Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Когомологии пространств основных функций Шварца, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 3, 323–334

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6769>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:40:23

© 2012 г.

В. В. Жаринов*

КОГОМОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ ШВАРЦА

Вычислены когомологии алгебр Шварца $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ – основных пространств (пространств тест-функций) теории обобщенных функций. Попутно найдены специальные когомологии фактор-алгебр $\mathcal{E}/\mathcal{D}$ и $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ ($\mathcal{E}$ и $\mathcal{M}$ – тоже основные пространства), весьма необычных с точки зрения стандартного функционального анализа и представляющих интерес для теоретической и математической физики.

Ключевые слова: распределения Шварца, когомологии, сферическое представление.

1. ВВЕДЕНИЕ

Всюду ниже $\mathbb{F}$ – числовое поле ($= \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$), и все линейные операции выполняются над ним.

В книге [1] Шварц ввел ряд пространств основных и обобщенных функций (тест-функций и распределений соответственно). Наиболее известными и употребительными из них являются следующие линейные локально выпуклые топологические пространства функций на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{F}$:

- пространство $\mathcal{D}$ всех гладких функций с компактным носителем и его сопряженное $\mathcal{D}'$ – пространство всех обобщенных функций,
- пространство $\mathcal{S}$ всех гладких быстро убывающих функций и его сопряженное $\mathcal{S}'$ – пространство обобщенных функций умеренного роста,
- пространство $\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ всех гладких функций и его сопряженное $\mathcal{E}'$ – пространство всех обобщенных функций с компактным носителем.

По построению пространства $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$ суть алгебры функций над $\mathbb{F}$ с поточечными операциями. Это позволяет стандартным образом (см. п. Б) ассоциировать с ними комплексы де Рама $\{\Omega^q(\mathcal{D}); d^q\}$, $\{\Omega^q(\mathcal{S}); d^q\}$ и $\{\Omega^q(\mathcal{E}); d^q\}$ соответственно. Когомологии комплекса $\{\Omega^q(\mathcal{E}); d^q\}$ хорошо известны – это классические когомологии де Рама евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ (см. п. Г). В настоящей работе вычисляются когомологии комплексов $\{\Omega^q(\mathcal{D}); d^q\}$ и $\{\Omega^q(\mathcal{S}); d^q\}$ (теоремы 2 и 4). Попутно вводятся основное пространство $\mathcal{M}$ (см. п. В) и фактор-алгебры $\mathcal{E}/\mathcal{D}$ и $\mathcal{M}/\mathcal{S}$ и устанавливается, что когомологии соответствующих фактор-комплексов совпадают с когомологиями сферы S^{m-1} (следствия 1 и 2).

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

2. КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРЫ $\mathcal{D}$

Здесь (см. п. Б) $M = \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{A} = \mathcal{D}$, $\mathfrak{M} = \mathcal{E}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$ – алгебра Ли всех касательных векторных полей на $\mathbb{R}^m$ с компонентами из $\mathcal{E}$. Вычислим линейные пространства когомологий $H^q(\mathcal{D})$ ассоциированного комплекса де Рама $\{\Omega^q(\mathcal{D}); d^q\}$.

Вычисления разобьем на несколько этапов.

Прежде всего заметим, что алгебра $\mathcal{D}$ является идеалом алгебры $\mathcal{E}$, так что определена фактор-алгебра $\mathcal{E} = \mathcal{E}/\mathcal{D}$. Соответственно внешняя алгебра $\Omega(\mathcal{D})$ есть идеал внешней алгебры $\Omega(\mathcal{E})$, так что определена фактор-алгебра $\Omega(\mathcal{E}) = \Omega(\mathcal{E})/\Omega(\mathcal{D})$. Также определен фактор-дифференциал $\mathbf{d} \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathcal{E}))$, действующий по правилу

$$\omega = \omega + \Omega^q(\mathcal{D}) \mapsto \mathbf{d}\omega = d\omega + \Omega^{q+1}(\mathcal{D}), \quad \omega \in \Omega^q(\mathcal{E}), \quad d\omega \in \Omega^{q+1}(\mathcal{E}).$$

Таким образом, определен фактор-комплекс $\{\Omega^q(\mathcal{E}); \mathbf{d}^q\}$ с линейными пространствами когомологий $H^q(\mathcal{E}) = \ker \mathbf{d}^q / \text{Im } \mathbf{d}^{q-1}$.

По построению определена точная последовательность комплексов линейных пространств

$$0 \longrightarrow \{\Omega^q(\mathcal{D}); d^q\} \longrightarrow \{\Omega^q(\mathcal{E}); d^q\} \longrightarrow \{\Omega^q(\mathcal{E}); \mathbf{d}^q\} \longrightarrow 0.$$

Согласно общим принципам теории гомологий (см., например, монографию [2]) такая последовательность индуцирует следующую точную последовательность линейных пространств когомологий:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(\mathcal{D}) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}) \xrightarrow{\delta} \dots \\ \dots &\xrightarrow{\delta} H^q(\mathcal{D}) \longrightarrow H^q(\mathcal{E}) \longrightarrow H^q(\mathcal{E}) \xrightarrow{\delta} \dots \\ &\xrightarrow{\delta} H^{q+1}(\mathcal{D}) \longrightarrow H^{q+1}(\mathcal{E}) \longrightarrow H^{q+1}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\delta} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\delta} H^m(\mathcal{D}) \longrightarrow H^m(\mathcal{E}) \longrightarrow H^m(\mathcal{E}) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

где связывающий гомоморфизм

$$\delta = \delta^q: H^q(\mathcal{E}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{D}), \quad [\omega] \mapsto \delta[\omega] = [d\omega], \quad 0 \leq q \leq m-1.$$

Подробнее,

$$\begin{aligned} [\omega] &= \omega + \Omega^q(\mathcal{D}) + d\Omega^{q-1}(\mathcal{E}), \quad \omega \in \mathfrak{Z}^q(\mathcal{E}, \mathcal{D}), \quad [d\omega] = d\omega + d\Omega^q(\mathcal{D}), \\ \mathfrak{Z}^q(\mathcal{E}, \mathcal{D}) &= \{\omega \in \Omega^q(\mathcal{E}) \mid d\omega \in \Omega^{q+1}(\mathcal{D})\}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеют место равенство $H^0(\mathcal{D}) = 0$ и точные последовательности линейных пространств*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow H^0(\mathcal{E}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{D}) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow H^{q-1}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\delta} H^q(\mathcal{D}) \longrightarrow 0, \quad 2 \leq q \leq m. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $H^0(\mathcal{D}) = 0$ легко проверяется прямыми вычислениями. Остальные утверждения следуют из приведенной выше точной последовательности и известных когомологий де Рама пространства $\mathbb{R}^m$ (см. п. Г).

Заменяем теперь алгебру $\mathcal{E}$ на $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ и алгебру $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ (см. п. В), тогда (см. п. В) получим комплексы $\{\Omega^q(\mathcal{E}_0); d^q\}$ и $\{\Omega^q(\mathcal{D}_0); d^q\}$, где в первом случае $\mathfrak{A} = \mathcal{E}_0$, во втором случае $\mathfrak{A} = \mathcal{D}_0$, и в обоих случаях $\mathfrak{M} = \mathcal{E}_*$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E}_0)$ – алгебра Ли всех касательных полей на $M = \mathbb{R}^m$ с компонентами из $\mathcal{E}_*$. Алгебра $\mathcal{D}_0$ есть идеал алгебры $\mathcal{E}_0$, определены фактор-алгебра $\mathcal{E}_0/\mathcal{D}_0$ и фактор-комплекс $\{\Omega^q(\mathcal{E}_0); \mathbf{d}^q\}$ с линейными пространствами когомологий $H^q(\mathcal{E}_0) = \ker \mathbf{d}^q / \text{Im } \mathbf{d}^{q-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Правило*

$$\omega = \omega + \Omega(\mathcal{D}_0) \mapsto \iota\omega = \omega + \Omega(\mathcal{D}), \quad \omega \in \Omega(\mathcal{E}_0),$$

задает изоморфизм комплексов $\iota: \{\Omega^q(\mathcal{E}_0); d^q\} \simeq \{\Omega^q(\mathcal{E}); \mathbf{d}^q\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, указанное правило определяет линейное отображение $\iota: \Omega(\mathcal{E}_0) \rightarrow \Omega(\mathcal{E})$. Вычислим его ядро $\ker \iota$ и образ $\text{Im } \iota$. Пусть $\iota\omega = 0$, т.е. $\omega \in \Omega(\mathcal{E}_0) \cap \Omega(\mathcal{D}) = \Omega(\mathcal{D}_0)$, т.е. $\omega = 0$ и, значит, $\ker \iota = 0$. С другой стороны, пусть $\omega = \omega + \Omega(\mathcal{D}) \in \Omega(\mathcal{E})$. Очевидно, найдется форма $\chi \in \Omega(\mathcal{E}_0)$ такая, что $\omega - \chi \in \Omega(\mathcal{D})$, так что $\chi = \chi + \Omega(\mathcal{D}_0) \in \Omega(\mathcal{E}_0)$ и $\iota\chi = \chi + \Omega(\mathcal{D}) = \omega + \Omega(\mathcal{D}) = \omega$ и, значит, $\text{Im } \iota = \Omega(\mathcal{E})$. Таким образом, ι есть изоморфизм линейных пространств, и для завершения доказательства следует лишь заметить, что по построению $\iota \circ \mathbf{d} = \mathbf{d} \circ \iota$.

Для вычисления пространств $H^q(\mathcal{E}_0)$ используем сферическое представление (см. п. Е). Гомотопическая формула Пуанкаре (см. п. Г) на $\Omega(\mathcal{E}_0)$ имеет вид

$$(h \circ d + d \circ h)\omega = \omega, \quad \omega \in \Omega(\mathcal{E}_0),$$

поскольку $\ell|_{\Omega(\mathcal{E}_0)} = 0$, где гомотопический оператор $h \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathcal{E}_0))$ действует по правилу

$$h\omega(r, e) = \int_0^1 (\iota_D \omega)(tr, e) \frac{dt}{t} = \int_0^r \omega'(\xi, e) d\xi, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad e \in S^{m-1},$$

где $\omega = dr \wedge \omega' + \omega''$, $d\omega = dr \wedge (\partial_r \omega'' - d_S \omega') + d_S \omega''$.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место изоморфизм*

$$\sigma = \sigma^q: H^q(\mathcal{E}_0) \simeq H^q(S^{m-1}), \quad [\omega] \mapsto \sigma[\omega] = [\sigma\omega], \quad q \in \mathbb{Z},$$

где

- $[\omega] = \omega + \Omega^q(\mathcal{D}_0) + d\Omega^{q-1}(\mathcal{E}_0)$, $\omega \in \mathfrak{Z}^q(\mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0)$,
- $[\sigma\omega] = \sigma\omega + d\Omega^{q-1}(S^{m-1})$, $\sigma\omega(e) = \int_0^\infty (d\omega)'(\xi, e) d\xi$,
- $\mathfrak{Z}^q(\mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0) = \{\omega \in \Omega^q(\mathcal{E}_0) \mid d\omega \in \Omega^{q+1}(\mathcal{D}_0)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, условие $\omega \in \mathfrak{Z}^q(\mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0)$ означает, что

- $\omega \in \Omega^q(\mathcal{E}_0)$, т.е. $\omega' \in \mathcal{E}_0 \Omega^{q-1}(S^{m-1})$, $\omega'' \in \mathcal{E}_0 \Omega^q(S^{m-1})$,
- $d\omega \in \Omega^{q+1}(\mathcal{D}_0)$, т.е. $(d\omega)' \in \mathcal{D}_0 \Omega^q(S^{m-1})$, $(d\omega)'' \in \mathcal{D}_0 \Omega^{q+1}(S^{m-1})$.

В частности, интеграл $\int_0^\infty (d\omega)'(\xi, \cdot) d\xi$ сходится, причем

$$\begin{aligned} d\sigma\omega &= d \int_0^\infty (\partial_r \omega'' - d_S \omega')(\xi, \cdot) d\xi = \int_0^\infty d_S (\partial_r \omega'' - d_S \omega')(\xi, \cdot) d\xi = \\ &= \int_0^\infty \partial_r d_S \omega''(\xi, \cdot) d\xi = d_S \omega''(\xi, \cdot)|_0^\infty = 0 - 0 = 0, \end{aligned}$$

поскольку $d_S \omega'' = (d\omega)'' \in \mathcal{D}_0 \Omega^{q+1}(S^{m-1})$, так что корректно определено отображение $\sigma: \mathfrak{Z}^q(\mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0) \rightarrow \mathfrak{Z}^q(S^{m-1}) = \{\omega \in \Omega^q(S^{m-1}) \mid d\omega = 0\}$.

Пусть $\omega \in \Omega^q(\mathcal{D}_0)$, т. е. $\omega' \in \mathcal{D}_0 \Omega^{q-1}(S^{m-1})$, $\omega'' \in \mathcal{D}_0 \Omega^q(S^{m-1})$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma\omega &= \int_0^\infty \partial_r \omega''(\xi, \cdot) d\xi - \int_0^\infty d_S \omega'(\xi, \cdot) d\xi = 0 - d \int_0^\infty \omega'(\xi, \cdot) d\xi = \\ &= d\psi, \quad \psi = - \int_0^\infty \omega'(\xi, \cdot) d\xi \in \Omega^{q-1}(S^{m-1}). \end{aligned}$$

Пусть $\omega = d\chi \in d\Omega^{q-1}(\mathcal{E}_0)$, тогда $d\omega = d d\chi = 0$ и $\sigma\omega = 0$.

Итак, корректно определено отображение $\sigma: H^q(\mathcal{E}_0) \rightarrow H^q(S^{m-1})$. Вычислим его ядро $\ker \sigma$ и образ $\text{Im } \sigma$. Фиксируем функцию $\varkappa \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}_+)$ такую, что $\varrho(r) = \int_0^r \varkappa(\xi) d\xi = 1$ при $r \geq 1$. Пусть $\omega \in \mathfrak{Z}^q(\mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0)$ и $\sigma\omega = d\psi$, $\psi \in \Omega^{q-1}(S^{m-1})$. Положим $\chi = dr \wedge (\varkappa \cdot \psi)$, так что $\chi' = \varkappa \cdot \psi \in \mathcal{D}_0 \Omega^{q-1}(S^{m-1})$. Тогда $\sigma\chi = - \int_0^\infty \varkappa(\xi) d\xi \cdot d\psi = -d\psi$ и $\sigma\tilde{\omega} = 0$ для $\tilde{\omega} = \omega + \chi$, причем $\tilde{\omega} - \omega = \chi \in \Omega^q(\mathcal{D}_0)$. Пусть теперь $\omega \in \mathfrak{Z}^q(\mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0)$ и $\sigma\omega = 0$. Согласно гомотопической формуле Пуанкаре $\omega = h d\omega + dh\omega$, где $dh\omega \in d\Omega^{q-1}(\mathcal{E}_0)$, а $h d\omega(r, e) = \int_0^r (d\omega)'(\xi, e) d\xi = \int_0^\infty (d\omega)'(\xi, e) d\xi = \sigma\omega(e)$ при $r \geq R = R(\omega)$, поскольку $(d\omega)' \in \mathcal{D}_0 \Omega^q(S^{m-1})$. Условие $\sigma\omega = 0$ влечет $h d\omega(r, e) = 0$ при $r \geq R$, т. е. $h d\omega \in \Omega^q(\mathcal{D}_0)$. Таким образом, $\sigma[\omega] = 0$ тогда и только тогда, когда $\omega \in \Omega^q(\mathcal{D}_0) + d\Omega^{q-1}(\mathcal{E}_0)$, т. е. когда $[\omega] = 0$, так что $\ker \sigma = 0$. Пусть, наконец, $\phi \in \mathfrak{Z}^q(S^{m-1})$. Положим $\omega = \omega'' = \varrho \cdot \phi \in \mathcal{E}_0 \Omega^q(S^{m-1}) \subset \Omega^q(\mathcal{E}_0)$. Тогда $d\omega = dr \wedge (\varkappa \cdot \phi) + \varrho \cdot d\phi = dr \wedge (\varkappa \cdot \phi) + 0 \in \Omega^{q+1}(\mathcal{D}_0)$, так что $\omega \in \mathfrak{Z}^q(\mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0)$. Далее, $(d\omega)' = \varkappa \cdot \phi$, и $\sigma\omega = \int_0^\infty \varkappa(\xi) d\xi \cdot \phi = \phi$. Таким образом, $\text{Im } \sigma = H^q(S^{m-1})$, и теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеет место изоморфизм $H^q(\mathcal{E}) \simeq H^q(S^{m-1})$, $q \in \mathbb{Z}$.*

Для доказательства достаточно воспользоваться предложением 2 и теоремой 1.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место представление*

$$H^q(\mathcal{D}) = \begin{cases} 0, & q \neq m, \\ \mathbb{F}, & q = m, \end{cases}$$

где изоморфизм $H^m(\mathcal{D}) \simeq \mathbb{F}$ дается правилом $[\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \omega$.

Для доказательства достаточно воспользоваться предложением 1, следствием 1 и известными когомологиями сферы (см. п. Д).

При $m = 1$ этот результат известен в следующей формулировке: функция $f \in \mathcal{D}$ имеет первообразную $F \in \mathcal{D}$, $F' = f$, тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 0$ (см., например, книгу [3]).

Теорему 2 можно также доказать, используя геометрические методы (см., например, книгу [4]). Предложенное здесь аналитическое доказательство имеет то преимущество, что оно напрямую переносится на другие классы коэффициентов, как это сделано, например, в следующем разделе.

3. КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРЫ $\mathcal{S}$

Здесь (см. п. Б) $M = \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{A} = \mathcal{S}$, $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$ (см. п. В), заметим, что алгебра $\mathcal{S}$ является идеалом алгебры $\mathcal{M}$, а не алгебры $\mathcal{E}$. Соответственно именно алгебра $\mathcal{M}$ является алгеброй мультипликаторов алгебры $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}(\mathcal{M})$ – алгебра Ли всех касательных векторных полей на $\mathbb{R}^m$ с компонентами из $\mathcal{M}$. Вычислим линейные пространства когомологий $H^q(\mathcal{S})$ ассоциированного комплекса де Рама $\{\Omega^q(\mathcal{S}); d^q\}$.

Как уже было отмечено выше, все построения здесь такие же, как и в случае алгебры $\mathcal{D}$, так что будем обращать внимание лишь на возникающие отличия.

Вместо комплекса $\{\Omega^q(\mathcal{E}); d^q\}$ здесь возникает комплекс $\{\Omega^q(\mathcal{M}); d^q\}$, ассоциированный с алгеброй $\mathcal{M}$, с линейными пространствами когомологий $H^q(\mathcal{M})$, где $M = \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{M} = \mathcal{M}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{M})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеет место представление*

$$H^q(\mathcal{M}) = H^q(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0, \end{cases} \quad q \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что гомотопический оператор Пуанкаре (см. п. Г) обладает замечательным свойством:

$$h|_{\Omega(\mathcal{M})}: \Omega(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega(\mathcal{M}).$$

Определены фактор-алгебра $\Omega(\mathcal{M}) = \Omega(\mathcal{M})/\Omega(\mathcal{S})$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}/\mathcal{S}$, с фактор-дифференциалом $\mathbf{d} \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathcal{M}))$,

$$\omega = \omega + \Omega^q(\mathcal{S}) \mapsto \mathbf{d}\omega = d\omega + \Omega^{q+1}(\mathcal{S}), \quad \omega \in \Omega^q(\mathcal{M}), \quad d\omega \in \Omega^{q+1}(\mathcal{M}),$$

фактор-комплекс $\{\Omega^q(\mathcal{M}); \mathbf{d}^q\}$ с линейными пространствами когомологий $H^q(\mathcal{M})$ и точная последовательность комплексов

$$0 \longrightarrow \{\Omega^q(\mathcal{S}); d^q\} \longrightarrow \{\Omega^q(\mathcal{M}); d^q\} \longrightarrow \{\Omega^q(\mathcal{M}); \mathbf{d}^q\} \longrightarrow 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеют место равенство $H^0(\mathcal{S}) = 0$ и точные последовательности линейных пространств*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow H^0(\mathcal{M}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{S}) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow H^{q-1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\delta} H^q(\mathcal{S}) \longrightarrow 0, \quad 2 \leq q \leq m, \end{aligned}$$

где связывающий гомоморфизм

$$\begin{aligned} \delta &= \delta^q: H^q(\mathcal{M}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{S}), \quad [\omega] \mapsto \delta[\omega] = [d\omega], \\ [\omega] &= \omega + \Omega^q(\mathcal{S}) + d\Omega^{q-1}(\mathcal{M}), \quad \omega \in \mathfrak{Z}^q(\mathcal{M}, \mathcal{S}), \quad [d\omega] = d\omega + \Omega^{q+1}(\mathcal{S}), \\ \mathfrak{Z}^q(\mathcal{M}, \mathcal{S}) &= \{\omega \in \Omega^q(\mathcal{M}) \mid d\omega \in \Omega^{q+1}(\mathcal{S})\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $H^0(\mathcal{S}) = 0$ легко проверяется прямыми вычислениями. Остальные утверждения доказываются так же, как и предложение 1, с учетом предложения 3.

Заменим алгебру $\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}_0$ и алгебру $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}_0$ (см. п. В), тогда (см. п. В) получим комплексы $\{\Omega^q(\mathcal{M}_0); d^q\}$ и $\{\Omega^q(\mathcal{D}_0); d^q\}$, где в первом случае $\mathfrak{A} = \mathcal{M}_0$, во втором случае $\mathfrak{A} = \mathcal{S}_0$, и в обоих случаях $\mathfrak{M} = \mathcal{M}_*$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{M}_0)$ – алгебра Ли всех касательных полей на $M = \mathbb{R}^m$ с компонентами из $\mathcal{M}_*$. Алгебра $\mathcal{S}_0$ есть идеал алгебры $\mathcal{M}_0$, определены фактор-алгебра $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0/\mathcal{S}_0$ и фактор-комплекс $\{\Omega^q(\mathcal{M}_0); d^q\}$ с линейными пространствами когомологий $H^q(\mathcal{M}_0) = \ker d^q / \text{Im } d^{q-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Правило*

$$\omega = \omega + \Omega(\mathcal{S}_0) \mapsto \imath\omega = \omega + \Omega(\mathcal{S}), \quad \omega \in \Omega(\mathcal{M}_0),$$

задает изоморфизм комплексов $\imath : \{\Omega^q(\mathcal{M}_0); d^q\} \simeq \{\Omega^q(\mathcal{M}); d^q\}$.

Для доказательства достаточно внести очевидные изменения в доказательство предложения 2.

Для вычисления пространств $H^q(\mathcal{M}_0)$ опять используем сферическое представление (см. п. Е), гомотопическая формула и гомотопический оператор на линейных пространствах $\Omega^q(\mathcal{M}_0)$ такие же, как и на $\Omega^q(\mathcal{E}_0)$.

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место изоморфизм*

$$\sigma = \sigma^q : H^q(\mathcal{M}_0) \simeq H^q(S^{m-1}), \quad [\omega] \mapsto \sigma[\omega] = [\sigma\omega], \quad q \in \mathbb{Z},$$

где

- $[\omega] = \omega + \Omega^q(\mathcal{S}_0) + d\Omega^{q-1}(\mathcal{M}_0)$, $\omega \in \mathfrak{Z}^q(\mathcal{M}_0, \mathcal{S}_0)$,
- $[\sigma\omega] = \sigma\omega + d\Omega^{q-1}(S^{m-1})$, $\sigma\omega(e) = \int_0^\infty (d\omega)'(\xi, e) d\xi \in \mathfrak{Z}^q(S^{m-1})$,
- $\mathfrak{Z}^q(\mathcal{M}_0, \mathcal{S}_0) = \{\omega \in \Omega^q(\mathcal{M}_0) \mid d\omega \in \Omega^{q+1}(\mathcal{S}_0)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корректность отображения $\sigma : H^q(\mathcal{M}_0) \rightarrow H^q(S^{m-1})$ доказывается так же, как и в теореме 1, с очевидными изменениями. При вычислении ядра и образа этого отображения снова выбирается функция $\varkappa \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{S}_0(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\varrho(r) = \int_0^r \varkappa(\xi) d\xi = 1$ при $r \geq 1$, и далее продолжается повторение доказательства теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеет место изоморфизм $H^q(\mathcal{M}) \simeq H^q(S^{m-1})$, $q \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство повторяет доказательство следствия 1.

ТЕОРЕМА 4. *Имеет место представление*

$$H^q(\mathcal{S}) = \begin{cases} 0, & q \neq m, \\ \mathbb{F}, & q = m, \end{cases}$$

где изоморфизм $H^m(\mathcal{S}) \simeq \mathbb{F}$ дается правилом $[\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \omega$.

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 2.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Фактор-алгебры $\mathcal{E} = \mathcal{E}/\mathcal{D}$ и $\mathcal{M} = \mathcal{M}/\mathcal{S}$, возникшие здесь как вспомогательные конструкции, и сами по себе интересны с точки зрения математической физики, анализа и алгебры. Действительно, пространства обобщенных функций как дуальные к соответствующим пространствам основных функций возникли и развиваются

в основном в связи с потребностями математической и теоретической физики (начиная с Эйлера, Дирака, Соболева, ...), и любые новые свойства этих пространств (особенно такие нетрадиционные, как когомологические) могут оказаться весьма полезными в приложениях. Далее, алгебры $\mathcal{E}$ и $\mathcal{M}$ интересны для анализа, поскольку из-за плотности идеалов $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ в алгебрах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{M}$ соответственно их естественные фактор-топологии абсолютно неотделимы, их элементы – классы эквивалентности – не имеют канонических представителей. Все это существенно усложняет изучение таких объектов в рамках традиционного функционального анализа, требует привлечения новых идей и методов. Точно так же алгебры $\mathcal{E}$ и $\mathcal{M}$ малодоступны для изучения (установления их алгебраических характеристик таких, как пространства их максимальных идеалов, радикалы и т. д.) методами классической алгебры. Отметим также, что фактор-алгебра $\mathcal{E}$ и ей подобные уже используются в теоретической физике (см. работы [5] и [6]).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Формальный комплекс де Рама, ассоциированный с алгеброй

С каждой алгеброй можно ассоциировать формальный комплекс де Рама (см., например, работу [7]). А именно, пусть дана алгебра $\mathfrak{A}$ над числовым полем $\mathbb{F}$. Тогда определены

- $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ – унитарная ассоциативная алгебра всех мультипликаторов алгебры $\mathfrak{A}$ (эндоморфизм $\mu \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{A})$ называется *мультипликатором*, если $\mu(f \cdot g) = (\mu f) \cdot g = f \cdot (\mu g)$ для всех $f, g \in \mathfrak{A}$, умножение в $\mathfrak{M}$ определяется как композиция эндоморфизмов),
- $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ – алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$ (эндоморфизм $X \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{A})$ называется *дифференцированием*, если $X(f \cdot g) = (Xf) \cdot g + f \cdot (Xg)$ для всех $f, g \in \mathfrak{A}$, скобка Ли определяется как коммутатор эндоморфизмов), причем выполнены условия согласования:
- определено левое действие $\mathfrak{M} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D})$ правилом $\mu X = \mu \circ X$ для всех $\mu \in \mathfrak{M}$, $X \in \mathfrak{D}$ (т. е. как композиция эндоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$), другими словами, на $\mathfrak{D}$ определена структура левого $\mathfrak{M}$ -модуля,
- определено действие $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ правилом $X\mu = [X, \mu]$ для всех $X \in \mathfrak{D}$, $\mu \in \mathfrak{M}$ (т. е. как коммутатор эндоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ – алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{M}$), другими словами, на $\mathfrak{M}$ определена структура Ли модуля над $\mathfrak{D}$ и $X(\mu \circ \nu) = (X\mu) \circ \nu + \mu \circ (X\nu)$ для всех $X \in \mathfrak{D}$ и $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$.

Далее предполагаем, что алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}$ коммутативная. Для этого достаточно, чтобы исходная алгебра $\mathfrak{A}$ имела тривиальный аннулятор, т. е. $\text{ann } \mathfrak{A} = \{f \in \mathfrak{A} \mid f \cdot g = g \cdot f = 0 \ \forall g \in \mathfrak{A}\} = 0$.

Определена внешняя алгебра $\wedge \mathfrak{D} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \wedge^q \mathfrak{D}$ над полем $\mathbb{F}$, где $\mathfrak{M}$ -модули

$$\wedge^q \mathfrak{D} = \begin{cases} \wedge_{\mathfrak{M}}^q \mathfrak{D}, & q > 0, \\ \mathfrak{M}, & q = 0, \\ 0, & q < 0, \end{cases}$$

внешние тензорные степени берутся в категории $\mathfrak{M}$ -модулей. В частности, на $\wedge \mathfrak{D}$ определена структура $\mathfrak{M}$ -модуля.

Определена внешняя алгебра $\Omega(\mathfrak{A}) = \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge \mathfrak{D}; \mathfrak{A}) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \Omega^q(\mathfrak{A})$ над полем $\mathbb{F}$, где $\mathfrak{M}$ -модули

$$\Omega^q(\mathfrak{A}) = \begin{cases} \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge^q \mathfrak{D}; \mathfrak{A}), & q > 0, \\ \mathfrak{A}, & q = 0, \\ 0, & q < 0. \end{cases}$$

Внешний дифференциал $d \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathfrak{A}))$ задается формулой Картана:

$$\begin{aligned} d^q &= d|_{\Omega^q(\mathfrak{A})}: \Omega^q(\mathfrak{A}) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathfrak{A}), \quad \omega \mapsto d^q \omega, \\ d^q \omega(X_0, \dots, X_q) &= \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq k \leq q} (-1)^k X_k (\omega(X_0, \dots, \check{X}_k, \dots, X_q)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{0 \leq k < l \leq q} (-1)^{k+l} \omega([X_k, X_l], X_0, \dots, \check{X}_k, \dots, \check{X}_l, \dots, X_q) \right\} \end{aligned}$$

для всех $X_0, \dots, X_q \in \mathfrak{D}$, где символ $\check{}$ означает, что аргумент под ним пропущен. По построению композиция $d \circ d = 0$, так что определен комплекс линейных пространств $\{\Omega^q(\mathfrak{A}); d^q\}$ – формальный комплекс де Рама, ассоциированный с алгеброй $\mathfrak{A}$, с линейными пространствами когомологий $H^q(\mathfrak{A}) = \ker d^q / \text{Im } d^{q-1}$, $q \in \mathbb{Z}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Комплекс де Рама, ассоциированный с алгеброй гладких функций на многообразии

Здесь

- M – гладкое (т. е. класса C^∞) многообразие, $\dim M = m$,
- $\mathfrak{A}$ – алгебра гладких функций на M со значениями в поле $\mathbb{F}$, т. е. $\mathfrak{A} \subset C^\infty(M) = C^\infty(M; \mathbb{F})$.

Так что (см. п. А)

- $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ – алгебра всех функций ϕ на M таких, что правило $f \mapsto \phi \cdot f$ задает отображение $\phi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, где $(\phi \cdot f)(x) = \phi(x)f(x)$, для всех $f \in \mathfrak{A}$, $x \in M$;
- $\mathfrak{D} = \mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathfrak{A}) = \mathcal{T}(\mathfrak{M})$ – алгебра Ли всех касательных полей на многообразии M с компонентами из $\mathfrak{M}$.

Определен комплекс линейных пространств $\{\Omega^q(\mathfrak{A}); d^q\}$ – комплекс де Рама многообразия M с коэффициентами в алгебре $\mathfrak{A}$, с линейными пространствами когомологий $H^q(\mathfrak{A}) = \ker d^q / \text{Im } d^{q-1}$, $q \in \mathbb{Z}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Алгебры основных функций

Ради полноты и замкнутости изложения дадим здесь краткие определения всех алгебр гладких функций, используемых в статье, вместе с их естественными топологиями.

Стандартные обозначения:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$,
- $\mathbb{Z}_+^m = \{i = (i^1, \dots, i^m) \mid i^\mu \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq \mu \leq m\}$, $|i| = i^1 + \dots + i^m$,
- $\mathbb{R}^m = \{x = (x^1, \dots, x^m) \mid x^\mu \in \mathbb{R}, 1 \leq \mu \leq m\}$, $\mathbb{R}_*^m = \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$,

- $\partial_x = (\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^m})$, $\partial_x^i = \partial_{x^1}^{i^1} \cdots \partial_{x^m}^{i^m}$, $i \in \mathbb{Z}_+^m$,
- $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ – алгебра всех гладких (т.е. класса $\mathcal{C}^\infty$) функций на $\mathbb{R}^m$.

Основные пространства теории распределений Шварца:

- $\mathcal{E} = \lim \text{proj}_{K \in \mathbb{R}^m, p \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{E}_{K,p}$, где $\mathcal{E}_{K,p}$ есть алгебра $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, наделенная нормой $\|f\|_{K,p} = \max_{x \in K, |i| \leq p} |\partial_x^i f(x)|$, проективный предел берется по всем компактам K в $\mathbb{R}^m$ и всем $p \in \mathbb{Z}_+$,
- $\mathcal{D} = \lim \text{ind}_{K \in \mathbb{R}^m} \lim \text{proj}_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{D}_{K,p}$, где $\mathcal{D}_{K,p}$ есть алгебра

$$\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \mid \text{supp } f \subset K\},$$

наделенная нормой $\|f\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}^m, |i| \leq p} |\partial_x^i f(x)|$, индуктивный предел берется по всем компактам K в $\mathbb{R}^m$, проективный предел берется по всем $p \in \mathbb{Z}_+$,

- $\mathcal{S} = \lim \text{proj}_{p \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{p,l}$, где линейное пространство

$$\mathcal{F}_{p,l} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \mid \|f\|_{p,l} < \infty\},$$

норма $\|f\|_{p,l} = \sup_{x \in \mathbb{R}^m, |i| \leq p} |\partial_x^i f(x)| (1 + |x|)^l$, проективный предел берется по всем $p \in \mathbb{Z}_+$ и $l \in \mathbb{Z}$.

Вспомогательные алгебры:

- $\mathcal{E}_0 = \lim \text{ind}_{\varrho > 0} \lim \text{proj}_{K \in \mathbb{R}^m, p \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{E}_{\varrho, K, p}$, где алгебра

$$\mathcal{E}_{\varrho, K, p} = \{f \in \mathcal{E}_{K,p} \mid f(x) = 0 \text{ при } |x| \leq \varrho\},$$

индуктивный предел берется по всем $\varrho > 0$, проективный предел берется по всем компактам K в $\mathbb{R}^m$ и всем $p \in \mathbb{Z}_+$,

- $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \cap \mathcal{E}_0$,
- $\mathcal{E}_* = \lim \text{proj}_{K \in \mathbb{R}_*^m, p \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{E}_{K,p}$, где алгебра $\mathcal{E}_{K,p}$ есть алгебра $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^m)$, наделенная нормой $\|f\|_{K,p} = \max_{x \in K, |i| \leq p} |\partial_x^i f(x)|$, проективный предел берется по всем компактам K в $\mathbb{R}_*^m$ и всем $p \in \mathbb{Z}_+$,
- $\mathcal{M} = \lim \text{proj}_{p \in \mathbb{Z}_+} \lim \text{ind}_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{p,l}$, где линейное пространство $\mathcal{F}_{p,l}$ то же самое, что и в определении алгебры $\mathcal{S}$, проективный предел берется по всем $p \in \mathbb{Z}_+$, индуктивный предел берется по всем $l \in \mathbb{Z}$,
- $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \cap \mathcal{E}_0$, $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S} \cap \mathcal{E}_0$,
- $\mathcal{M}_* = \lim \text{proj}_{\varrho > 0, p \in \mathbb{Z}_+} \lim \text{ind}_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{\varrho, p, l}$, где линейное пространство

$$\mathcal{F}_{\varrho, p, l} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^m) \mid \|f\|_{\varrho, p, l} < \infty\},$$

норма $\|f\|_{\varrho, p, l} = \sup_{|x| \geq \varrho, |i| \leq p} |\partial_x^i f(x)| (1 + |x|)^l$, проективный предел берется по всем $\varrho > 0$ и $p \in \mathbb{Z}_+$, индуктивный предел берется по всем $l \in \mathbb{Z}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Когомологии де Рама пространства $\mathbb{R}^m$

Здесь (см. п. Б) $M = \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{A} = \mathcal{E}$, $\mathfrak{M} = \mathcal{E}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$ – алгебра Ли всех касательных векторных полей на $\mathbb{R}^m$ с компонентами из $\mathcal{E}$. Определен комплекс $\{\Omega^q(\mathcal{E}); d^q\} = \{\Omega^q(\mathbb{R}^m); d^q\}$ – классический комплекс де Рама пространства $\mathbb{R}^m$. Его линейные пространства когомологий равны

$$H^q(\mathcal{E}) = H^q(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0, \end{cases} \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Стандартное геометрическое доказательство этого утверждения использует тот факт, что пространство $\mathbb{R}^m$ гомотопически эквивалентно точке (см., например, книгу [8]). Для наших целей полезнее другое, аналитическое доказательство, опирающееся на гомотопическую формулу Пуанкаре [9]

$$(h \circ d + d \circ h)\omega = \omega - \ell\omega, \quad \omega \in \Omega(\mathbb{R}^m),$$

где гомотопический оператор Пуанкаре $h \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathbb{R}^m))$,

$$h^q = h|_{\Omega^q(\mathbb{R}^m)}: \Omega^q(\mathbb{R}^m) \rightarrow \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^m), \quad \omega \mapsto h\omega,$$

$$h\omega(x) = \int_0^1 (\iota_D \omega)(tx) \frac{dt}{t},$$

$\iota_D \omega$ – внутреннее произведение поля $D = \sum_{1 \leq \mu \leq m} x^\mu \partial_\mu \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$ и формы $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^m)$, а вспомогательный оператор $\ell \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathbb{R}^m))$,

$$\ell|_{\Omega^q(\mathbb{R}^m)} = 0 \quad \text{при} \quad q \neq 0, \quad \ell f(x) = f(0), \quad f \in \Omega^0(\mathbb{R}^m) = \mathcal{E}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Когомологии де Рама сферы S^{m-1}

Стандартные обозначения:

- $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| = 1\}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^m$,
- $\mathcal{E}(S^{m-1})$ – алгебра $\mathcal{C}^\infty(S^{m-1})$ всех гладких функций на S^{m-1} с естественной топологией равномерной сходимости вместе с частными производными всех порядков.

Пусть (см. п. Б) $M = S^{m-1}$, $\mathfrak{A} = \mathcal{E}(S^{m-1})$. Здесь $\mathfrak{A} = \mathfrak{M} = \mathcal{E}(S^{m-1})$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(S^{m-1})$ – алгебра Ли всех гладких касательных векторных полей на S^{m-1} . Определен комплекс $\{\Omega^q(\mathcal{E}(S^{m-1})); d^q\} = \{\Omega^q(S^{m-1}); d^q\}$ – классический комплекс де Рама сферы S^{m-1} . Его линейные пространства когомологий равны

$$H^q(S^0) = \begin{cases} \mathbb{F}^2, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0, \end{cases} \quad m = 1, \quad H^q(S^{m-1}) = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = 0, m - 1, \\ 0, & q \neq 0, m - 1, \end{cases} \quad m > 1.$$

Случай $m = 1$ особый, поскольку сфера $S^0 = \{-1, 1\}$ имеет две связные компоненты, тогда как при $m > 1$ сфера S^{m-1} имеет одну связную компоненту.

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Сферическое представление

Стандартные обозначения:

- $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ – положительная полуось,
- ∂_r – частная производная по переменной $r \in \mathbb{R}_+$.

Вспомогательные алгебры:

- $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+) = \mathcal{E}_*(\mathbb{R}_+) = \lim_{K \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{Z}_+} \text{proj } \mathcal{E}_{K,p}(\mathbb{R}_+)$, где $\mathcal{E}_{K,p}(\mathbb{R}_+)$ есть алгебра $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$, наделенная нормой $\|f\|_{K,p} = \max_{r \in K, i \leq p} |\partial_r^i f(r)|$, проективный предел берется по всем отрезкам K , компактным в $\mathbb{R}_+$, и всем $p \in \mathbb{Z}_+$,

- $\mathcal{E}_0(\mathbb{R}_+) = \lim \operatorname{ind}_{\varrho > 0} \lim \operatorname{proj}_{K \in \mathbb{R}^m, p \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{E}_{\varrho, K, p}(\mathbb{R}_+)$, где алгебра

$$\mathcal{E}_{\varrho, K, p} = \{f \in \mathcal{E}_{K, p}(\mathbb{R}_+) \mid f(r) = 0 \text{ при } 0 < r \leq \varrho\},$$

индуктивный предел берется по всем $\varrho > 0$, проективный предел берется по всем отрезкам K , компактным в $\mathbb{R}_+$, и всем $p \in \mathbb{Z}_+$,

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+) = \mathcal{D}_0(\mathbb{R}_+) = \lim \operatorname{ind}_{K \in \mathbb{R}_+} \lim \operatorname{proj}_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{D}_{K, p}(\mathbb{R}_+)$, где $\mathcal{D}_{K, p}(\mathbb{R}_+)$ есть алгебра $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+) \mid \operatorname{supp} f \subset K\}$, наделенная нормой

$$\|f\|_p = \sup_{r \in \mathbb{R}_+, i \leq p} |\partial_r^i f(r)|,$$

индуктивный предел берется по всем отрезкам K , компактным в $\mathbb{R}_+$, проективный предел берется по всем $p \in \mathbb{Z}_+$,

- $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}_+) = \lim \operatorname{proj}_{\varrho > 0, p \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{\varrho, p, l}(\mathbb{R}_+)$, где линейное пространство

$$\mathcal{F}_{\varrho, p, l}(\mathbb{R}_+) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+) \mid \|f\|_{\varrho, p, l} < \infty\},$$

норма $\|f\|_{\varrho, p, l} = \sup_{r \geq \varrho, i \leq p} |\partial_r^i f(r)|(1+r)^l$, проективный предел берется по всем $\varrho > 0$, $p \in \mathbb{Z}_+$ и $l \in \mathbb{Z}$,

- $\mathcal{M}_*(\mathbb{R}_+) = \lim \operatorname{proj}_{\varrho > 0, p \in \mathbb{Z}_+} \lim \operatorname{ind}_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{\varrho, p, l}(\mathbb{R}_+)$, пространство $\mathcal{F}_{\varrho, p, l}(\mathbb{R}_+)$ то же, что и выше, проективный предел берется по всем $\varrho > 0$ и $p \in \mathbb{Z}_+$, индуктивный предел берется по всем $l \in \mathbb{Z}$,
- $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}_+) = \mathcal{S}_*(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{E}_0(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}_+) = \mathcal{M}_*(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{E}_0(\mathbb{R}_+)$.

Справедливы представления:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_*^m &= \mathbb{R}_+ \times S^{m-1}, & x &= (r, e), \quad r = |x|, \quad e = x/|x|, \\ \mathcal{F} &= \mathcal{F}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}(S^{m-1}), & \mathcal{F} &= \mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0, \mathcal{E}_*, \mathcal{M}_0, \mathcal{S}_0, \mathcal{M}_*. \end{aligned}$$

Здесь и ниже тензорное произведение понимается как замыкание алгебраического тензорного произведения в соответствующей топологии.

Положим

$$\mathcal{F}_0 \Omega(S^{m-1}) = \mathcal{F}_0(\mathbb{R}_+) \otimes \Omega(S^{m-1}), \quad \mathcal{F}_0 = \mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0, \mathcal{M}_0, \mathcal{S}_0,$$

и зададим внешний дифференциал $d_S \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{F}_0 \Omega(S^{m-1}))$ правилом

$$d_S(\phi \otimes \chi) = \phi \otimes (d\chi), \quad \phi \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}_+), \quad \chi \in \Omega(S^{m-1}).$$

Производная Ли ∂_r действует на внешней алгебре $\mathcal{F}_0 \Omega(S^{m-1})$ по правилу $\partial_r(\phi \otimes \chi) = (\partial_r \phi) \otimes \chi$ для всех $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}_+)$ и $\chi \in \Omega(S^{m-1})$, а внутреннее произведение $\iota_{\partial_r} \omega = 0$ для любой формы $\omega \in \mathcal{F}_0 \Omega(S^{m-1})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Имеет место представление*

$$\Omega(\mathcal{F}_0) = dr \wedge \mathcal{F}_0 \Omega(S^{m-1}) \oplus \mathcal{F}_0 \Omega(S^{m-1}).$$

Подробнее, каждая форма $\omega \in \Omega(\mathcal{F}_0)$ однозначно записывается в виде $\omega = dr \wedge \omega' + \omega''$, где $\omega' = \iota_{\partial_r} \omega$, $\omega'' = \iota_{\partial_r}(dr \wedge \omega) \in \mathcal{F}_0 \Omega(S^{m-1})$. Внешний дифференциал $d \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathcal{F}_0))$ действует по правилу

$$d(dr \wedge \omega' + \omega'') = dr \wedge (\partial_r \omega'' - d_S \omega') + d_S \omega'', \quad \omega', \omega'' \in \mathcal{F}_0 \Omega(S^{m-1}).$$

Доказательство проводится элементарными рассуждениями исходя из определений и известных свойств дифференциалов, производных Ли и внутренних произведений.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00178) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-7675.2010.1). Автор благодарен Б. И. Завьялову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Tome I, Hermann & Cie, Paris, 1950; Tome II, 1951.
- [2] С. Маклейн, *Гомология*, Мир, М., 1966.
- [3] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматлит, М., 1959.
- [4] Р. Ботт, Л. В. Ту, *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*, Наука, М., 1989.
- [5] С. Е. Конштейн, А. Г. Смирнов, И. В. Тютин, *ТМФ*, **143**:2 (2005), 163–194.
- [6] С. Е. Конштейн, А. Г. Смирнов, И. В. Тютин, *ТМФ*, **148**:2 (2006), 163–178.
- [7] V. V. Zharginov, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **6**:1-4 (1998), 347–356.
- [8] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы теории гомологий*, Наука, М., 1984.
- [9] А. Картан, *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы*, Мир, М., 1971.

Поступила в редакцию 10.05.2011