см. формулу (40)):

$$\frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}}{|M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}}|} = i a \pi e^{-i\pi\omega_2} \sum_{n=0}^{\infty} (\ln(-s_2))^n c_n a^n. \quad (74)$$

В силу выражения (16) коэффициенты c_n имеют вид интегралов по ν и сумм по n степеней собственного значения (17) ядра БФКЛ в присоединенном представлении. Для вещественной части получаем в главном порядке

$$\text{Re} \frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}}{e^{-i\pi\omega_2} |M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}}|} = a \pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\ln(s_2))^{n-1} n c_n a^n. \quad (75)$$

Мы поделили равенство на множитель $e^{-i\pi\omega_2}$, потому что он одинаков для всех вкладов.

С другой стороны, используя гипотезу экспоненцирования с дополнительным допущением, что остаточная функция является фазой,

$$c = e^{i\phi}, \quad \phi \approx \Delta_{2 \rightarrow 4}, \quad (76)$$

где $\Delta_{2 \rightarrow 4}$ задается формулой (16), можно получить коэффициенты c_n при $n \geq 2$ из разложения

$$\text{Re} \frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}}{e^{-i\pi\omega_2} |M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}}|} = -\frac{\pi^2}{2} \left(a \sum_{k=0}^{\infty} (\ln s_2)^k c_k a^k \right)^2, \quad (77)$$

где

$$c_0 = \ln \frac{|q_1|^2 |q_3|^2}{|k_1 + k_2|^2 \lambda^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{|k_1|^2 \lambda^2}{|q_1|^2 |q_2|^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{|k_2|^2 \lambda^2}{|q_3|^2 |q_2|^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{|q_1|^2 |q_3|^2 |k_1|^2 |k_2|^2}{|k_1 + k_2|^4 |q_2|^4}. \quad (78)$$

Здесь первое слагаемое возникает из множителя C (45), а два последних – из фаз ω_a (21) и ω_b (28). Для коэффициента c_1 в предыдущем разделе мы получили (см. формулу (67))

$$c_1 = -\frac{1}{2} \ln \frac{|k_2|^2 |q_1|^2}{|k_1 + k_2|^2 |q_2|^2} \ln \frac{|k_1|^2 |q_3|^2}{|k_1 + k_2|^2 |q_2|^2}. \quad (79)$$

Таким образом, из гипотезы экспоненцирования (76) получается рекуррентное соотношение для c_n при $n \geq 2$:

$$nc_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}. \quad (80)$$

В частности,

$$c_2 = \frac{1}{8} \ln \frac{|q_1|^2 |q_3|^2 |k_1|^2 |k_2|^2}{|k_1 + k_2|^4 |q_2|^4} \ln \frac{|k_2|^2 |q_1|^2}{|k_1 + k_2|^2 |q_2|^2} \ln \frac{|k_1|^2 |q_3|^2}{|k_1 + k_2|^2 |q_2|^2}. \quad (81)$$

Введем производящую функцию $y(x)$:

$$\frac{M_{2 \rightarrow 4}^{\text{cut}}}{e^{-i\pi\omega_2} |M_{2 \rightarrow 4}^{\text{BDS}}|} = i\pi y(a \ln(-s_2)), \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n c_n. \quad (82)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx} y(x) = -\frac{1}{2} y^2(x) + b, \quad (83)$$

где

$$y(0) = c_0, \quad b = c_1 + \frac{c_0^2}{2} = \frac{1}{2} \ln^2 \frac{|k_2 q_1|}{|k_1 q_2|}. \quad (84)$$

Его решение имеет вид

$$y = \sqrt{2b} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{b}{2}} x + \delta \right), \quad \operatorname{cth} \delta = \frac{c_0}{\sqrt{2b}}, \quad (85)$$

с пертурбативным разложением

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{c_0 c_1}{2} x^2 + \dots. \quad (86)$$

Этот результат, основанный на свойствах аналитичности амплитуды рождения и на допущении об экспоненцировании (76) для $i\Delta_{2 \rightarrow 4}$ в формуле (15), не согласуется с пертурбативным решением (16) уравнения БФКЛ, соответствующего свойству факторизации парциальных волн в t -канале. В частности, экспонента $e^{-\sqrt{2b}x}$ за-

висит только от модуля ангармонического отношения u_2/u_3 , в то время как правильное выражение БФКЛ зависит от фазы. Оказывается, что уже в трехпетлевом случае результат в ПГЛ (16) содержит специальные функции $\text{Li}_3(x)$ и $\text{Li}_2(x)$, отсутствующие в c_2 . Действительно, согласно работе [44] полученная из выражения (16) функция $\tilde{c}_2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{c}_2 = & \frac{1}{8} \left(2 \ln |w|^2 \ln^2 |1+w|^2 - \frac{4}{3} \ln^3 |1+w|^3 - \frac{1}{2} \ln^2 |w|^2 \ln |1+w|^2 \right) + \\ & + \frac{1}{8} \ln |w|^2 (\text{Li}_2(-w) + \text{Li}_2(-w^*)) - \\ & - \frac{1}{4} (\text{Li}_3(-w) - \text{Li}_3(-w^*)), \quad w = \frac{q_3 k_1}{k_2 q_1}. \end{aligned} \quad (87)$$

Таким образом, множитель c в области $s, s_2, s_1, s_3 < 0$ не может быть чистой фазой в физических областях, где $u_1 = e^{\pm 2\pi i}$, а амплитуда содержит манделстамовские разрезы. Его свойства аналитичности выражены соотношениями (50) и (53). Они показывают, что знание амплитуды в ПГЛ позволяет вычислить не только ведущий вклад в мнимую часть коэффициента c , но и его реальную часть, подавленную дополнительным множителем $\sim a$ (см. работу [44]).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы свойства аналитичности планарной шестивершинной амплитуды для $N = 4$ суперсимметрии в мультiredжевской кинематике. Эта амплитуда содержит вклады от реджевского полюса и манделстамовского разреза и должна удовлетворять соотношениям Стайнмана. С использованием только условий аналитичности и гипотезы факторизации вычислены двухпетлевые поправки к амплитуде $M_{2 \rightarrow 4}$ в области $s, s_2 > 0, s_1, s_3 < 0$ в соответствии с результатами работы [36]. Показано, что в следующем за главным приближении двухпетлевая поправка к множителю c перед выражением БДС также должна быть чисто мнимой. Это предсказание подтверждается прямыми вычислениями, проведенными в работе [41]. Кроме того, выше было показано, что для старших петель множитель c в реджевской кинематике не может быть чистой фазой (см. формулу (73)), потому что такая фазовая структура будет противоречить реджевской факторизации в t -канале, встроенной в уравнение БФКЛ. На самом деле в ПГЛ амплитуду можно полностью воспроизвести из анзаца БДС с использованием аналитичности и реджевской факторизации. Действительно, амплитуда БДС правильна в однопетлевом приближении и поэтому позволяет вычислить импакт-факторы в борновском приближении. Далее, как было показано выше, вклад манделстамовского разреза в двухпетлевую поправку можно выразить в терминах величин δ и ω_{ab} , содержащихся в анзаце БДС. Это означает, что можно найти все собственные значения ядра БФКЛ для двухглюонного связанного состояния в t_2 -канале, после чего ядро уравнения БФКЛ можно восстановить, используя его мёбиусовскую инвариантность в импульсном пространстве.

Благодарности. Автор благодарит И. Брателса и А. Пригарина за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-02-01338_а).

Список литературы

- [1] Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **23**:3 (1976), 642–656; V. S. Fadin, E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B*, **60**:1 (1975), 50–52; Э. А. Кураев, Л. Н. Липатов, В. С. Фадин, *ЖЭТФ*, **71**:3 (1976), 840–855; **72**:2 (1977), 377–389; И. И. Балицкий, Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **28** (1978), 1597–1611.
- [2] V. S. Fadin, R. Fiore, M. I. Kotsky, *Phys. Lett. B*, **387**:3 (1996), 593–602, arXiv: hep-ph/9605357.
- [3] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **582**:1–3 (2000), 19–43.
- [4] L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **365**:3 (1991), 614–632.
- [5] L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B*, **309**:3–4 (1993), 394–396.
- [6] Л. Н. Липатов, *ЖЭТФ*, **63**:5, 1536–1552.
- [7] J. Bartels, *Nucl. Phys. B*, **175**:3 (1980), 365–401; J. Kwiecinski, M. Praszalowicz, *Phys. Lett. B*, **94**:3 (1980), 413–416.
- [8] L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B*, **251**:2 (1990), 284–287.
- [9] L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **548**:1–3 (1999), 328–362, arXiv: hep-ph/9812336.
- [10] Л. Н. Липатов, *Письма в ЖЭТФ*, **59** (1994), 596–599, arXiv: hep-th/9311037.
- [11] L. D. Faddeev, G. P. Korchemsky, *Phys. Lett. B*, **342**:1–4 (1995), 311–322, arXiv: hep-th/9404173.
- [12] V. S. Fadin, L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B*, **429**:1–2 (1998), 127–134, arXiv: hep-ph/9802290; M. Ciafaloni, G. Camici, *Phys. Lett. B*, **430**:3–4 (1998), 349–354, arXiv: hep-ph/9803389.
- [13] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **661**:1–2 (2003), 19–61, arXiv: hep-ph/0208220.
- [14] L. N. Lipatov, “Evolution equations in QCD”, *Proceedings of the International Conference on Perspectives in Hadronic Physics, ICTP-1997* (Triest, Italy, 12–16 May, 1997), eds. S. Boffi, C. Degliatti, M. Giannini, World Scientific, Singapore, 1998, 413–427; “Pomeron before and after QCD”, *Proceedings of the Workshop “Forward Physics and Luminosity Determination at LHC”* (Helsinki, Finland, 31 October – 4 November 2000), eds. K. Huitu, V. Khoze, R. Orava, S. Taprogge, World Scientific, Singapore, 2001, 49–62.
- [15] J. A. Minahan, K. Zarembo, *JHEP*, **03** (2003), 013, 29 pp., arXiv: hep-th/0212208.
- [16] N. Beisert, M. Staudacher, *Nucl. Phys. B*, **670**:3 (2003), 439–463, arXiv: hep-th/0307042.
- [17] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, V. N. Velizhanin, *Phys. Lett. B*, **557**:1–2 (2003), 114–120, arXiv: hep-ph/0301021.
- [18] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko V. N. Velizhanin, *Phys. Lett. B*, **595**:1–4 (2004), 521–529; Erratum, **632**:5–6 (2006), 754–756, arXiv: hep-th/0404092.
- [19] S. Moch, J. A. M. Vermaseren, A. Vogt, *Nucl. Phys. B*, **688**:1–2 (2004), 101–134, arXiv: hep-ph/0403192.
- [20] B. Eden, M. Staudacher, *J. Stat. Mech.*, **11** (2006), P11014, 44 pp.
- [21] N. Beisert, B. Eden, M. Staudacher, *J. Stat. Mech.*, **01** (2007), P01021, 31 pp.
- [22] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2** (1998), 231–252.
- [23] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **428**:1–2 (1998), 105–114, arXiv: hep-th/9802109.
- [24] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2** (1998), 253–291.
- [25] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. Rej, M. Staudacher V. N. Velizhanin, *J. Stat. Mech.*, **10** (2007), P10003, 19 pp.; Z. Bajnok, R. A. Janik, T. Lukowski, *Four loop twist two, BFKL, wrapping and strings*, arXiv:0811.4448; T. Lukowski, A. Rej, V. N. Velizhanin, *Nucl. Phys. B*, **831**:1–2 (2010), 105–132, arXiv:0912.1624.
- [26] R. C. Brower, J. Polchinski, M. J. Strassler C. I. Tan, *JHEP*, **12** (2007), 005, 62 pp., arXiv: hep-th/0603115.
- [27] L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **452**:1–2 (1995), 369–397, arXiv: hep-ph/9502308; *Phys. Rept.*, **286**:3 (1997), 131–198, arXiv: hep-ph/9610276.

- [28] E. N. Antonov, L. N. Lipatov, E. A. Kuraev I. O. Cherednikov, *Nucl. Phys. B*, **721**:1–3 (2005), 111–135, arXiv: hep-ph/0411185.
- [29] Z. Bern, L. J. Dixon, V. A. Smirnov, *Phys. Rev. D*, **72**:8 (2005), 085001, 27 pp., arXiv: hep-th/0505205.
- [30] L. F. Alday, J. Maldacena, *JHEP*, **06** (2007), 064, 26 pp., arXiv: 0705.0303.
- [31] L. F. Alday, J. Maldacena, *JHEP*, **11** (2007), 068, 23 pp., arXiv: 0710.1060.
- [32] J. Bartels, L. N. Lipatov, A. Sabio Vera, *Phys. Rev. D*, **80**:4 (2009), 045002, 28 pp., arXiv: 0802.2065.
- [33] O. Steinmann, *Helv. Phys. Acta*, **33** (1960), 257–298.
- [34] Z. Bern, L. J. Dixon, D. A. Kosower, R. Roiban, M. Spradin, C. Vergu, A. Volovich, *Phys. Rev. D*, **78**:4 (2008), 045007, 25 pp., arXiv: 0803.1465.
- [35] S. Mandelstam, *Nuovo Cimento*, **30**:4 (1963), 1148–1162.
- [36] J. Bartels, L. N. Lipatov, A. Sabio Vera, *Eur. Phys. J. C*, **65**:3–4 (2010), 587–605, arXiv: 0807.0894.
- [37] J. M. Drummond, J. Henn, V. A. Smirnov, E. Sokatchev, *JHEP*, **01** (2007), 064, 15 pp., arXiv: hep-th/0607160; J. M. Drummond, G. P. Korchemsky, E. Sokatchev, *Nucl. Phys. B*, **795**:1–2 (2008), 385–408, arXiv: 0707.0243.
- [38] L. N. Lipatov, *J. Phys. A*, **42**:30 (2009), 304020, 25 pp.
- [39] I. T. Drummond, P. V. Landshoff, W. J. Zakrzewski, *Nucl. Phys. B*, **11**:2 (1969), 383–405; J. H. Weis, *Phys. Rev. D*, **4**:6 (1971), 1777–1787.
- [40] J. M. Drummond, J. Henn, G. P. Korchemsky, E. Sokatchev, *Nucl. Phys. B*, **826**:1–2 (2010), 337–364, arXiv: 0712.1223.
- [41] L. N. Lipatov, A. Prygarin, *Phys. Rev. D*, **83**:4 (2011), 045020, 6 pp., arXiv: 1008.1016.
- [42] V. Del Duca, C. Duhr, V. A. Smirnov, *JHEP*, **03** (2010), 099, 17 pp., arXiv: 0911.5332; **05** (2010), 084, 119 pp.
- [43] A. B. Goncharov, M. Spradlin, C. Vergu, A. V. Volovich, *Phys. Rev. Lett.*, **105**:15 (2010), 151605, 4 pp., arXiv: 1006.5703.
- [44] L. N. Lipatov, A. Prygarin, *Phys. Rev. D*, **83**:12 (2011), 125001, 21 pp., arXiv: 1011.2673.