Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Слабые антикоммутационные соотношения и амальгамы грасмановых алгебр, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 3, 425–431

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf676>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:33:58

© 2000 г.

Р. С. Исмагилов*

СЛАБЫЕ АНТИКОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ И АМАЛЬГАМЫ ГРАССМАНОВЫХ АЛГЕБР

Рассматривается клиффордова алгебра, построенная по данному линейному пространству с симметрической билинейной формой, и в ней – семейство грассмановых подалгебр, порожденных всевозможными изотропными подпространствами. Описывается амальгама (индуктивный предел) этого семейства. В качестве приложения изучается модификация канонических антикоммутиационных соотношений (КАС). Модификация состоит в том, что обычные КАС накладываются лишь на те пары векторов данного пространства, которые ортогональны относительно упомянутой формы (и каждый из векторов изотропен).

Канонические соотношения квантовой механики издавна служили поводом к математическим изысканиям. Предлагаемая работа содержит еще один пример такого рода. Краткое описание результатов содержится в [1].

1. СЛАБЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ АНТИКОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Напомним известное определение канонических антикоммутиационных соотношений (КАС), придав ему удобную для дальнейшего форму. Пусть W – комплексное линейное пространство с невырожденной симметрической формой θ . Невырожденность означает, что для любого вектора $x \in W$, $x \neq 0$, существует такой вектор $y \in W$, что $\theta(x, y) \neq 0$. Предположим, что в пространстве W задана инволюция $x \mapsto \bar{x}$, причем $\theta(x, \bar{x}) > 0$, если $x \neq 0$. Пусть H – гильбертово пространство. Тогда КАС задаются семейством ограниченных линейных операторов $C(x)$, $x \in W$, действующих в H и удовлетворяющих условиям

$$C(\bar{x}) = (C(x))^*, \quad C(\alpha x + \beta y) = \alpha C(x) + \beta C(y), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \quad (1)$$

$$\{C(x), C(y)\} = \lambda \theta(x, y) I \quad (2)$$

для некоторого числа $\lambda \geq 0$. Как обычно, $\{A, B\}$ означает антикоммутатор, а параметр λ введен для удобства.

*Московское высшее техническое училище им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Модифицируем это определение. Модификация будет состоять в том, что мы потребуем выполнения соотношений (1), (2) лишь для векторов $x, y \in W$, которые ортогональны относительно формы θ и, кроме того, каждый из них ортогонален самому себе. Это приведет нас к понятию *слабых* КАС. Точное определение таково. Возьмем те же W, θ, H , что и выше. В дальнейшем ортогональность векторов $x, y \in W$ относительно формы θ (т.е. равенство $\theta(x, y) = 0$) будем записывать в виде $x \perp y$. Введем множество $W^\circ = \{x : x \in W, x \perp x\}$. Пусть семейство операторов $\{C^\circ(x), x \in W^\circ\}$ удовлетворяет следующему условию: если

$$x, y \in W, \quad x \perp x, \quad y \perp y, \quad x \perp y,$$

то

$$\begin{aligned} C^\circ(\alpha x + \beta y) &= \alpha C^\circ(x) + \beta C^\circ(y), \quad \{C^\circ(x), C^\circ(y)\} = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \\ C^\circ(\bar{x}) &= (C^\circ(x))^*. \end{aligned}$$

В этом случае будем говорить, что семейство $\{C^\circ(x), x \in W^\circ\}$ удовлетворяет *слабым* КАС.

Ясно, что из обычных КАС вытекают слабые КАС. Мы увидим, что верно и обратное, если только рассматриваемое семейство операторов $\{C^\circ(x)\}$ неприводимо. Точная формулировка результата содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть семейство $C^\circ(x), x \in W^\circ$, удовлетворяет слабым КАС и неприводимо. Тогда существует (и единственно) семейство ограниченных операторов $C(x), x \in W$, которое удовлетворяет КАС (т.е. соотношениям (1), (2) для некоторого $\lambda \geq 0$) и условиям $C(x) = C^\circ(x), x \in W^\circ$.

Чтобы пояснить сущность этого результата, рассмотрим более общую ситуацию. Пусть K – алгебраически замкнутое поле с характеристикой, отличной от 2, и W – линейное пространство над K , снабженное симметричной невырожденной билинейной формой θ . Введем множество $W^\circ = \{x : x \in W, x \perp x\}$. Пусть B – ассоциативная алгебра над K , обладающая единицей. Рассмотрим произвольное отображение $f^\circ : W^\circ \rightarrow B$, удовлетворяющее условию, которое аналогично слабым КАС (с тем, впрочем, отличием, что теперь в пространстве W нет инволюции), т.е., если

$$x, y \in W, \quad x \perp x, \quad y \perp y, \quad x \perp y,$$

то

$$f^\circ(\alpha x + \beta y) = \alpha f^\circ(x) + \beta f^\circ(y), \quad \{f^\circ(x), f^\circ(y)\} = 0, \quad \alpha, \beta \in K.$$

ТЕОРЕМА 2. *Существуют (и однозначно определены) линейное отображение $f: W \rightarrow A$ и элемент $b \in B$, удовлетворяющие условиям*

$$\begin{aligned} \{f(x), f(y)\} &= \theta(x, y)b, & x, y \in W, \\ f^\circ(x) &= f(x), & x \in W^\circ. \end{aligned}$$

Элемент b перестановочен со всеми $f(x)$, $x \in W$.

Ясно, что теорема 1 легко выводится из теоремы 2 (то обстоятельство, что в теореме 2 отсутствует инволюция, не препятствует такому выводу).

Прежде чем переходить к доказательству, приведем еще одну формулировку теоремы 2, пользуясь понятием амальгамы семейства алгебр. Это будет сделано в разделе 2. Описание этой амальгамы и есть основной результат работы; применение к КАС – лишь простая иллюстрация этого результата.

2. АМАЛЬГАМЫ СЕМЕЙСТВА АЛГЕБР. СЛУЧАЙ СЕМЕЙСТВА ГРАССМАНОВЫХ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

Начнем с определений. Пусть $\{A_\alpha\}$ – набор ассоциативных алгебр с единицей (всюду в этом разделе рассматриваются только такие алгебры). Предположим, что для некоторых пар α, β указан гомоморфизм $\phi_{\alpha\beta}: A_\alpha \rightarrow A_\beta$, что запишем в виде $\{A_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$. Назовем представлением этого семейства $\{A_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ в некоторой алгебре B такой набор гомоморфизмов $f_\alpha: A_\alpha \rightarrow B$ (по одному гомоморфизму для каждой алгебры A_α), что $f_\alpha = f_\beta \circ \phi_{\alpha\beta}$ для всех α, β , для которых определен $\phi_{\alpha\beta}$, и, кроме того, множество $\cup f_\alpha(A_\alpha)$ порождает алгебру B . Данное представление записываем кратко в виде $B, \{f_\alpha\}$. Амальгама семейства $\{A_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ определяется как представление $B^1, \{f_\alpha^1\}$, обладающее следующим свойством универсальности: для любого представления $B, \{f_\alpha\}$ существует такой гомоморфизм алгебр $p: B^1 \rightarrow B$, что $f_\alpha = p \circ f_\alpha^1$ для всех α (употребляются также термины “амальгамированное произведение” и “индуктивный предел”). Иногда (для краткости) амальгамой будем называть алгебру B^1 .

Отметим частный случай, наиболее важный для дальнейшего. Пусть даны алгебра A и набор ее подалгебр A_α , замкнутый относительно пересечений и порождающий алгебру A . Если $A_\alpha \subset A_\beta$, то определен гомоморфизм включения $A_\alpha \rightarrow A_\beta$. Итак, мы получили семейство, состоящее из алгебр и гомоморфизмов включения; для краткости будем записывать его в виде $\{A_\alpha\}$ (опуская упоминание о гомоморфизмах). Теперь можно поставить задачу вычисления амальгамы семейства $\{A_\alpha\}$.

Приведенное определение заимствовано из теории групп, где оно служит важным средством исследования; обстоятельное изложение этого вопроса содержится в работе [2].

Сейчас мы обратимся к примеру амальгамы, связанному с задачей, описанной в разделе 1. Итак, вернемся к линейному пространству W (над полем K , характеристика которого отлична от 2), снабженному невырожденной симметрической билинейной формой θ . Линейное подпространство $X \subset W$ называется *изотропным* (иногда *вполне*

изотропным), если $\theta(x, y) = 0$ для всех $x, y \in X$; множество всех изотропных подпространств обозначим через $Is(W)$.

Напомним, что алгебра Клиффорда $C(W)$ определяется линейным пространством W и соотношением $xy + yx = \theta(x, y)e$, где e — единица алгебры. Любое изотропное подпространство $X \subset W$ порождает в $C(W)$ грассманову подалгебру $Gr(X)$; последняя задается пространством X и соотношением $xy + yx = 0$. Итак, мы пришли к семейству грассмановых алгебр $\{Gr(X)\}$, $X \in Is(W)$ (гомоморфизм-включение $Gr(X) \rightarrow Gr(Y)$ определен при $X \subset Y$). Задача состоит в нахождении его амальгамы.

Чтобы изложить решение этой задачи, рассмотрим алгебру всех многочленов

$$\alpha_0 + \sum_{k \geq 1} c_k T^k, \quad \alpha_0 \in K, \quad c_k \in C(W), \quad (3)$$

с обычными алгебраическими операциями (сумма в (3) конечна). Таким образом, формальная переменная T перестановочна с элементами алгебры $C(W)$. Обозначим через $C(W, T)$ подалгебру, порожденную одночленами $c_1 T$, $c_1 \in W$. Легко описать явно эту подалгебру. Для этого напомним, что алгебра $C(W)$ допускает фильтрацию $C_0(W) \subset C_1(W) \subset \dots$, где $C_k(W)$, $k > 0$, есть линейная оболочка элементов алгебры $C(W)$, представимых в виде произведения не более чем k элементов из W . Имеем также разложение в прямую сумму линейных пространств $C(W) = C^+(W) \oplus C^-(W)$, где $C^+(W)$ и $C^-(W)$ — линейные оболочки упомянутых произведений с четным и соответственно нечетным числом сомножителей. Легко видеть, что $C(W, T)$ состоит из всех многочленов вида (3), где $c_k \in C_k(W) \cap C^+(W)$ при четном k , $c_k \in C_k(W) \cap C^-(W)$ при нечетном k .

Для любого подпространства $X \in Is(W)$ вложение линейных пространств $X \rightarrow C^\circ(W, T)$, $x \mapsto xT$, продолжается до гомоморфизма алгебр $f_X^\circ: Gr(X) \rightarrow C(W, T)$. Тем самым получилось представление семейства алгебр $\{Gr(X)\}$, $X \in Is(W)$, в алгебре $C(W, T)$. Выше мы условились записывать его в виде $C(W, T)$, $\{f_X^\circ\}$.

ТЕОРЕМА 3. *Алгебра $C(W, T)$ (с гомоморфизмами $f_X^\circ: Gr(X) \rightarrow C(W, T)$) есть амальгама семейства $\{Gr(X), X \in Is(W)\}$.*

Следующее простое предложение дает еще одно описание алгебры $C(W, T)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Алгебра $C(W, T)$ изоморфна алгебре, которая порождена линейным пространством W и формальной переменной S , связанными соотношениями*

$$xy + yx = \theta(x, y)S, \quad xS = Sx, \quad x, y \in W;$$

изоморфизм устанавливается по правилам $x \mapsto xT$, $S \mapsto T^2$.

Это предложение равносильно следующему. Пусть D — произвольная K -алгебра (как всегда, ассоциативная и имеющая единицу). Пусть даны линейное отображение $\phi: W \rightarrow D$ и элемент $d \in D$ такие, что

$$\phi(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x) = \theta(x, y)d, \quad \phi(x)d = d\phi(x), \quad x, y \in W.$$

Тогда существует такой гомоморфизм алгебр $p: C(W, T) \rightarrow D$, что $\phi(x) = p(xT)$, $d = p(T^2)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Начнем с доказательства предложения 1 (точнее, только что сформулированного эквивалентного утверждения). Пусть сначала $\dim W = n < \infty$. Тогда, как известно, в W существует такой базис $\{e_k, 1 \leq k \leq n\}$, что $\theta(e_i, e_k) = \delta_{ik}$, $1 \leq i, k \leq n$. Для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ элементы $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ образуют базис линейного пространства $C_k(W)$. Поэтому существует такое линейное отображение $p: C(W, T) \rightarrow D$, что $p(e_{i_1} \cdots e_{i_k} T^r) = \phi(e_{i_1}) \cdots \phi(e_{i_k}) d^{(r-k)/2}$ для четных $r - k \geq 0$. Без труда проверяется, что построенное отображение есть искомый гомоморфизм. Кроме того, этими двумя свойствами отображение p однозначно определено. Это позволяет построить нужный гомоморфизм p также для случая $\dim W = \infty$. Этим доказано предложение 1.

Переходим к доказательству теоремы 2.

ЛЕММА 1. Пусть $a, b, c \in W^\circ$, $\theta(b, c) \neq 0$. Тогда существуют такие $x, y \in W^\circ$, что $a = x + y$, $x \perp b$, $y \perp c$ (из этих условий следует, что $x \perp y$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно взять векторы

$$x = \frac{a}{2} + sb + tc + d, \quad y = \frac{a}{2} - sb - tc - d,$$

где

$$s = \theta(a, c)(2\theta(b, c))^{-1}, \quad t = -\theta(a, b)(2\theta(b, c))^{-1},$$

а вектор d удовлетворяет условиям

$$d \perp a, \quad d \perp b, \quad d \perp c, \quad \theta(d, d) = -2st\theta(b, c).$$

Существование вектора d с этими свойствами вытекает из условия $\dim W \geq 4$ и алгебраической замкнутости поля K . Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Отображение $f^\circ: W^\circ \rightarrow B$ продолжается до линейного отображения $f: W \rightarrow B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что если $a_i \in W^\circ$, $1 \leq i \leq p$, $a_1 + \cdots + a_p = 0$, то

$$f^\circ(a_1) + \cdots + f^\circ(a_p) = 0. \quad (4)$$

При $p = 2$ это очевидно. Пусть $p > 2$ и пусть данное утверждение доказано при $p' < p$. Если все векторы a_i попарно ортогональны (напомним также, что каждый из них ортогонален самому себе), то утверждение вытекает из определения отображения f° . Пусть теперь среди векторов a_i имеется неортогональная пара. Можно считать, что $\theta(a_2, a_3) \neq 0$. Согласно лемме 1, $a_1 = x + y$, где $x \perp x$, $x \perp y$, $y \perp y$, $x \perp a_2$, $y \perp a_3$. Тогда $(x + a_2) + (y + a_3) + \cdots + a_p = 0$, причем векторы $x + a_2, y + a_3, \dots, a_p$ принадлежат множеству W° . По предположению индукции $f(x + a_2) + f(y + a_3) + \cdots + f(a_p) = 0$. Так как $x \perp a_2$, $y \perp a_3$, $x \perp x$, $y \perp y$, $x \perp y$, то $f(x + a_2) + f(y + a_3) = f(x) + f(a_2) + f(y) + f(a_3) = f(x + y) + f(a_2) + f(a_3) = f(a_1) + f(a_2) + f(a_3)$. Отсюда следует равенство (4). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $f: W \rightarrow B$ – линейное отображение из леммы 2. Тогда существует такой элемент $b \in B$, что $bf(x) = f(x)b$, $\{f(x), f(y)\} = \theta(x, y)b$, $x, y \in W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если $x, y \in W$, $\theta(x, x) = \theta(y, y)$, то $\{f(x), f(x)\} = \{f(y), f(y)\}$. Пусть сначала $x \perp y$. Возьмем такой элемент $\epsilon \in K$, что $\epsilon^2 = -1$. Тогда $(x + \epsilon y) \perp (x + \epsilon y)$, откуда следует, что

$$\{f(x + \epsilon y), f(x + \epsilon y)\} = \{f(x), f(x)\} - \{f(y), f(y)\} + 2\epsilon\{f(x), f(y)\} = 0.$$

Это соотношение остается верным при замене ϵ на $-\epsilon$. Сложив два соотношения, получаем равенство $\{f(x), f(x)\} = \{f(y), f(y)\}$, что и утверждалось. Если же условие $x \perp y$ нарушено, то возьмем вектор $z \in W$, $\theta(z, z) = \theta(x, x) = \theta(y, y)$, ортогональный к x, y , и применим это рассуждение к парам (x, z) , (y, z) . Этим утверждение доказано.

Таким образом, существует такой элемент $b \in B$, что $\{f(x), f(x)\} = b$ при $\theta(x, x) = 1$. Но тогда $\{f(x), f(x)\} = \theta(x, x)b$, $x \in W$, откуда (применяя стандартный переход от квадратичного соотношения к билинейному) получаем равенство $\{f(x), f(y)\} = \theta(x, y)b$, $x, y \in W$. Ясно, что элемент b перестановочен с $f(x)$, $\theta(x, x) = 1$, а потому и с любым $f(x)$, $x \in W$ (ибо W есть линейная оболочка векторов x , $\theta(x, x) = 1$). Лемма 3 доказана.

Теперь теорема 2 вытекает из предложения 1 (точнее, из равносильного ему утверждения, сформулированного после предложения 1) и леммы 3.

Наконец, теорема 3 следует из теоремы 2 (и определения амальгамы).

4. СЛАБЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В этом разделе мы приведем ради полноты изложения результаты, касающиеся слабых канонических коммутационных соотношений (ККС).

Пусть V – вещественное линейное пространство с невырожденной кососимметрической формой τ (невырожденность означает, что если $x \in V$, $x \neq 0$, то $\tau(x, y) \neq 0$ для некоторого $y \in V$), H – гильбертово пространство с плотным линейным подмножеством D . Пусть, далее, каждому $x \in V$ поставлен в соответствие симметрический оператор $A(x)$ в H , отображающий множество D в D и удовлетворяющий следующему условию: если

$$x, y \in V, \quad x \perp y,$$

то

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad [A(x), A(y)] = 0.$$

Как обычно, $[A, B]$ – это коммутатор $AB - BA$; запись $x \perp y$ означает $\tau(x, y) = 0$.

Подчеркнем, что здесь мы не требуем линейности отображения $x \mapsto A(x)$; равенство, выражающее линейность, а также равенство, выражающее ККС, должны выполняться лишь для любой ортогональной (относительно τ) пары векторов из V . В этом случае

мы скажем, что семейство удовлетворяет слабым ККС. Напомним, что обычные ККС выражаются формулами

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \alpha A(x) + \beta A(y), \quad x, y \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \\ [A(x), A(y)] &= \lambda \tau(x, y)I, \quad x, y \in V. \end{aligned}$$

Заметим, что в эти соотношения включен вещественный параметр λ ; при $\lambda = 0$ дело сводится к коммутативности семейства $\{A(x)\}$.

Разумеется, из обычных ККС вытекают слабые ККС. Верно ли обратное? Ответ на этот вопрос утвердителен, если выполняется следующее условие операторной неприводимости: любой линейный оператор в D , который перестановочен со всеми операторами $A(x)$ и выражается в виде многочлена не выше второй степени от некоторого конечного набора этих операторов, скалярен.

Аналогичный результат справедлив и для ККС в интегральной форме. Эти результаты получены в работах [1, 3] как следствие явного описания индуктивных пределов амальгам некоторых семейств абелевых групп и алгебр Ли. В частности, здесь возникает задача о вычислении амальгамы семейства всех изотропных относительно формы τ линейных подпространств $X \subset V$ (каждое такое подпространство понимается как абелева группа по отношению к сложению векторов). Оказывается, что искомая амальгама — это группа Гейзенберга, построенная обычным образом по V, τ . Другие примеры вычисления амальгам содержатся в работах [4, 5].

Благодарности. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 96-15-96249).

Список литературы

- [1] *Р. С. Исмаилов.* Функциональный анализ и его приложения. 2000. Т. 34. Вып. 2. С. 75–78.
- [2] *Ж. П. Серр.* Деревья, амальгамы и математика. Периодический сборник переводов иностранных статей. 1974. Т. 18. № 1. С. 3–51.
- [3] *Р. С. Исмаилов.* Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 1997. Т. 2. № 4. С. 367–361.
- [4] *Р. С. Исмаилов.* Математический сборник. 2000. Т. 191. № 3. С. 53–64.
- [5] *Р. С. Исмаилов.* Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1980. Т. 44. С. 831–867.

Поступила в редакцию 14.IV.2000 г.