Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Г. Четыркин, Й. Х. Кюн, А. Майер, П. Майерхёфер, П. Маркар, М. Штайнхаузер, К. Штурм, Точные массы очарованных и прелестных кварков: теоретические и экспериментальные неопределенности, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 2, 265–279

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6765>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:52:02

© 2012 г. К. Г. Четыркин*, Й. Х. Кюн*, А. Майер*,
П. Майерхёфер†, П. Маркар*,
М. Штайнхаузер*, К. Штурм‡

ТОЧНЫЕ МАССЫ ОЧАРОВАННЫХ И ПРЕЛЕСТНЫХ КВАРКОВ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассмотрены недавние теоретические и экспериментальные уточнения значений масс очарованного и прелестного кварков. Представлены новые улучшенные вычисления вклада глюонного конденсата $\langle\alpha_s G^2/\pi\rangle$ в значение массы очарованного кварка и детальное исследование потенциальных неопределенностей в сечении рождения пар $b\bar{b}$ в континууме, а также параметрическое исследование зависимости от α_s полученных результатов. Окончательные результаты $m_c(3\text{ ГэВ}) = 986(13)\text{ МэВ}$ и $m_b(m_b) = 4163(16)\text{ МэВ}$ и полученное с помощью расчетов на решетке тесно связанное с предыдущими значение $m_c(3\text{ ГэВ}) = 986(6)\text{ МэВ}$ представляют собой наиболее точные из найденных на настоящий момент значений этих двух фундаментальных параметров Стандартной модели. Представлен критический анализ теоретических и экспериментальных неопределенностей.

Ключевые слова: правила сумм в КХД, массы тяжелых кварков, поляризация вакуума.

В прошедшие годы получено значительное уточнение значений масс очарованного и прелестного кварков, что является следствием улучшения экспериментальных методов и теоретических вычислений. Найти массы кварков можно, как опираясь на разнообразные экспериментальные результаты, так и путем теоретических вычислений. Один из наиболее точных на настоящий момент методов основан на идее, которая была выдвинута более тридцати лет назад в работе [1]. Сделаем краткий обзор самых последних результатов, полученных с помощью данного метода. Интерес к этому подходу возобновился после того, как был достигнут значительный прогресс в пертурбативных вычислениях высших порядков. В частности, для

*Institute for Theoretical Particle Physics, Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe, Germany. E-mail: johann.kuehn@kit.edu

†Institute for Theoretical Physics, University of Zurich, Zurich, Switzerland

‡Max Planck Institute of Physics, Werner Heisenberg Institute, Munich, Germany

тейлоровских коэффициентов поляризации вакуума (т. е. коэффициентов $\overline{C}_n$, которые обсуждаются ниже) сейчас доступны аналитические расчеты четырехпетлевых результатов вплоть до $n = 3$ и численные расчеты вплоть до $n = 10$. В рассматриваемом методе используется тот факт, что функцию поляризации вакуума $\Pi(q^2)$ и ее производные при $q^2 = 0$ можно рассматривать как короткодействующие величины, обратный масштаб которых характеризуется расстоянием от точки отсчета $q^2 = 0$ до пороговых значений $q^2 = (3 \text{ ГэВ})^2$ для очарованного кварка и $q^2 = (10 \text{ ГэВ})^2$ для прелестного кварка. Эта идея была использована в работе [2] после того, как стали доступны первые вычисления трехпетлевых моментов [3]–[5]. Затем метод был усовершенствован в работе [6], где использовались четырехпетлевые результаты для низшего момента из статей [7], [8]. Анализ, включающий дополнительные теоретические результаты из работ [9]–[11] и экспериментальные данные, представлен в работе [12]. В настоящей статье мы приводим улучшенную трактовку вклада глюонного конденсата в моменты коррелятора очарованного кварка и критически рассматриваем поведение R -отношения для процесса рождения тяжелых кварков с ароматом b в области, переходной от порога к пертурбативному континууму, и связанное с этим влияние на нахождение значения m_b .

Напомним некоторые основные обозначения и определения. Поляризация вакуума $\Pi_Q(q^2)$, индуцированная тяжелым кварком Q с зарядом Q_Q (в настоящей статье мы не учитываем так называемые синглетные вклады), представляет собой аналитическую функцию с полюсами и разрезом при $q^2 = M_{J/\psi}^2$ для очарованного кварка и при $q^2 = M_Y^2$ для прелестного кварка. При этом тейлоровские коэффициенты $\overline{C}_n$, определяемые соотношением

$$\Pi_Q(q^2) \equiv Q_Q^2 \frac{3}{16\pi^2} \sum_{n \geq 0} \overline{C}_n z^n,$$

в настоящее время можно вычислить в пертурбативной КХД (пКХД) с точностью порядка α_s^3 . Здесь $z \equiv q^2/4m_Q^2$, где $m_Q = m_Q(\mu)$ – бегущая $\overline{\text{MS}}$ -масса на масштабе μ . Используя дисперсионное соотношение с одним вычитанием

$$\Pi_Q(q^2) = \frac{1}{12\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{R_Q(s)}{s(s - q^2)},$$

где R_Q обозначает известное R -отношение для рождения тяжелых кварков с ароматом Q , можно выразить коэффициенты Тейлора через моменты величины R_Q . Приравнявая вычисленные по теории возмущений и экспериментальные моменты,

$$\mathcal{M}_n^{\text{exp}} = \int \frac{ds}{s^{n+1}} R_Q(s), \quad (1)$$

получаем (зависящее от n) определение массы кварка:

$$m_Q = \frac{1}{2} \left(\frac{9Q_Q^2}{4} \frac{\overline{C}_n}{\mathcal{M}_n^{\text{exp}}} \right)^{1/2n}. \quad (2)$$

Со времен анализа, впервые проведенного в работе [1], в пертурбативных вычислениях моментов был достигнут значительный прогресс. Вклад порядка $O(\alpha_s^2)$

(в трех петлях) был вычислен вплоть до членов с $n = 8$ более тринадцати лет назад [3]–[5], а недавно даже до $n = 30$ [13], [14]. Были вычислены два низших момента ($n = 0, 1$) векторного коррелятора в порядке $O(\alpha_s^3)$, т.е. в четырехпетлевом приближении [7], [8]. Соответствующие два низших момента для псевдоскалярного коррелятора были найдены с помощью численных расчетов на решетке в работе [15] с целью получения массы очарованного кварка [16]. В работах [9], [10] были вычислены второй и третий моменты для векторного, аксиального и псевдоскалярного корреляторов. Наконец, объединяя эти результаты с данными о пороговой области и поведении при высоких энергиях в форме паде-аппроксимации, авторы работы [11] реконструировали полную зависимость от q^2 для всех четырех корреляторов и следующих моментов, начиная от $n = 4$ и вплоть до $n = 10$. При этом результаты были получены с достаточной точностью.

Большинство экспериментальных данных как для очарованного, так и для прелестного кварка собраны и использованы в работе [6]. В статьях [6], [12] учтена оценка глюонного конденсата, дающего крошечный вклад в случае очарованного кварка. Эта оценка получена на основании результатов работы [17] с учетом членов следующего за главным порядком (СГП) из работы [18]:

$$\delta\mathcal{M}_n^{\text{np}} = \frac{12\pi^2 Q_c^2}{(4m_{c,\text{pole}}^2)^{n+2}} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle a_n \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} b_n \right), \quad (3)$$

где

$$a_n = -\frac{2n+2}{15} \frac{\Gamma(n+4)}{\Gamma(4)} \frac{\Gamma(7/2)}{\Gamma(n+7/2)},$$

$$b_1 = \frac{135779}{12960}, \quad b_2 = \frac{1969}{168}, \quad b_3 = \frac{546421}{42525}, \quad b_4 = \frac{661687433}{47628000}.$$

Используя пересчитанное соотношение между полюсной и $\overline{\text{MS}}$ -массой с точностью $O(\alpha_s)$, т.е. соотношение

$$\frac{m_Q(\mu)}{m_{Q,\text{pole}}} = 1 - \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\frac{4}{3} + \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} \right),$$

можно выразить величину (3) в терминах $\overline{\text{MS}}$ -массы на масштабе $\mu = 3 \text{ ГэВ}$ с новыми коэффициентами $\bar{b}_n = b_n - (2n+4)(4/3 + \ln(\mu^2/m_Q^2))$. Однако, из-за того что масса входит в соотношение (3) в большой обратной степени, эта конверсия становится неустойчивой¹⁾ (полученный в работах [6], [12] эффект был небольшим, и тем не менее он заслуживает внимания). На основании этого мы предпочитаем непосредственно использовать формулировку равенства (3) “на массовой оболочке” с параметрами $m_{c,\text{pole}} = 1.5 \text{ ГэВ}$ и $\alpha_s^{(4)}(3 \text{ ГэВ}) = 0.258$ (которые получены из $\alpha_s^{(5)}(M_Z) = 0.1189$) и коррелятором $\langle \alpha_s G^2/\pi \rangle = 0.006 \pm 0.012 \text{ ГэВ}^4$ [19].

Вклады в моменты приведены в табл. 1 как для главного порядка (ГП), так и для СГП; кроме того, в этой таблице приведены вклады узких резонансов ($\mathcal{M}_n^{\text{res}}$), пороговой области ($\mathcal{M}_n^{\text{thresh}}$) и континуума ($\mathcal{M}_n^{\text{cont}}$), взятые непосредственно из работы [6]. Результаты для массы очарованного кварка $m_c(3 \text{ ГэВ})$ приведены в табл. 2 опять же для двух вариантов вклада конденсата.

Таблица 1. Экспериментально полученные моменты (в единицах ГэВ^{-2n}) из соотношения (1), разбитые в соответствии со вкладами от узких резонансов, пороговой области для очарованного кварка и области континуума выше $\sqrt{s} = 4.8 \text{ ГэВ}$. В двух последних столбцах приведены вклады глюонного конденсата для ГП и СГП.

n	$\mathcal{M}_n^{\text{res}} \times 10^{(n-1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{thresh}} \times 10^{(n-1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{cont}} \times 10^{(n-1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{exp}} \times 10^{(n-1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{np}}(\text{ГП}) \times 10^{(n-1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{np}}(\text{СГП})$
1	0.1201(25)	0.0318(15)	0.0646(11)	0.2166(31)	-0.0001(3)	-0.0002(5)
2	0.1176(25)	0.0178(8)	0.0144(3)	0.1497(27)	-0.0002(5)	-0.0005(10)
3	0.1169(26)	0.0101(5)	0.0042(1)	0.1312(27)	-0.0004(8)	-0.0008(16)
4	0.1177(27)	0.0058(3)	0.0014(0)	0.1249(27)	-0.0006(12)	-0.0013(25)

Таблица 2. Результаты для $m_c(3 \text{ ГэВ})$ (в ГэВ), включающие вклад глюонного конденсата в ГП или СГП. Ошибки обусловлены ошибками эксперимента, неопределенностью константы α_s , вариациями μ и различными значениями глюонного конденсата.

n	$m_c(3 \text{ ГэВ})$ нрГП	$m_c(3 \text{ ГэВ})$ [нрСГП]	эксп.	α_s	μ	нрГП	нрСГП	полная [нрГП]	полная [нрСГП]
1	0.986	0.986	0.009	0.009	0.002	0.001	0.001	0.013	0.013
2	0.976	0.975	0.006	0.014	0.005	0.001	0.002	0.016	0.016
3	0.976	0.975	0.005	0.015	0.007	0.001	0.003	0.017	0.017
4	1.000	0.999	0.003	0.009	0.031	0.001	0.003	0.032	0.032

Из приведенных таблиц видно, что влияние глюонного конденсата остается малым, в частности для трех самых низших моментов. Окончательный результат $m_c(3 \text{ ГэВ}) = 986(13) \text{ МэВ}$ не отличается от результатов работ [6], [12]. Можно считать дополнительным подтверждением этого значения тот факт, что оно согласуется со значениями, соответствующими случаям $n = 2, 3, 4$. Переходя к масштабной-инвариантной массе $m_c(m_c)$ [20], включая четырехпетлевые коэффициенты ренормгрупповых функций, имеем $m_c(m_c) = 1279(13) \text{ МэВ}$ [12]. Здесь следует напомнить, что недавние исследования [21] в сочетании с численными расчетами на решетке для псевдоскалярного коррелятора, а также с пертурбативными результатами в трех и четырех петлях [5], [15], [10] привели к значению $m_c(3 \text{ ГэВ}) = 986(6) \text{ МэВ}$, которое находится в замечательном согласии с результатами работ [6], [12]. Кроме того, имеется неплохое согласие с недавним анализом, основанным на правилах сумм при конечных энергиях, вплоть до четырехпетлевого порядка теории возмущений [22], в результате которого было получено значение $m_c(3 \text{ ГэВ}) = 1008(26) \text{ МэВ}$.

Еще два года назад единственным измерением сечения рассеяния в области выше, но все еще близкой к B -мезонному порогу, т. е. в области между 10.6 ГэВ и 11.2 ГэВ , оставалось измерение, проведенное коллаборацией CLEO в середине восьмидесятых годов [23]. Значительная систематическая ошибка обуславливала значительную

¹⁾Мы благодарим С. Боденштайна за то, что он привлек наше внимание к этому факту.

Рис. 1. Сравнение перемасштабированных (деленных на 1.28) данных корпорации CLEO для R_b с данными корпорации BABAR [12], [24]. Черная полоса в правой части рисунка соответствует теоретическим предсказаниям из работы [25].

Рис. 2. Те же данные, что на рис. 1, в окрестности значения $\sqrt{s} = 11.2 \text{ ГэВ}$ в увеличенном масштабе. Показаны только данные корпорации BABAR. Заштрихованная область соответствует линейной интерполяции между значениями $R(11.2062 \text{ ГэВ})$ и $R(13 \text{ ГэВ})$ (см. случай А в тексте). Черная полоса справа соответствует теоретическим предсказаниям из работы [25].

долю окончательной ошибки в определении m_b в работе [6]. Эти измерения уступили место результатам, полученным коллаборацией BABAR [24], в которых системная ошибка составляла около 3%. В работе [12] были раскрыты радиационные поправки, которые использовались с целью получения значительно улучшенных результатов для моментов. Данные коллабораций CLEO и BABAR приведены на рис. 1 вместе с теоретическими предсказаниями, основанными на пКХД в порядке $O(\alpha_s^2)$. Заметим, что зависимость $R_b(\sqrt{s})$ делается плоской выше 11.1 ГэВ, так что можно ожидать согласия между данными пКХД и экспериментальными результатами. Результаты для области выше 11.1 ГэВ приведены на рис. 2, где кроме этого показаны теоретические предсказания.

Взяв средние данные для точек выше 11.1 ГэВ, находим $\bar{R}_b = 0.32$ с пренебрежимо малыми статистической и некоррелированной систематической ошибками. Коррелированная систематическая ошибка согласно оценке должна составлять 3.5%. В работах [6], [12] данные и предсказания пКХД были взяты для $\sqrt{s}$, лежащего соответственно ниже и выше значения 11.2 ГэВ (с линейной интерполяцией между данными для последней точки $R_b(11.2062 \text{ ГэВ}) = 0.331$ и предсказанием пКХД $R_b^{\text{пКХД}}(11.24 \text{ ГэВ}) = 0.387$). Это дает моменты и массы кварков, приведенные соответственно в табл. 3 и 4.

Таблица 3. Моменты для системы прелестного кварка (в единицах ГэВ $^{-2n}$).

n	$\mathcal{M}_n^{\text{res, (IS-4S)}} \times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{thresh}} \times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{cont}} \times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{exp}} \times 10^{(2n+1)}$
1	1.394(23)	0.287(12)	2.911(18)	4.592(31)
2	1.459(23)	0.240(10)	1.173(11)	2.872(28)
3	1.538(24)	0.200(8)	0.624(7)	2.362(26)
4	1.630(25)	0.168(7)	0.372(5)	2.170(26)

Таблица 4. Результаты для $m_b(10 \text{ ГэВ})$ и $m_b(m_b)$ (в ГэВ), полученные из уравнения (2). Ошибки обусловлены ошибками эксперимента, неопределенностью константы α_s и вариацией μ .

n	$m_b(10 \text{ ГэВ})$	эксп.	α_s	μ	полная	$m_b(m_b)$
1	3.597	0.014	0.007	0.002	0.016	4.151
2	3.610	0.010	0.012	0.003	0.016	4.163
3	3.619	0.008	0.014	0.006	0.018	4.172
4	3.631	0.006	0.015	0.020	0.026	4.183

Наши рассуждения основаны на допущении, что пКХД справедлива в области выше значений порядка 11.2 ГэВ, где относительный импульс b - и $\bar{b}$ -кварков достигает примерно 5 ГэВ. Действительно, из поведения R_b , показанного на рис. 1, понятно, что R_b , очевидно, быстро достигнет уровня, предсказываемого пКХД. Однако ввиду

двадцатипроцентного отклонения этих результатов от данных пКХД в окрестности значения 11.2 ГэВ можно рассматривать возможность того, что или пКХД справедлива только при значительно более высоких энергиях (назовем это случаем А), или систематическая ошибка в данных коллаборации BABAR существенно недооценена, в результате чего требуется сдвиг полученных данных на значительную величину (случай Б). Эти варианты следует рассматривать как сценарии “на крайний случай”, тем не менее мы покажем, что получающиеся сдвиги лишь ненамного превосходят ошибку, приведенную в работе [12]. Рассмотрим оба случая подробнее.

СЛУЧАЙ А. Будем считать, что пертурбативная КХД справедлива только при высоких энергиях, скажем выше 13 ГэВ, с линейной интерполяцией между значениями $R_b(11.2 \text{ ГэВ}) = 0.32$ и $R_b^{\text{пКХД}}(13 \text{ ГэВ}) = 0.377$. Результаты для моментов и массы $m_b(10 \text{ ГэВ})$ приведены соответственно в табл. 5 и табл. 6 в предположении, что неопределенность составляет 4% при $\sqrt{s} = 11.2062 \text{ ГэВ}$ и отсутствует для $R(13 \text{ ГэВ})$. Как видно из табл. 6, для массы прелестного кварка наблюдается замечательная устойчивость. При $n = 2$ получаем $m_b(10 \text{ ГэВ}) = 3.630 \text{ ГэВ}$.

Таблица 5. Моменты для системы прелестного кварка (в ГэВ^{-2n}), полученные для случая А. Вклад от линейной интерполяции содержится в $\mathcal{M}_n^{\text{cont}}$.

n	$\mathcal{M}_n^{\text{res, (1S-4S)}}$ $\times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{thresh}}$ $\times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{cont}}$ $\times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{exp}}$ $\times 10^{(2n+1)}$
1	1.394(23)	0.270(11)	2.854(17)	4.518(31)
2	1.459(23)	0.226(9)	1.133(11)	2.819(27)
3	1.538(24)	0.190(8)	0.596(8)	2.324(26)
4	1.630(25)	0.159(6)	0.353(5)	2.142(26)

Таблица 6. Масса прелестного кварка (в ГэВ), полученная для случая А. Неопределенности обусловлены ошибками эксперимента, неопределенностью константы α_s и вариацией μ .

n	$m_b(10 \text{ ГэВ})$	эксп.	α_s	μ	полная	$m_b(m_b)$
1	3.631	0.014	0.007	0.002	0.016	4.183
2	3.630	0.010	0.012	0.003	0.016	4.182
3	3.631	0.008	0.014	0.006	0.018	4.183
4	3.637	0.007	0.015	0.020	0.026	4.189

СЛУЧАЙ Б. Будем считать, что пКХД справедлива при 11.2 ГэВ, а полученная в работе [24] систематическая ошибка недооценена, поэтому данные в пороговой области перемасштабируются множителем $R_b^{\text{пКХД}}/\bar{R}_b = 0.387/0.32 \approx 1.21$, что соответствует сдвигу приблизительно на 7σ . Результаты для моментов приведены в табл. 7, соответствующие предсказания для значения $m_b(10 \text{ ГэВ})$ – в табл. 8, где

ТАБЛИЦА 7. Моменты для системы прелестного кварка (в ГэВ⁻²ⁿ), полученные для случая Б.

n	$\mathcal{M}_n^{\text{res. (IS-4S)}} \times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{thresh}} \times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{cont}} \times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{exp}} \times 10^{(2n+1)}$
1	1.394(23)	0.347(14)	2.911(18)	4.651(32)
2	1.459(23)	0.290(12)	1.173(11)	2.921(28)
3	1.538(24)	0.242(10)	0.624(7)	2.404(27)
4	1.630(25)	0.203(8)	0.372(5)	2.205(27)

ТАБЛИЦА 8. Масса прелестного кварка (в ГэВ), полученная для случая Б. Неопределенности обусловлены ошибками эксперимента, неопределенностью константы α_s и вариацией μ .

n	$m_b(10 \text{ ГэВ})$	эксп.	α_s	μ	полная	$m_b(m_b)$
1	3.570	0.015	0.008	0.002	0.017	4.124
2	3.592	0.010	0.012	0.003	0.016	4.146
3	3.607	0.008	0.014	0.006	0.018	4.160
4	3.622	0.006	0.015	0.020	0.026	4.175

$m_b(10 \text{ ГэВ}) = 3.592 \text{ ГэВ}$ при $n = 2$. Как и ожидалось, тенденция возрастания m_b при возрастании n , уже заметная в табл. 4, выражена сильнее.

Подобно случаю очарованного кварка, результат для массы прелестного кварка на основе низших моментов более устойчив, чем результат на основе моментов с $n = 4$ и выше. Чтобы подавить теоретически вычисленный вклад выше 11.2 ГэВ (составляющий, грубо говоря, 60% для низших моментов, 40% для второго и 26% для третьего момента), в качестве нашего окончательного результата примем результат на основе второго момента

$$m_b(10 \text{ ГэВ}) = 3610(16) \text{ МэВ}, \quad (4)$$

что соответствует $m_b(m_b) = 4163(16) \text{ МэВ}$. Заметим, что случаи А и Б рассматриваются как сценарии “на крайний случай”, тем не менее сдвиг (при $n = 2$) равен 20 МэВ и -18 МэВ в случаях А и Б соответственно, таким образом, он лишь немного выше, чем неопределенность в 16 МэВ. По этой причине мы все-таки используем исходный результат (4). Явную зависимость m_c и m_b от α_s можно найти в работе [12]. При рассмотрении отношения масс очарованного и прелестного кварков часть зависимостей от α_s и μ сокращается:

$$\frac{m_c(3 \text{ ГэВ})}{m_b(10 \text{ ГэВ})} = 0.2732 - \frac{\alpha_s(M_Z) - 0.1189}{0.002} \cdot 0.0014 \pm 0.0028.$$

Эта комбинация может оказаться полезной при анализе распадов прелестного кварка.

Рис. 3. Сравнение недавних результатов определения значений $m_c(3 \text{ ГэВ})$ (а) и $m_b(m_b)$ (б). Заштрихованная область отвечает значениям, полученным в нашей работе [12].

На рис. 3 результаты наших исследований приведены в сравнении с другими результатами. Значение m_c заведомо лежит внутри интервала, получающегося другими методами. Для m_b наш результат немного сдвинут в сторону меньших значений, хотя это еще не противоречит большинству других результатов.

Результаты, приведенные в работе [12], составляют наиболее точные из доступных на данный момент значений масс очарованного и прелестного кварков²⁾, тем не менее соблазнительно указать на преобладающие ошибки, чтобы понять, какие усовершенствования возможны. В случае очарованных кварков в ошибке доминирует параметрическая неопределенность в константе сильного взаимодействия $\alpha_s(M_Z) = 0.1189 \pm 0.002$. Экспериментальные и теоретические ошибки являются сравнимыми, при этом в последних доминирует электронная ширина узких резонансов. В принципе эту ошибку можно еще уменьшить за счет измерений с высокой светимостью в эксперименте BESS III. Дальнейшее уменьшение (уже и так микроскопической) теоретической ошибки, например с помощью пятипетлевых вычислений, представляется сложным. Наши результаты дополнительно подтверждаются сравнением с упомянутыми выше результатами численных расчетов на решетке.

Уточнение массы прелестного кварка можно было бы получить путем улучшения эксперимента, например за счет более точного определения электронных ширин узких Υ -резонансов или с помощью еще одного независимого измерения R -отношения в области от $\Upsilon(4S)$ до 11.2 ГэВ. Мы уже обсуждали небольшое расхождение между теоретическими предсказаниями для энергий выше 11.2 ГэВ и данными в области, лежащей ниже, когда систематическая ошибка составляет примерно 3%. Независимые измерения в области континуума, например данные коллаборации BELLE, представляются исключительно важными. В этой связи может быть полезным собрать вместе наиболее важные факты, свидетельствующие в пользу этой удивительно малой ошибки. Некоторые обсуждения применимы и к очарованному, и к прелестному кварку, а некоторые – только к одному из них. В частности, для очарованного кварка, (впрочем, до некоторой степени и для прелестного кварка) зависимость результатов от μ возрастает для высших моментов начиная с $n = 4$ и доминирует в суммарной ошибке, поэтому мы сосредоточимся на моментах при $n = 1, 2, 3$, которые использовались при определении массы, а результаты с $n = 4$ упомянем только для иллюстрации.

Начнем с очарованного кварка. Сразу следует подчеркнуть, что главная подлежащая определению величина – это бегущая масса на масштабе 3 ГэВ, характерном для порога рождения и, таким образом, для всего процесса. Более того, на этом масштабе константа сильного взаимодействия $\alpha_s^{(4)}(3 \text{ ГэВ}) = 0.258$ уже достаточно мала, так что члены высших порядков в ряде теории возмущений быстро убывают. И, наконец, что тоже немаловажно, для многих других интересующих нас процессов, например распада B -мезона на очарованные кварки или таких процессов, включающих виртуальные очарованные кварки, как $B \rightarrow X_s \gamma$ или $K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$, характерный масштаб имеет порядок 3 ГэВ или выше. Искусственно заставляя массу сначала опуститься до величины порядка $O(1 \text{ ГэВ})$, а затем вернуться к более высокому масштабу, мы получаем ненужное раздувание ошибки.

На нахождение массы кварков влияет неопределенность теории, следующая, в частности, из нашего незнания высших порядков, а также ошибки в вычислениях экспериментальных моментов. Оценки последних были получены в работе [6], где

²⁾Для очарованного кварка несколько более точный результат был получен в работе [21].

Рис. 4. Значения $m_c(3\text{ГэВ})$ для $n = 1, 2, 3, 4$. Для каждого значения n результаты слева направо соответствуют включению членов порядка α_s^0 , α_s^1 , α_s^2 и α_s^3 .

значение $m_c(\mu)$ оценивалось на различных масштабах перенормировки от 2 ГэВ до 4 ГэВ (при этом, разумеется, подходящим образом изменялись коэффициенты $\overline{C}_n$) при последующем изменении массы от $m_c(\mu)$ до $m_c(3\text{ГэВ})$. Оценки ошибок, основанные на этих рассмотрениях, приведены в табл. 2.

Устойчивость результата по отношению к включению высших порядков также видна на рис. 4, где приведены результаты, полученные при различных значениях n , для порядков α_s^i при $i = 0, 1, 2, 3$. Это рассуждение можно сделать более детальным с количественной точки зрения, переписав уравнение (2) в виде³⁾

$$m_c = \frac{1}{2} \left(\frac{9Q_c^2}{4} \frac{\overline{C}_n^{\text{Born}}}{\mathcal{M}_n^{\text{exp}}} \right)^{1/2n} (1 + r_n^{(1)}\alpha_s + r_n^{(2)}\alpha_s^2 + r_n^{(3)}\alpha_s^3) \propto$$

$$\propto 1 - \begin{pmatrix} 0.328 \\ 0.524 \\ 0.618 \\ 0.662 \end{pmatrix} \alpha_s - \begin{pmatrix} 0.306 \\ 0.409 \\ 0.510 \\ 0.575 \end{pmatrix} \alpha_s^2 - \begin{pmatrix} 0.262 \\ 0.230 \\ 0.299 \\ 0.396 \end{pmatrix} \alpha_s^3, \quad (5)$$

где в правой части строчки соответствуют моментам при $n = 1, 2, 3, 4$. Заметим, что коэффициенты уменьшаются при возрастании порядка α_s . Приняв $r_n^{\text{max}}(\alpha_s(3\text{ГэВ}))^4$

³⁾ Поправки КЭД содержатся в $\overline{C}_n^{\text{Born}}$.

за оценку ошибки, приходим к относительным ошибкам 1.4, 2.3, 2.7, 2.9 % для $n = 1, 2, 3, 4$ соответственно и, таким образом, к величине ошибки, очевидно меньшей, чем та, что основана на зависимости от μ .

Согласие между результатами для различных значений n – это еще одно свидетельство в пользу нашего рассмотрения (см. рис. 4 и табл. 2). Для трех низших моментов разность между максимальным и минимальным значениями составляет всего лишь 10 МэВ. Это к тому же указывает на самосогласованность набора наших данных. Проиллюстрируем этот аспект на примере критического обсуждения “вклада континуума”, т. е. области выше 4.8 ГэВ, где экспериментальные данные имеются лишь для далеко разнесенных точек. Для вычисления вкладов моментов вместо экспериментальных данных мы используем теоретические предсказания для $R(s)$. Если бы истинный вклад от этой области сдвигался вниз, скажем на 10%, то это привело бы к сдвигу значения m_c для $n = 1$ приблизительно на 20 МэВ вверх. Однако тот же самый сдвиг приводил бы к небольшому увеличению на 3 МэВ при $n = 2$, оставляя результаты для больших n практически неизменными. Более того, всюду, где имеются теоретические предсказания и измерения в области от 4.8 ГэВ до порога рождения прелестного мезона, они прекрасно согласуются (см. рис. 5), отклонения определенно лежат в пределах статистической и систематической ошибок, величина которых составляет от 3% до 5%. Наконец, что также немаловажно, приведенный результат великолепно согласуется с упомянутыми выше недавними результатами численных расчетов на решетке.

Теперь обсудим прелестный кварк для m_b , вычисленной при $\mu = 10$ ГэВ. Вновь сначала рассмотрим устойчивость разложения по теории возмущений, а затем – самосогласованность экспериментальных данных. При $\alpha_s(10 \text{ ГэВ}) = 0.180$ поправки высших порядков убывают даже быстрее, чем в случае очарованного кварка. Изменение масштаба μ от 5 ГэВ до 15 ГэВ приводит к абсолютно пренебрежимо малому сдвигу, величина которого лежит между 2 МэВ и 6 МэВ (см. табл. 4). Как и выше, можно рассмотреть аналог уравнения (5) с поправочным множителем:

$$\frac{m_b}{m_b^{\text{Born}}} = 1 - \begin{pmatrix} 0.270 \\ 0.456 \\ 0.546 \\ 0.603 \end{pmatrix} \alpha_s - \begin{pmatrix} 0.206 \\ 0.272 \\ 0.348 \\ 0.410 \end{pmatrix} \alpha_s^2 + \begin{pmatrix} -0.064 \\ 0.048 \\ 0.051 \\ 0.012 \end{pmatrix} \alpha_s^3.$$

Если принять $r_n^{\text{max}}(\alpha_s(10 \text{ ГэВ}))^4$ за оценку ошибки, получим относительную ошибку, равную 0.28, 0.48, 0.57, 0.63 % для $n = 1, 2, 3, 4$ соответственно, что также меньше наших предыдущих оценок.

Теперь перейдем к критическим обсуждениям экспериментальных данных. Вклад четырех низших Υ -резонансов берется непосредственно из данных Particle Data Group [26] с систематическими ошибками, полученными путем линейной экстраполяции из ошибок для трех низших Υ -резонансов. В работе [12] проведен анализ недавних измерений из работы [24] для величины R_b в пороговой области вплоть до 11.20 ГэВ, который дал результаты, согласующиеся с результатами более ранних исследований [6], но привел к значительному уменьшению ошибки в определении значения m_b .

Рис. 5. Зависимость $R(\sqrt{s})$ для различных интервалов по энергии вблизи пороговой области для очарованного кварка. Сплошная линия соответствует теоретическим предсказаниям.

По сравнению с результатами анализа очарованного кварка в случае прелестного кварка больший вклад дает область, где данные заменены результатами теоретических предсказаний для R_b с относительными вкладами, равными 63 %, 41 %, 26 %, 17 % при $n = 1, 2, 3, 4$ соответственно. Это в особенности характерно для низших моментов, поэтому мы предпочитаем использовать результат для $n = 2$, в качестве альтернативы мы могли бы также использовать результат для $n = 3$.

Соберем аргументы, свидетельствующие в пользу данного подхода.

1. Для легких и очарованного кварков предсказание значения R на основе пКХД работает исключительно хорошо уже в области на 2–3 ГэВ выше пороговой. Не наблюдается никакого систематического расхождения между теоретическими и экспериментальными результатами в случае безмассовых кварков, начиная со значения приблизительно в 2 ГэВ, и для сечения рассеяния, включая рассеяние очарованного кварка, при энергии, равной или превосходящей 5 ГэВ, вплоть до пороговой области для прелестного кварка (см. рис. 5). Таким образом, трудно ожидать, что тот же самый подход обречен на неудачу при рассмотрении рождения прелестных кварков.

2. Если бы истинное значение R_b в области континуума (выше 11.2 ГэВ) существенно отличалось от значения, полученного из теоретических предсказаний, то результаты для $n = 1, 2, 3$ не согласовывались бы между собой: сдвиг на 5 % члена, соответствующего области континуума, привел бы к сдвигу значения m_b , вычисленного для $n = 1$, приблизительно на 64 МэВ, 21 МэВ, 9 МэВ для результатов при $n = 1, 2, 3$ соответственно.

Подведем итог. В последние годы был достигнут существенный прогресс в определении масс очарованного и прелестного кварков. В настоящее время дальнейшее уменьшение теоретических и экспериментальных ошибок представляется затруднительным, однако независимые экспериментальные результаты, касающиеся R -отношения, могли бы способствовать дальнейшему прояснению существующей

ситуации. Подтверждение, полученное с помощью недавних расчетов на решетке с аналогично малой неопределенностью, внушает дополнительную уверенность в результатах для m_c .

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Deutsche Forschungsgemeinschaft (проект SFB/TR-9 “Computational Particle Physics”). Работа К. Штурма частично поддержана со стороны European Community’s Marie Curie Research Training Network Tools and Precision Calculations for Physics Discoveries at Colliders (HEPTOOLS) (контракт MRNT-CT-2006-035505). Й. Х. Кюн выражает благодарность организаторам XVI Международного семинара по физике высоких энергий “Quarks-2010” за гостеприимство.

Список литературы

- [1] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, *Nucl. Phys. B*, **147**:5 (1979), 385–447.
- [2] J. H. Kühn, M. Steinhauser, *Nucl. Phys. B*, **619**:1–3 (2001), 588–602; Erratum, **640**:1–2 (2002), 415, arXiv: hep-ph/0109084.
- [3] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, M. Steinhauser, *Phys. Lett. B*, **371**:1–2 (1996), 93–98, arXiv: hep-ph/9511430.
- [4] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, M. Steinhauser, *Nucl. Phys. B*, **482**:1–2 (1996), 213–240, arXiv: hep-ph/9606230.
- [5] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, M. Steinhauser, *Nucl. Phys. B*, **505**:1–2 (1997), 40–64, arXiv: hep-ph/9705254.
- [6] J. H. Kühn, M. Steinhauser, C. Sturm, *Nucl. Phys. B*, **778**:1–2 (2007), 192–215, arXiv: hep-ph/0702103.
- [7] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, C. Sturm, *Eur. Phys. J. C*, **48**:1 (2006), 107–110, arXiv: hep-ph/0604234.
- [8] R. Boughezal, M. Czakon, T. Schutzmeier, *Phys. Rev. D*, **74**:7 (2006), 074006, 5 pp., arXiv: hep-ph/0605023.
- [9] A. Maier, P. Maierhofer, P. Marquard, *Phys. Lett. B*, **669**:1 (2008), 88–91, arXiv: 0806.3405.
- [10] A. Maier, P. Maierhofer, P. Marquard, A. V. Smirnov, *Nucl. Phys. B*, **824**:1–2 (2010), 1–18, arXiv: 0907.2117.
- [11] Y. Kiyo, A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard, *Nucl. Phys. B*, **823**:1–2 (2009), 269–287, arXiv: 0907.2120.
- [12] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard, M. Steinhauser, C. Sturm, *Phys. Rev. D*, **80**:7 (2009), 074010, 5 pp., arXiv: 0907.2110.
- [13] R. Boughezal, M. Czakon, T. Schutzmeier, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **160** (2006), 160–164, arXiv: hep-ph/0607141.
- [14] A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard, *Nucl. Phys. B*, **797**:1–2 (2008), 218–242.
- [15] C. Sturm, *JHEP*, **09** (2008), 075, arXiv: 0805.3358.
- [16] I. Allison et al. (HPQCD Collab.), *Phys. Rev. D*, **78**:5 (2008), 054513, 12 pp., arXiv: 0805.2999.
- [17] V. A. Novikov, L. B. Okun, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, M. B. Voloshin, V. I. Zakharov, *Phys. Rept.*, **41**:1 (1978), 1–133.
- [18] D. J. Broadhurst, P. A. Baikov, V. A. Ilyin, J. Fleischer, O. V. Tarasov, V. A. Smirnov, *Phys. Lett. B*, **329**:1 (1994), 103–110, arXiv: hep-ph/9403274.
- [19] B. L. Ioffe, *Progr. Part. Nucl. Phys.*, **56**:1 (2006), 232–277, arXiv: hep-ph/0502148.
- [20] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, M. Steinhauser, *Comput. Phys. Commun.*, **133**:1 (2000), 43–65, arXiv: hep-ph/0004189.

- [21] C. McNeile, C. T. H. Davies, E. Follana, K. Hornbostel, G. P. Lepage, *Phys. Rev. D*, **82**:3 (2010), 034512, 16 pp., arXiv:1004.4285.
- [22] S. Bodenstein, J. Bordes, C. A. Dominguez, J. Peñarrocha, K. Schilcher, *Phys. Rev. D*, **82** (2010), 114013, arXiv:1009.4325.
- [23] D. Besson et al. (CLEO Collab.), *Phys. Rev. Lett.*, **54**:5 (1985), 381–384.
- [24] B. Aubert et al. (BABAR Collab.), *Phys. Rev. Lett.*, **102**:1 (2009), 012001, arXiv:0809.4120.
- [25] R. V. Harlander, M. Steinhauser, *Comput. Phys. Commun.*, **153**:2 (2003), 244–274, arXiv: hep-ph/0212294.
- [26] W.-M. Yao et al. (Particle Data Group), *J. Phys. G*, **33**:1 (2006), 1–1232, arXiv: astro-ph/0601168.