Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Пивоваров, $(B^0 - \bar{B}^0)$ -смешивание в следующем
за главным порядке разложения по $1/m_b$, *ТМФ*, 2012,
том 170, номер 2, 230–241

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6761>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:54:25

© 2012 г.

А. А. Пивоваров*

$(B^0 - \bar{B}^0)$ -СМЕШИВАНИЕ В СЛЕДУЮЩЕМ ЗА ГЛАВНЫМ ПОРЯДКЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО $1/m_b$

Представлены результаты вычисления матричных элементов операторов для $(B^0 - \bar{B}^0)$ -смешивания в следующем за главным порядке разложения по $1/m_b$.

Ключевые слова: физика ароматов, смешивание нейтральных мезонов.

1. АРОМАТЫ В СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ

В качестве введения кратко напомним структуру ароматов в Стандартной модели (СМ): три поколения материальных полей (фермионов)

$$\text{кварки: } \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} + \text{лептоны: } \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}, \dots,$$

где $u, d, \dots$ — ароматы (кварков) исходно безмассовые и образуют дублеты и синглеты по отношению к электрослабой калибровочной группе симметрии. Массы фермионных материальных полей порождены взаимодействием Юкавы с полем бозона Хиггса H после электрослабого фазового перехода

$$\lambda_f H \bar{f} f \rightarrow m_f \bar{f} f, \quad m_f = \lambda_f \langle H \rangle, \quad \langle H \rangle \neq 0.$$

Таким образом, массы пропорциональны вакуумному среднему $\langle H \rangle$ поля бозона Хиггса и юкавской константе взаимодействия λ_f . Электрослабое калибровочное взаимодействие “up” $U_i = (u, c, t)$ и “down” $D_j = (d, s, b)$ полей с W -бозонами включает матрицу СКМ (Cabibbo, Kobayashi, Maskawa) V_{ij} : $V_{ij} \cdot \bar{U}_i \gamma_\mu D_j W^\mu$. Ненулевые внедиагональные элементы матрицы СКМ V_{ij} инициируют переходы между различными ароматами, например $b \rightarrow c$, $b \leftarrow s$, $s \rightarrow u$, $c \leftrightarrow b$, $\dots$. Поэтому параметры СКМ V_{ij} и массы кварков $m_f (= \lambda_f)$ представляют собой постоянные взаимодействия в лагранжиане СМ, которые должны быть получены из экспериментальных данных.

*Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия. E-mail: pivovarov@inr.ac.ru

Интенсивность переходов с изменением аромата определяется параметрами СКМ V_{ij} с количественной иерархией, задаваемой значением V_{us} таким, что при $\lambda = V_{us} = \sin \theta_C \approx 0.22$ находим следующую структуру матрицы СКМ (параметризация Волфенштейна):

$$V_{\text{СКМ}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda(1 + iA^2\lambda^4\eta) & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4).$$

Картина иерархии масс (или взаимодействий Юкавы) не задается аналитически, однако численные значения масс хорошо известны:

$$\begin{aligned} m_{u,d} &\sim 5 \cdot 10^{-3} \text{ ГэВ}, & m_s &= 0.13 \text{ ГэВ}, \\ m_c &= 1.3 \text{ ГэВ}, & m_b &= 4.2 \text{ ГэВ}, & m_t &= 175 \text{ ГэВ}. \end{aligned}$$

Вследствие большой разности масс многие распады с изменением аромата разрешены кинематически.

В отличие от лептонов (распады τ , μ , смешивание нейтрино), экспериментально не зарегистрировано “свободных” кварков. С экспериментальной точки зрения переходы с изменением аромата происходят между несущими аромат адронами: $b \rightarrow s$ означает $B \rightarrow K$ или $B \rightarrow X_s$. Здесь в игру вступает КХД: это наиболее сложно и интересно с точки зрения динамической части анализа электрослабой структуры ароматов кваркового сектора СМ.

Особый интерес представляют переходы с $\Delta F = 2$, которые также известны как смешивание различных нейтральных по аромату мезонов:

$$sd: K^0 - \bar{K}^0, \quad cu: D^0 - \bar{D}^0, \quad bd, bs: B^0 - \bar{B}^0.$$

Эти процессы важны, поскольку являются основным источником исследований нарушения СР-инвариантности в СМ и позволяют искать новую физику за пределами СМ.

2. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ $B^0 - \bar{B}^0$

Временная эволюция системы $B^0 - \bar{B}^0$ описывается уравнением

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} B^0 \\ \bar{B}^0 \end{pmatrix} = H_{\text{eff}} \begin{pmatrix} B^0 \\ \bar{B}^0 \end{pmatrix},$$

где H_{eff} – массовый (2×2) -оператор распадающей частицы:

$$H_{\text{eff}} = \left(M - \frac{i\Gamma}{2} \right)_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Недиагональные элементы M_{12} и Γ_{12} представляют собой эффективные взаимодействия с $\Delta B = 2$, которые не представлены в фундаментальном лагранжиане СМ, однако их можно вычислить теоретически. Наблюдаемыми системы $B^0 - \bar{B}^0$ являются разность масс $\Delta m = M_{\text{heavy}} - M_{\text{light}} \approx 2|M_{12}|$ и разность постоянных

распада $\Delta\Gamma = \Gamma_L - \Gamma_H \approx -2|\Gamma_{12}|\cos\Phi$, где $\Phi = \arg(-M_{12}/\Gamma_{12})$. Экспериментально измеряемые величины для системы B_d – это $\Delta m_d = 0.508 \pm 0.004 \text{ пс}^{-1}$, тогда как $(\Delta\Gamma/\Gamma)_d = (9 \pm 37) \cdot 10^{-3}$. Теоретически предсказываемое значение составляет $(\Delta\Gamma/\Gamma)_s = 0.158 \pm 0.050$. Эти наблюдаемые можно использовать для получения параметров СКМ из экспериментальных данных, если соответствующие теоретические формулы точны. Что же тогда представляют собой теоретические формулы?

3. $(B^0 - \bar{B}^0)$ -СМЕШИВАНИЕ В СМ: ОПЕРАТОРЫ, ФАКТОРИЗАЦИЯ И ПАРАМЕТРЫ B_B

В СМ на кварковом уровне процессы с $\Delta B = 2$ идут через ящичную диаграмму, которая дает сложный, нелокальный оператор перехода (эффективный гамильтониан). Однако этот нелокальный оператор перехода упрощается вследствие массовой и СКМ-иерархий: он сжимается в точку, редуцируя эффективный гамильтониан к набору локальных операторов. Однако для Δm и $\Delta\Gamma$ механизмы различны. В случае Δm имеется следующая картина: поскольку $V_{tb} \gg V_{cb}, V_{ub}$, топ-кварк насыщает петлю, а поскольку $m_t \gg m_b$, можно локализовать петлю с результатом КХД в следующем за главным приближении (СГП):

$$M_{12} = \frac{G_F^2 M_W^2}{4\pi^2} (V_{tb}^* V_{td})^2 \eta_B S_0(x_t) [\alpha_s^{(5)}(\mu)]^{-6/23} \left[1 + \frac{\alpha_s^{(5)}(\mu)}{4\pi} J_5 \right] \langle \bar{B}^0 | Q(\mu) | B^0 \rangle.$$

Здесь $\eta_B = 0.55 \pm 0.1$, $J_5 = 1.627$ в наивной схеме размерной регуляризации, $S_0(x_t)$ – функция малых расстояний, $x_t = m_t^2/m_W^2$, $Q(\mu) = (\bar{b}_L \gamma_\sigma d_L)(\bar{b}_L \gamma_\sigma d_L)(\mu)$ – локальный четырехкварковый оператор, представляющий настоящую КХД-величину со структурой “ток $\otimes$ ток” ($J \otimes J$).

Разность ширин (для B_s) имеет вид

$$\Delta\Gamma \sim \Gamma_{12} = \frac{\langle \bar{B}_s | T | B_s \rangle}{2M_{B_s}}.$$

Конечные состояния при распаде являются (c, u) “кварками”, $m_b \gg m_c, m_u$, и можно использовать разложение по $1/m_b$ для тяжелых кварков в виде

$$\langle \bar{B}_s | T | B_s \rangle = \sum_n \frac{C_n}{m_b^n} \langle \bar{B}_s | \mathcal{O}_n^{\Delta B=2} | B_s \rangle,$$

где коэффициенты C_n можно вычислить в рамках теории возмущений в виде ряда по константе сильного взаимодействия. Непертурбативная (дальнодействующая или инфракрасно-чувствительная) физика содержится в матричных элементах локальных операторов $\mathcal{O}_n^{\Delta B=2}$. В главном порядке по $1/m_b$ два соответствующих четырехкварковых оператора в T имеют вид

$$Q = (\bar{b}_i s_i)_{V-A} (\bar{b}_j s_j)_{V-A}, \quad Q_S = (\bar{b}_i s_i)_{S-P} (\bar{b}_j s_j)_{S-P}.$$

В СГП по $1/m_b$ имеется всего пять операторов. Два наиболее важных из них имеют вид

$$R_2 = \frac{1}{m_b^2} (\bar{b}_i \overleftarrow{D}_\mu D^\mu s_i)_{V-A} (\bar{b}_i s_i)_{V-A},$$

$$R_3 = \frac{1}{m_b^2} (\bar{b}_i \overleftarrow{D}_\mu D^\mu s_i)_{S-P} (\bar{b}_i s_i)_{S-P}.$$

Таким образом, получение матричных элементов M_{12} и Γ_{12} сводится к вычислению $\langle \bar{B}|Q_i|B \rangle$ в КХД, что представляет собой настоящую непertурбативную задачу. В настоящее время нет прямых способов такого вычисления.

С точки зрения феноменологических применений наиболее популярное приближение для вычисления этих матричных элементов – факторизация, которая является интуитивной для четырехкварковых операторов. Действительно, поскольку $Q_i \sim J \cdot J$ при $J \sim \bar{s}b$ и $\langle \bar{B}| \text{“}=\text{”} \bar{s}\bar{b}$, так и хочется “факторизовать” матричный элемент согласно следующему правилу:

$$\langle \bar{B}|Q_i|B \rangle = \langle \bar{B}|J \cdot J|B \rangle = C_{\text{comb}} \langle \bar{B}|J|0 \rangle \langle 0|J|B \rangle.$$

Для тока $J = \bar{b}_L \gamma_\mu d_L$ имеем $\langle 0|\bar{b}_L \gamma_\mu d_L|B^0(\mathbf{p}) \rangle = ip_\mu f_B/2$ и сложный матричный элемент выражается через постоянную лептонного распада f_B . Основная проблема такого приближения – точность, которая никак не контролируется. Записав $\langle \bar{B}_s|\mathcal{O}_i|B_s \rangle = B_i \langle \bar{B}_s|\mathcal{O}_i|B_s \rangle^{\text{fac}}$, введем параметры мешка B_i – настоящие динамические КХД-величины, с помощью которых контролируется точность факторизации, с нормировкой $B_i = 1$ в факторизационном приближении.

Запишем выражения для соответствующих операторов:

$$\begin{aligned} \langle \bar{B}|Q|B \rangle &= f_B^2 M_B^2 2 \left(1 + \frac{1}{N_c} \right) B, \\ \langle \bar{B}|Q_S|B \rangle &= -f_B^2 M_B^2 \frac{M_B^2}{(m_b + m_s)^2} \left(2 - \frac{1}{N_c} \right) B_S, \\ \langle \bar{B}|R_2|B \rangle &= -f_B^2 M_B^2 \left(\frac{M_B^2}{m_b^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{N_c} \right) B_2, \\ \langle \bar{B}|R_3|B \rangle &= f_B^2 M_B^2 \left(\frac{M_B^2}{m_b^2} - 1 \right) \left(1 + \frac{1}{2N_c} \right) B_3. \end{aligned}$$

Основные теоретические неопределенности при анализе смешивания связаны с матричными элементами локальных операторов $\mathcal{O}_i \in \{Q, Q_S, R_2, R_3\}$, или, что эквивалентно, с параметрами мешка B_i .

Вычисление параметра мешка B_B (и аналогично параметра B_K для $(K^0 - \bar{K}^0)$ -смешивания) имеет долгую историю (факторизация, кварковые модели, феноменологическая унитарность, большие N_c , решетка и т. д.). Недавно появился строгий подход к вычислению матричных элементов – КХД-факторизация для $B \rightarrow \pi\pi$ и $B \rightarrow D\pi$, модель BBNS (Beneke, Buchalla, Neubert, Sachrajda). Она позволяет производить разложения по Λ_{QCD}/m_b как по малому параметру ($m_b = 4.2$ ГэВ, $\Lambda_{\text{QCD}} = 0.5$ ГэВ) и объясняет пертурбативные КХД-поправки. Собственно теоретическим приемом является эффективная теория для мягких и коллинеарных мод.

Здесь мы будем рассматривать вычисления, основанные на операторном разложении и правилах сумм КХД. Они выполняются в духе, очень близком к решеточным вычислениям, в рамках модельно-независимого, основанного на первопринципах метода. Подход, основанный на правилах сумм КХД, опирается на асимптотические разложения функции Грина (аналитически по малому параметру), тогда как на решетке можно найти (численно) всю функцию. Подход, основанный на правилах сумм, дает согласованный способ рассмотрения пертурбативных поправок к матричным элементам, необходимым для поддержания РГ-инвариантности физических наблюдаемых, обычно нарушаемой в других приближениях (факторизация).

4. АНАЛИЗ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРАВИЛАХ СУММ

Отправной точкой анализа является трехточечный коррелятор

$$T(p_1, p_2) = i^2 \int d^4x d^4y e^{ip_1x - ip_2y} \langle T j(x) \mathcal{O}(0) j(y) \rangle,$$

где $\mathcal{O} \in \{Q, Q_S, R_2, R_3\}$ – четырехкварковый оператор общего положения, а j может быть или аксимально-векторным (АВ), или псевдоскалярным (ПС) током:

$$j_5^\mu = \bar{s} \gamma^\mu \gamma_5 b \quad (\text{АВ}), \quad j_5 = \bar{s} i \gamma_5 b \quad (\text{ПС}).$$

Перекрытие определяется матричными элементами

$$\langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu \gamma_5 b(0) | \bar{B}(p) \rangle = i f_B p_\mu, \quad \langle 0 | \bar{s} i \gamma_5 b(0) | \bar{B}(p) \rangle = \frac{f_B M_B^2}{m_b + m_s}.$$

Для АВ-тока коррелятор является тензором, и берется тензорная структура $p_1^\mu p_2^\nu$

$$T^{\mu\nu}(p_1, p_2) = p_1^\mu p_2^\nu T(p_1, p_2) + \dots$$

Дисперсионное соотношение

$$T(p_1, p_2) = \int ds_1 ds_2 \frac{\rho(s_1, s_2, q^2)}{(s_1 - p_1^2)(s_2 - p_2^2)}$$

определяет спектральную плотность $\rho(s_1, s_2, q^2)$ – величину, имеющую физическое содержание. Для вывода правил сумм спектральная плотность вычисляется двумя способами:

1) в адронном случае имеем сумму B -мезонного полюса и континуума

$$\rho_{\text{AV}}^{\text{had}}(s_1, s_2) = f_B^2 \delta(s_1 - M_B^2) \delta(s_2 - M_B^2) \langle \bar{B} | \mathcal{O} | B \rangle + \rho_{\text{AV}}^{\text{cont}};$$

2) в случае КХД с использованием операторного разложения ρ_i^{OPE} представляет собой сумму пертурбативного и непертурбативного конденсатов, идея правил сумм КХД заключается в том, чтобы использовать дуальность

$$\int ds_1 ds_2 \rho_i^{\text{had}}(s_1, s_2) = \int ds_1 ds_2 \rho_i^{\text{OPE}}(s_1, s_2).$$

Физический спектр и спектр, полученный в некотором приближении операторного разложения в КХД, представлены на рис. 1.

Для анализа в рамках правил сумм используются два популярных метода:

1) правила сумм для конечной энергии с областью дуальности Δ , представляющей собой квадрат $m_b^2 < s_i < s_0$ в плоскости (s_1, s_2) :

$$f_B^2 \langle \bar{B} | \mathcal{O} | B \rangle = \int_{\Delta} ds_1 ds_2 \rho_{\text{AV}}^{\text{OPE}}(s_1, s_2);$$

Рис. 1. Однорезонансный адронный спектр (а) и приближение операторного разложения (б).

2) борелевские правила сумм с моделированием адронного континуума с предсказанием операторных разложений и использованием преобразования Бореля

$$f_B^2 \langle \bar{B} | \mathcal{O} | B \rangle e^{-M_B^2/M_1^2 - M_B^2/M_2^2} = \int_{\Delta} ds_1 ds_2 e^{-s_1/M_1^2 - s_2/M_2^2} \rho_{\text{AV}}^{\text{OPE}}(s_1, s_2).$$

4.1. Факторизация в правилах сумм. Полезно отметить, как факторизация реализуется в рамках анализа с использованием правил сумм. Из диаграмм операторного разложения видно, что можно расщепить трехточечный коррелятор на две части:

$$T(p_1, p_2) = T_{\text{fac}}(p_1, p_2) + \Delta T(p_1, p_2).$$

Факторизованная часть имеет явный вид:

$$T_{\text{fac}}(p_1, p_2) = \text{const} \times \Pi(p_1) \Pi(p_2),$$

где константа и $\Pi(p_i)$ конкретизируются для используемого оператора. Для операторов V-A структуры находим

$$T_{\text{fac}}^{\text{AV}}(p_1, p_2) = 2 \left(1 + \frac{1}{N_c} \right) \Pi^{\text{V}}(p_1) \Pi^{\text{V}}(p_2),$$

где определено

$$p^\alpha \Pi^{\text{V}}(p) = i \int dx e^{ipx} \langle T j(x) \bar{b} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) s(0) \rangle.$$

Правило сумм для факторизованной части $T_{\text{fac}}(p_1, p_2)$ дает $B = 1$ по построению. Далее непосредственно находим правило сумм для $\Delta B = B - 1$:

$$f_B^2 \Delta B e^{-M_B^2/M_1^2 - M_B^2/M_2^2} = \int ds_1 ds_2 \Delta \rho_{\text{AV}}^{\text{OPE}}(s_1, s_2) e^{-s_1/M_1^2 - s_2/M_2^2}$$

для борелевского правила сумм с АВ-током, и аналогично для других случаев.

Рис. 2. Пертурбативная диаграмма в главном приближении.

Рис. 3. Факторизуемые диаграммы в СГП.

В главном порядке в пертурбативной КХД трехточечная функция факторизуется:

$$T(p_1, p_2) = T_{\text{fac}}(p_1, p_2), \quad \Delta T(p_1, p_2) = 0$$

и

$$T^{\text{LO}}(p_1, p_2) = T_{\text{fac}}^{\text{LO}}(p_1, p_2) = \text{const} \times \Pi^{\text{LO}}(p_1) \Pi^{\text{LO}}(p_2).$$

Тогда имеем $B = 1$ (рис. 2). Однако это всего лишь анализ главного приближения. Можно добиться большего, поскольку диаграммы высшего порядка составляют полную функцию $\Pi^{\text{LO}}(p_1) \rightarrow \Pi(p_1)$, а кроме того,

$$T_{\text{fac}}^{\text{LO}}(p_1, p_2) \rightarrow T_{\text{fac}}(p_1, p_2) = \text{const} \times \Pi(p_1) \Pi(p_2).$$

Действительно, СГП в пертурбативной КХД дает вклад в факторизуемую часть коррелятора, показанного на рис. 3. Таким образом, факторизуемые СГП-вклады даются произведением двухточечных корреляционных функций

$$\Pi_{\text{fac}}^{\text{NLO}} = \frac{8}{3}(p_1, p_2) \{ \Pi^{\text{LO}}(p_1^2) \Pi^{\text{NLO}}(p_2^2) + \text{symm}(p_1, p_2) \}.$$

Заметим, что спектральная плотность в следующем за ведущим приближении $\Pi^{\text{NLO}}(p^2)$ известна аналитически, это решает проблему анализа в СГП в факторизационном приближении.

В качестве примера непертурбативных (конденсат) факторизуемых вкладов на рис. 4 приведен вклад глюонного конденсата.

Факторизуемые диаграммы образуют важное подмножество всех вкладов, поскольку они независимо калибровочно-инвариантны и РГ-инвариантны. Таким образом, классификация диаграмм в терминах их факторизуемости является самосогласованной и представляет собой мощный инструмент количественного анализа.

Перейдем к нефакторизуемым вкладам. Первый обусловлен пертурбативной КХД-диаграммой, показанной на рис. 5. Анализ нефакторизуемых вкладов в СГП в рамках теории возмущений сводится к вычислению набора трехпетлевых диаграмм, что представляет собой нетривиальную задачу.

Имеются также нефакторизуемые вклады от конденсата, которые вычислить проще, поскольку они определяются однопетлевыми или даже древесными диаграммами (см. рис. 6).

Рис. 4. Факторизуемая непертурбативная глюон-глюонная диаграмма.

Рис. 5. Нефакторизуемая диаграмма в СГП.

Рис. 6. Нефакторизуемые конденсатные вклады.

Начнем анализ с правил сумм для трехточечного коррелятора с непертурбативными членами, или вакуумных конденсатов.

4.2. Конденсатные поправки к факторизации. Общее выражение для операторного разложения спектральной плотности имеет вид

$$\Delta\rho_i(s_1, s_2) = \Delta\rho_i^{\text{GG}}(s_1, s_2)\langle GG \rangle + \Delta\rho_i^{\text{SGS}}(s_1, s_2)\langle \bar{s}Gs \rangle + \dots$$

для каждого из восьми случаев (АВ- или ПС-ток для операторов Q, Q_S, R_2, R_3). Вклад глюонного конденсата для оператора Q в главном порядке давно известен [1].

В качестве примера приведем явное выражение для оператора Q_S с ПС-током:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_{\text{PS}}(s_1, s_2) = & \frac{1}{48\pi^2} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \right\rangle \frac{1}{s_1 s_2} \left(\frac{s_1 s_2}{2} (6 - 3z_1 - 3z_2 + z_1 z_2) + (p_1 p_2)^2 z_1 z_2 \right) + \\ & + \frac{m_b}{16\pi^2} \langle \bar{s}Gs \rangle ((-2 + z_1)\delta(s_2 - m_b^2) + (-2 + z_2)\delta(s_1 - m_b^2)), \quad z_i = \frac{m_b^2}{s_i}. \end{aligned}$$

На рис. 7 показаны результаты борелевских правил сумм в приближении эффективной теории для описания тяжелых кварков (НҚЕТ) [2]. Формальная процедура

Рис. 7. Зависимости $-\Delta B$ от W , полученные с помощью борелевского правила сумм в приближении HQET: штриховые кривые – для АВ-тока, пунктирные – для РС-тока.

HQET взятия предела такова: запишем $M_B = m_b + \bar{\Lambda}$, $s = (m_b + E)^2$, $s_0 = (m_b + E_0)^2$ и разложим правила сумм КХД по $1/m_b$.

Численные результаты и неопределенности анализа представлены на рис. 8, параметры составляют: $210 \text{ МэВ} < f_{B_s} < 270 \text{ МэВ}$, $m_b = 4.2 \pm 0.2 \text{ ГэВ}$, $32 < s_0 < 40 \text{ ГэВ}^2$ в КХД и $m_b = 4.8 \text{ ГэВ}$, $1 \text{ ГэВ} < E_0 < 1.5 \text{ ГэВ}$ в HQET. Численная величина конденсатов изменяется на $\pm 30\%$.

Неопределенность, связанная с изменением каждого параметра, показана на примере оператора Q_S в приближении HQET. Самые большие ошибки связаны со значением постоянной распада f_B . Зависимость от $\bar{\Lambda}$ и E_0 довольно умеренная. Результаты для ΔB линейно зависят от величины конденсатов, и неопределенность, связанная с конденсатами, сравнима с той, которая обусловлена f_B .

Во всех случаях (не считая R_2) наши центральные значения для ΔB в КХД и в приближении HQET оказываются (почти) равными. Причина этого состоит в медленной сходимости по $1/m_b$ для R_2 . Окончательные результаты приведены в таблице.

Оператор	КХД $\Delta B, \%$	HQET $\Delta B, \%$
Q	-0.6 ± 0.5	-0.6 ± 0.5
Q_S	-0.5 ± 0.4	-0.6 ± 0.4
R_2	0.3 ± 0.3	0.8 ± 0.7
R_3	0.3 ± 0.2	0.3 ± 0.2

Рис. 8. Зависимости $-\Delta B$ от W для оператора Q_S в случае АВ-тока для правил сумм в приближении HQET. На графике для изменений конденсата темно-серая полоса соответствует изменению глюонного конденсата, а бóльшая светло-серая полоса – изменению кварк-глюонного конденсата.

Нефакторизуемые пертурбативные члены включают трехпетлевые диаграммы, их вычисление представляет собой нетривиальную задачу, тем не менее имеются результаты для оператора Q .

4.3. Нефакторизуемые пертурбативные поправки: анализ трехточечного коррелятора в трех петлях в пертурбативной КХД. Ввиду технических сложностей при вычислении спектральной плотности трехпетлевых диаграмм мы вычислим моменты корреляционной функции для случая $p_1^2 = p_2^2 = 0$ в точке $q^2 = 0$, как это было сделано в работе [3]:

$$M(i, j) \equiv \frac{\partial^{i+j} \Pi(p_1^2, p_2^2, 0)}{i! j! \partial p_1^{2i} \partial p_2^{2j}} = \int \frac{\rho(s_1, s_2, 0) ds_1 ds_2}{s_1^{i+1} s_2^{j+1}}.$$

Вычисление моментов в КХД сводится к вычислению вакуумных диаграмм с одним масштабом (см. рис. 9). Такое вычисление проводится аналитически на трехпетлевом уровне доступными средствами автоматического вычисления многопетлевых диаграмм. Эти диаграммы были вычислены с использованием пакета программ МАТАД для автоматического вычисления фейнмановских диаграмм. После решения комбинаторной задачи разделения различных тензорных структур все диаграммы свелись к скалярным интегралам.

Рис. 9. Топология $(B^0 - \bar{B}^0)$ -моментов.

Теоретические моменты даются в виде

$$M_{\text{th}}(i, j) = \frac{m^6 a_{ij}}{m^{2(i+j)}} \left(1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} (b_{ij}^{\text{fac}} + b_{ij}^{\text{nfac}}) \right) \quad (1)$$

с единственным разложением, которое согласовано с ренормализационной группой и калибровочной инвариантностью. Здесь a_{ij} – вклад главного порядка, b_{ij}^{fac} – факторизуемая в СГП часть, b_{ij}^{nfac} – нефакторизуемый в СГП вклад.

Мы нашли нефакторизуемые в СГП вклады b_{ij}^{nf} для $i + j \leq 7$ аналитически. Вычисление потребовало почти 24 часа компьютерного времени на машине dual-CPU 2 GHz Intel Xeon. Вычисление высших моментов вполне возможно, но требует существенной оптимизации программного кода, что мы предполагаем сделать в ближайшем будущем. Аналитические результаты для самого низшего конечного момента $M_{\text{th}}(2, 2)$ следующие:

$$a_{22} = \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left(\frac{8}{3} \right), \quad b_{22}^{\text{fac}} = \frac{40}{3} + \frac{16\pi^2}{9},$$

$$b_{22}^{\text{nfac}} = S_2 \frac{8366187}{17500} - \zeta(3) \frac{84608}{875} - \pi^2 \frac{33197}{52500} - \frac{426319}{315000},$$

где

$$S_2 = \frac{4}{9\sqrt{3}} \text{Cl}_2 \left(\frac{\pi}{3} \right) = 0.2604 \dots$$

Численные значения для высших моментов $b_{2(2345)}^{\text{nfac}} = \{0.68, 1.22, 1.44, 1.56\}$ и $b_{3(34)}^{\text{nfac}} = \{1.96, 2.25\}$.

Чтобы найти нефакторизуемую добавку к B_B , составим отношения полного и факторизуемого вкладов:

$$\frac{M_{\text{th}}(i, j)}{M_{\text{th}}^{\text{fac}}(i, j)} = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{b_{ij}^{\text{nfac}}}{1 + \alpha_s b_{ij}^{\text{fac}} / 4\pi}.$$

Записывая $B_B = 1 + \Delta B$, выделяем ΔB путем совместной подгонки для нескольких “теоретических” и “феноменологических” моментов. Окончательная формула для определения ΔB имеет вид

$$\frac{\alpha_s}{4\pi} b_{ij}^{\text{nfac}} = \Delta B + \Delta R (z^{j-2} + z^{i-2}) + \Delta C z^{i+j-4},$$

где ΔR и ΔC – подгоночные параметры, связанные с моделью континуума, $z = m_B^2/(m_B^2 + \Delta)$. Используя для подгонки метод наименьших квадратов для всех доступных теоретических моментов и оценивая все неопределенности, найдем, наконец, нефакторизуемую в СГП поправку к ΔB в пертурбативной КХД:

$$\Delta B = (6 \pm 1) \frac{\alpha_s(m)}{4\pi}.$$

При $m = 4.8$ ГэВ, $\alpha_s(m) = 0.2$ получаем $\Delta B = 0.095 \approx 0.1$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итог.

1. Метод правил сумм представляет собой мощный инструмент для анализа матричных элементов локальных операторов, важных для физики ароматов. Результаты факторизации воспроизводятся на диаграммном уровне (не только в главном приближении).

2. Нефакторизуемые вклады в параметры мешка, обусловленные непертурбативными конденсатами, малы, $\Delta B_i = 0.5 - 1\%$ для всех операторов $\{Q, Q_S, R_2, R_3\}$.

3. Нефакторизуемые пертурбативные диаграммы сложны в техническом отношении, они представляют собой трехпетлевые массивные фейнмановские диаграммы. Моменты спектральной плотности для оператора Q вычислены аналитически на трехпетлевом уровне. Феноменологический анализ в рамках правила сумм КХД дает

$$\Delta B(m) = 0.10 \pm 0.02.$$

Список литературы

- [1] A. A. Ovchinnikov, A. A. Pivovarov, *Phys. Lett. B*, **207**:3 (1988), 333–337.
- [2] T. Mannel, B. D. Pecjak, A. A. Pivovarov, *Analyzing $B_s - \bar{B}_s$ mixing: Non-perturbative contributions to bag parameters from sum rules*, arXiv: [hep-ph/0703244](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0703244).
- [3] J. G. Körner, A. I. Onishchenko, A. A. Petrov, A. A. Pivovarov, *Phys. Rev. Lett.*, **91**:19 (2003), 192002, 4 pp., arXiv: [hep-ph/0306032](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0306032).