Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кадышевский, В. Н. Родионов, Дисперсионные соотношения для пороговых реакций во внешнем электромагнитном поле, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 3, 432–443

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf677>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:05:32

© 2000 г.

В. Г. Кадышевский*, В. Н. Родионов†

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОРОГОВЫХ РЕАКЦИЙ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрены нелинейные пороговые явления, возникающие в квантовых системах во внешних интенсивных электромагнитных полях. Используемый подход содержит как развитие методов традиционной квантовой электродинамики (КЭД), так и формализм модифицированной КЭД, включающей новый универсальный параметр – фундаментальную массу. Анализ пороговых процессов в постоянном магнитном поле, проведенный в новой КЭД и основанный на использовании точной интегрируемости модифицированного уравнения Дирака во внешнем поле, показывает, что существование в теории параметра предельной массы влечет за собой и возникновение параметра, определяющего граничное значение интенсивности поля. В нерелятивистском пределе установлены дисперсионные соотношения для ряда пороговых реакций во внешнем электромагнитном поле довольно общего вида.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в сильных электромагнитных полях свойства квантовых систем могут существенно видоизменяться [1–5]. Особое место среди подобных процессов занимают реакции, обусловленные взаимодействием с внешним полем системы связанных зарядов. Аналогичные явления возникают и при воздействии поля на свободные частицы в процессах, имеющих пороговые особенности. В отсутствие поля на основе достаточно общих положений в таких реакциях могут быть легко установлены энергетические зависимости вероятностей и сечений вблизи их порога [1].

Учет действия внешних электромагнитных полей, проводимый по теории возмущений, привел к обнаружению ряда линейных и квадратичных по полю эффектов, среди которых наиболее известны эффекты Штарка и Зеемана. Исследования аналогичных процессов в интенсивных постоянных электрическом и магнитном полях, влияние которых нельзя адекватно описать методами теории возмущений, позволили также установить целый ряд интересных закономерностей. Среди них можно выделить эффект Келдыша–Франца [2, 3], возникающий при приложении электрического поля к полупроводнику, а также эффект Соколова–Тернова, приводящий к самополяризации электронов, движущихся в магнитном поле [4].

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

†Кафедра общей физики Московской государственной геологоразведочной академии, Москва, Россия

К настоящему времени детально развиты как теоретические, так и экспериментальные методы исследования взаимодействий системы связанных зарядов с полем интенсивной электромагнитной волны. В частности, это относится к случаям многофотонной ионизации, туннельного эффекта, а также надбарьерного развала атомов в переменном электромагнитном поле (см. обзор [5] и цитированные там работы). В электромагнитных полях, образующих еще более сложную комбинацию (например, имеющих постоянную и переменную составляющие), выяснение нелинейных зависимостей вероятностей и сечений от полевых параметров приводит к дополнительным интересным результатам [6–8].

Среди различных методов изучения пороговых процессов во внешнем поле выделяют такие, в которых используются точные решения соответствующих квантовых уравнений движения частиц. Например, в случае плосковолнового поля основой для этого служат известные волковские решения. В рамках данного подхода (метод Келдыша–Файсала–Риса) расчеты проводятся в S -матричном формализме, где в качестве конечного рассматривается состояние электрона, находящегося только в поле лазерного луча [5].

Наряду с полями плосковолнового типа, для которых справедливы решения Волкова, существуют электромагнитные поля более общего вида, для которых также можно получить точную интегрируемость нелинейных уравнений движения (см., например, [9]). Использование этих решений создает основу для изучения нелинейных квантовых явлений при отсутствии каких бы то ни было ограничений на напряженности электромагнитных полей, входящих в конфигурацию. В данной работе мы остановимся на анализе процессов ионизации, а также фотопоглощения в непроводящих кристаллах и реакции фотообразования пар e^+e^- в электромагнитном поле, представляющем суперпозицию поля волны и постоянного магнитного поля.

С теоретической точки зрения рассматриваемая комбинация электромагнитных полей примечательна тем, что в принципе позволяет развить и обобщить методы, основанные на точном учете влияния поля на ход ряда процессов, несмотря на сложность внешних полей, входящих в конфигурацию. Дополнительное включение в рассмотрение наряду с полем электромагнитной волны интенсивного магнитного поля, по-видимому, также может представить интерес в связи с наличием ряда экспериментальных трудностей, в частности обусловленных тонким отличием многофотонного и туннельного механизмов ионизации, возникающих при больших значениях нелинейности процесса [5].

Важно подчеркнуть, что влияние интенсивных электромагнитных полей прежде всего проявляется в сильной локализации областей формирования рассматриваемых процессов. Так, например, при напряженностях магнитных полей $H \sim 10^{13}$ Гс, наблюдаемых в окрестности пульсаров, радиус орбиты движения электрона сравнивается с его комптоновской длиной λ_c . Атомы в таких полях теряют свою сферическую симметрию и представляют собой игольчатые структуры с поперечными размерами порядка 10^{-11} см [9]. Повышение интенсивности полей ($H > 10^{13}$ Гс) еще более сокращает области локализации частиц. В частности, “магнитная длина” r_H , характеризующая радиус орбиты на наименьшем энергетическом уровне электрона в магнитном поле $H > H_c$, убывает пропорционально корню из его напряженности

$$r_H = \lambda_c \left(\frac{H_c}{H} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $H_c = m^2 c^3 / e \hbar = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс – характерное квантово-электродинамическое значение поля.

С другой стороны, хорошо известно, что эффекты значительного сокращения пространственных областей формирования процессов отвечают и ультрарелятивистским взаимодействующим частицам. В этой связи следует отметить, что особенности процессов взаимодействия частиц, связанные с существенным сокращением пространственно-временных интервалов, подразумевают возможность обнаружения некой граничной универсальной константы – “фундаментальной длины” l , за пределами которой теряются традиционные представления об элементарных частицах. Наряду с понятием “фундаментальной длины” l часто используется и понятие “фундаментальной массы” $M = \hbar/lc$.

В данной работе мы опираемся на некоторые результаты, полученные в рамках модифицированной квантовой электродинамики (КЭД) – “КЭД с фундаментальной массой” [10–14]. Важнейшей особенностью этого подхода является то, что в нем сохраняются такие существенные свойства теории электромагнитных взаимодействий, как *локальность* и *калибровочная инвариантность*.

В лагранжиане взаимодействия новой теории, помимо традиционного “минимального” вклада, появляются “неминимальные” слагаемые [12] и, в частности, взаимодействие Паули¹⁾

$$\mathcal{L}_F = -\frac{e}{2m} \left(\sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}} - 1 \right) \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \Psi F_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Таким образом, модифицированное уравнение Дирака, которое описывает движение частицы с произвольным магнитным моментом во внешнем поле (причем предполагается, что внешнее поле $F_{\mu\nu}$ удовлетворяет свободным уравнениям Максвелла), имеет вид

$$\left(\hat{P} - m - \frac{\mu}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) \right) \Psi = 0, \quad (2)$$

где

$$\mu = \mu_0 \sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}}. \quad (3)$$

Следует отметить, что уравнение, аналогичное уравнению (2), можно получить и в традиционной КЭД путем разложения массового оператора в уравнении Дирака–Швингера

$$(\hat{P} - m)\Psi(x) = \int M(x, y | eA) \Psi(y) dy$$

по величине потенциала внешнего поля eA . В этом случае также возникает дополнительный вклад по отношению к магнитному моменту, равному магнетону Бора $\mu_0 = e/2m$, который чаще всего ассоциируется со швингеровским значением для аномального магнитного момента (АММ) частицы $\Delta\mu' = (\alpha/2\pi)\mu_0$. Однако нужно иметь в виду, что в отличие от (3), где АММ присутствует изначально, АММ в традиционной КЭД имеет динамическое происхождение и значение $\Delta\mu'$ получается лишь в пределе слабого квазистатического поля при низких энергиях.

Многочисленные детальные расчеты (см. [9, 15] и цитированные там работы), проведенные в рамках традиционной квантовой теории, показывают, что с ростом энергии E или напряженности постоянного плосковолнового поля F_0 величина АММ падает от значения $\Delta\mu'$ до нуля и при $F_0 E \gg H_c m$ имеет вид

$$\Delta\mu = \Delta\mu' \left(\frac{F_0 E}{H_c m} \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

¹⁾Здесь и далее используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

Подобное же поведение радиационных поправок, рассчитанных в рамках традиционной КЭД, наблюдается и в других интенсивных электромагнитных полях и, в частности, во внешнем постоянном магнитном поле [16].

Недавно нами был проведен анализ различных вкладов в АММ лептонов, основанный на сравнении имеющихся на сегодняшний день экспериментальных и теоретических результатов с учетом неминимальных поправок, возникающих в КЭД с фундаментальной массой [17]. В частности, было отмечено, что величины АММ электрона и мюона, следующие из модифицированной электродинамики при значениях фундаментальной массы $M \sim 1$ ТэВ, можно оценить как 10^{-12} и 10^{-8} , соответственно, т.е. в рассматриваемой области значений параметра M лептонные $(g - 2)$ -факторы в модифицированной КЭД имеют тот же порядок $(\alpha/\pi)^2 \div (\alpha/\pi)^4$, что и высшие радиационные поправки в традиционной квантовой теории.

Таким образом, при сравнении экспериментальных и теоретических значений АММ лептонов, известных в настоящее время с высокой точностью, нужно учитывать и вклады, обусловленные возможным существованием фундаментальной массы M , наряду, например, с поправками, обусловленными адронной поляризацией вакуума и слабым взаимодействием.

2. ПОРОГОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Возвращаясь к анализу пороговых явлений в интенсивных внешних электромагнитных полях, заметим, что в этих условиях изменяются не только характеристики элементарных частиц (подобно АММ), но могут изменяться и сами значения энергетических порогов. В частности, обратим внимание на то, что уравнение (2) имеет точное решение, например, для постоянного и однородного магнитного поля H (см. [9]). При этом спектр собственных значений энергии явным образом зависит от ориентации спина электрона по отношению к направлению магнитного поля (ось Z):

$$E_n(\zeta, p_z, H) = m \left[\left(\frac{p_z}{m} \right)^2 + \left(\sqrt{1 + \frac{H}{H_c} (2n + \zeta + 1)} + \zeta \frac{H}{H_c} \left(\frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

где ζ и p_z – проекции спина и импульса электрона на ось Z , соответственно. Таким образом, основное состояние электрона определяется ориентацией спина $\zeta = -1$, и его энергию можно представить как

$$E_0(-1, 0, H) = m \left[1 - \frac{H}{2H_c} \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right) \right]. \quad (5)$$

Из формулы (5), в частности, следует, что наличие АММ приводит к понижению энергии основного состояния частицы в магнитном поле относительно вакуумного значения $E_0 = m$. Формальная экстраполяция швингеровского значения АММ на случай магнитного поля $H = (4\pi/\alpha)H_c$ приводит к выводу, что при этом значении понижение основного уровня энергии электрона из-за наличия АММ приводит к “захлопыванию” энергетической щели между электронными и позитронными состояниями и становится возможен процесс спонтанного образования электрон-позитронных пар из вакуума. На самом деле в КЭД этого парадокса нет, т.к. в действительности оказывается, что в сильном магнитном поле значение АММ стремится к нулю.

Анализ аналогичных процессов, проведенный в рамках модифицированной КЭД с фундаментальной массой, убеждает во внутренней согласованности этой теории [10–14], содержащей универсальный параметр предельной массы и как следствие параметр граничного значения интенсивности поля.

Так, если считать, что уравнение (2) и следующие из него формулы (4), (5) справедливы при любых напряженностях магнитного поля, то, полагая в выражении (5) параметр μ равным величине (3) и

$$H = \left(\sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}} - 1 \right)^{-1} 2H_c, \quad (6)$$

получаем $E_0 = 0$, т.е. при магнитных полях, превышающих значение (6), действительно происходит “захлопывание” энергетической щели между электронными и позитронными состояниями. Однако важно подчеркнуть, что при $m \ll M$ из (6) следует значение характерного поля, демонстрирующее появление нового полевого масштаба

$$F_f = \frac{M^2 c^3}{e \hbar}, \quad (7)$$

который естественно назвать *фундаментальным полем*. Отметим также, что при этом значении поля магнитная длина r_H сравнивается с величиной фундаментальной длины l . Это эквивалентно тому, что устанавливается некоторое граничное значение электромагнитного поля. Таким образом, использование точных решений квантовых уравнений движения частиц во внешнем поле и последовательное изучение ряда реакций в традиционной КЭД с учетом действия интенсивных электромагнитных полей открывают новые возможности и в проверке предсказаний КЭД с фундаментальной массой.

Далее мы рассмотрим ряд пороговых процессов во внешнем электромагнитном поле сложной конфигурации. Отметим, что в отсутствие поля при переходах с нулевыми моментами нерелятивистские процессы характеризуются сходной зависимостью сечений от передаваемой энергии $(E - E_0)$ [1]

$$\sigma \sim A \sqrt{E - E_0}.$$

Сходство аналитических зависимостей вероятностей ряда процессов от параметров внешнего поля сложной конфигурации анализировалось ранее в работе [8].

Здесь в качестве внешнего поля, допускающего развитие подхода, основанного на использовании точных решений квантовых уравнений движения заряженных частиц, мы рассмотрим конфигурацию, представляющую суперпозицию поля лазерного излучения и интенсивного постоянного магнитного поля, ориентированного вдоль направления распространения волны.

Используем, в частности, выражения для вероятностей процессов фотообразования пар и фотоэмиссии электрона в непроводящем кристалле во внешнем поле, полученные в работах [7, 8] и обозначенные там как $W_{3/2}$. В отсутствие поля эти вероятности оказываются ненулевыми лишь для энергий фотонов выше соответствующих пороговых значений: $E - E_0 = mI_0 > 0$. Во внешнем поле вероятности процессов благодаря туннельным эффектам отличны от нуля при любой энергии mI_0 .

Отметим также, что отличия нормированного нерелятивистского выражения, определяющего вероятность процесса фотообразования пар e^+e^- двумя одинаково поляризованными фотонами во внешнем поле, распространяющимися навстречу друг другу с суммарной энергией

$$\omega + \omega' - 2m = I_0 m,$$

от аналогичного выражения для вероятности фотоэффекта, возникающего под действием поля, сводятся к незначительным числовым изменениям параметров, связанным с переходом от двух заряженных частиц к одной частице, взаимодействующей с полем [7, 8].

Можно также убедиться, что вероятность процесса ионизации, возникающей под действием поля, из короткодействующей потенциальной ямы (δ -ямы) после нормировки на соответствующее вакуумное значение описывается тем же выражением, что и вероятность фотоэмиссии электрона в том же поле в области прозрачности кристалла (т.е. при энергии фотона меньше ширины запрещенной зоны полупроводника: $I_0 < 0$).

Аналитические свойства выражения для вероятности процессов во внешнем поле $W_{3/2}$ удобно исследовать, представив его в виде единого интеграла после выделения бесполовой части, что соответствует проведению вычитательной процедуры, обеспечивающей получение квадратично интегрируемой подынтегральной функции,

$$\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta_0} = \int_{-\infty}^{\infty} du e^{i\beta_0 u} g_1(u), \quad (8)$$

где

$$g_1(u) = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{(1-\delta) \operatorname{ctg}[(1-\delta)u]}{\sqrt{u}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ -i\beta_0 \xi^2 \frac{u}{\delta} \left[1 - \frac{1-\delta}{\delta} \frac{\sin u \sin(\delta u)}{u \sin(u(1-\delta))} \right] \right\} - \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} \right\}. \quad (9)$$

Здесь введены следующие обозначения: F_0 – напряженность поля волны, ω и $\omega_H = eH/m$ – частота волны и циклотронная частота, соответственно, H – напряженность постоянного магнитного поля, ориентированного вдоль направления распространения волны, $\delta = 1 - \omega_H/\omega$, $u = \omega t/2$, $\beta_0 = 2m(-I_0)/\omega$, $\beta = 2m(-I)/\omega$, $\xi = eF_0/m\omega\sqrt{2|I_0|}$ – безразмерный параметр интенсивности волны.

Представляя подынтегральную функцию в виде

$$g_1(u) = \frac{1}{2i} g(u), \quad (10)$$

можно установить соотношение

$$g(-u) = -g^*(u) \quad (11)$$

и записать интеграл (8) как

$$G_1(\beta_0) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) \tilde{g}(u) e^{i\beta_0 u} du, \quad (12)$$

где

$$\tilde{g}(u) = \begin{cases} g(u), & u > 0, \\ g^*(-u), & u < 0, \end{cases}$$

а $\varepsilon(u) = \operatorname{sign}(u)$.

Далее, используя тождество²⁾

$$\varepsilon(u) e^{i\omega u} = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega' u}}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (13)$$

²⁾ Здесь $P \int_{-\infty}^{\infty}$ – главное значение интеграла в смысле Коши.

нетрудно получить

$$G_1(\beta_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_2(\beta)}{\beta - \beta_0} d\beta; \quad (14)$$

$$G_2(\beta_0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(u) e^{i\beta_0 u} du. \quad (15)$$

Интеграл (15) представим также в виде

$$G_2(\beta_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [g(u) e^{i\beta_0 u} + g^*(u) e^{-i\beta_0 u}] du, \quad (16)$$

откуда следует, что функция $G_2(\beta_0)$ вещественна при вещественном аргументе. Аналогично можно убедиться, что

$$G_1(\beta_0) = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} [g(u) e^{i\beta_0 u} - g^*(u) e^{-i\beta_0 u}] du, \quad (17)$$

откуда устанавливается вещественность на действительной оси β_0 и функции $G_1(\beta_0)$. Полученные результаты позволяют определить функцию

$$G(\beta_0) = G_2(\beta_0) + iG_1(\beta_0) = \int_0^{\infty} g(u) e^{i\beta_0 u} du, \quad (18)$$

регулярную в полуплоскости $\text{Im } \beta_0 > 0$, вещественная и мнимая части которой соответственно равны

$$\text{Re } G(\beta_0) = G_2(\beta_0), \quad \text{Im } G(\beta_0) = G_1(\beta_0).$$

Таким образом, соотношение (14), выражающее связь между $\text{Re } G$ и $\text{Im } G$, является *дисперсионным соотношением*. При этом аналитическая функция $G(\beta_0)$, являющаяся продолжением интеграла (8) в комплексную плоскость β_0 , представима в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta} - \sqrt{\beta_0} = & \frac{1}{2(i\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} du e^{i\beta_0 u} \left\{ \frac{(1-\delta) \text{ctg}[(1-\delta)u]}{\sqrt{u}} \times \right. \\ & \left. \times \exp \left\{ -i\beta_0 \xi^2 \frac{u}{\delta} \left[1 - \frac{1-\delta}{\delta} \frac{\sin u \sin(\delta u)}{u \sin(u(1-\delta))} \right] \right\} - \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Полученное выражение (19), по существу, есть уравнение для определения комплексной энергии E , зависящей от невозмущенной энергии E_0 , а также от характеристик внешнего поля F_0 , ω и H .

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ ШИРИНЫ И СДВИГА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Проанализируем выражение (19) в ряде характерных ситуаций.

3.1. Поле электромагнитной волны. В случае выключения из рассматриваемой конфигурации магнитного поля в ней остается лишь поле электромагнитной волны. Для этого в (19) нужно устремить параметр ω_H к 0 (или $\delta \rightarrow 1$), после чего имеем

$$\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta_0} = \frac{1}{2(i\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} e^{i\beta_0 u} \left\{ \exp \left\{ -i\beta_0 \xi^2 u \left[1 - \frac{\sin^2 u}{u^2} \right] \right\} - 1 \right\}. \quad (20)$$

В этом пределе выражение (19) обобщает ранее известные результаты (см., например, [18]), полученные для случая вырывания электрона из короткодействующей потенциальной ямы полем интенсивной циркулярно поляризованной волны.

3.2. Адиабатически медленно меняющееся возмущение. Если совершить другой предельный переход и устремить частоту электромагнитной волны к нулю ($\omega \rightarrow 0$), то из (19) следует выражение, которое определяет энергию и ширину уровня в постоянном плосковолновом поле. Пренебрегая поправками по полю волны и постоянному магнитному полю, из (19) имеем

$$\sqrt{-2I} = \sqrt{-2I_0} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{eF_0}{m^2} \right)^{\frac{1}{3}} F(z), \quad (21)$$

где

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} e^{-izx} (e^{-i\frac{x^3}{3}} - 1), \quad (22)$$

$$z = -2I_0 \left(\frac{m^2}{eF_0} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad |z| = \frac{1}{\chi^{\frac{2}{3}}}, \quad \chi = \frac{eF_0}{m^2(|2I_0|)^{\frac{3}{2}}}. \quad (23)$$

Выделяя вещественную и мнимую части функции (22) (с учетом характерных множителей), можно получить

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi z}} F(z) \right\} = \alpha_1, \quad (24)$$

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi z}} F(z) \right\} = \alpha_2. \quad (25)$$

Таким образом, для сдвига энергии и ширины уровня соответственно получим

$$\operatorname{Re} \left(\frac{I}{I_0} \right) = 1 + 2\alpha_1 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2, \quad (26)$$

$$\operatorname{Im} \left(\frac{I}{I_0} \right) = 2\alpha_2(1 + \alpha_1). \quad (27)$$

Функция $F(z)$ обладает также представлением

$$F(z) = \int_z^\infty dx \left[f(x) - \exp \left(i\frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{\pi}{x}} \right], \quad (28)$$

где

$$f(x) = i \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \exp \left[-i \left(xt + \frac{t^3}{3} \right) \right] \quad (29)$$

является целой трансцендентной функцией, экспоненциально спадающей в нижней полуплоскости комплексной переменной x . Она представима также в виде

$$e^{-i\frac{\pi}{4}} f(x) = \tau(x) + i\phi(x), \quad (30)$$

где $\tau(x)$ и $\phi(x)$ вещественны при вещественных x .

Нетрудно убедиться, что мнимая часть

$$\operatorname{Im} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{4}} f(x) \right\} = \phi(x)$$

выражается через квадрат функции Эйри

$$\phi(x) = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\pi}} \Phi^2\left(\frac{x}{2^{\frac{2}{3}}}\right). \quad (31)$$

На действительной оси вещественная и мнимая части функции $f(x)$ также связаны преобразованиями Гильберта (14).

Следуя методике, подробно изложенной в работах [6–8], для функции $f(z)$ можно получить следующие асимптотические формулы при $z \rightarrow \infty$:

$$\tau(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{z}} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-3k} \frac{\Gamma(3k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2})3^k}, \quad (32)$$

$$\phi(z) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{z}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k z^{-\frac{3k}{2}}, \quad (33)$$

где

$$a_k = \frac{1}{3^{2k}} \sum_{m=0}^{2k} 3^m \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2}) \Gamma(3k - m + \frac{1}{2})}{\Gamma(2k - m + 1) \Gamma(m + 1) \Gamma^2(\frac{1}{2})}. \quad (34)$$

Анализируя (16), можно показать, что функция $F(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ убывает как $z^{-5/2}$ в секторе $-\pi < \arg z < \pi/3$, а в секторе $\pi/3 < \arg z < \pi$ она экспоненциально растет. Функция $F(z)$ представима также в виде

$$F(z) = 2 \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\pi z} + F(0) - \int_0^z dx f(x), \quad (35)$$

где

$$F(0) = \int_0^{\infty} dx \left[f(x) - \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\pi}{x}} \right] = \frac{2}{3^{\frac{5}{6}}} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \exp\left(-i\frac{11\pi}{12}\right), \quad (36)$$

а функция $f(x)$ определяется представлением (30). Используя формулы (32)–(34), для $F(z)$ при $z \rightarrow \infty$ можно получить следующие асимптотические разложения:

$$\Re(z) = \operatorname{Re}\{e^{-i\frac{\pi}{4}} F(z)\} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{z^{\frac{5}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3k + \frac{5}{2})}{3^{k+1} \Gamma(k+2) \Gamma(\frac{1}{2})} z^{-3k}, \quad (37)$$

$$\Im(z) = \operatorname{Im}\{e^{-i\frac{\pi}{4}} F(z)\} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2z} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k z^{-\frac{3}{2}k}, \quad (38)$$

где

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 1 \quad (39)$$

и коэффициенты b_k определяются рекуррентным соотношением

$$b_k = a_k + \frac{1}{2}(3k - 1)b_{k-1}. \quad (40)$$

При $z \rightarrow -\infty$ соответственно получим

$$\Re(z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{(-z)} \sum_{k=0}^{\infty} (z)^{-3k} \left[b_{2k} \sin\left(\frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}\right) - (-z)^{-\frac{3}{2}} b_{2k+1} \cos\left(\frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}\right) \right], \quad (41)$$

$$\Im(z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{(-z)} \sum_{k=0}^{\infty} (z)^{-3k} \left[\frac{z^{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(3k + \frac{5}{2}\right)}{3^{k+1} \Gamma(k+2) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - b_{2k} \cos\left(\frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}\right) - \right. \\ \left. - (-z)^{-\frac{3}{2}} b_{2k+1} \sin\left(\frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}\right) \right], \quad (42)$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются соотношениями (34), (40). При $z \rightarrow \infty$, что соответствует $\chi \ll 1$ и $I_0 < 0$, с учетом формулы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{\pi z}} \begin{pmatrix} \Re(z) \\ \Im(z) \end{pmatrix} \quad (43)$$

из (37), (38) имеем

$$\Im\left(\frac{I}{I_0}\right) = \left(\frac{1}{2}\chi - \frac{17}{10}\chi^2 + \frac{1261}{576}\chi^3 - \frac{17}{80}\chi^4 + \frac{3115}{256}\chi^5\right) \exp\left(-\frac{2}{3\chi}\right), \quad (44)$$

$$\Re\left(\frac{I}{I_0}\right) = 1 + \frac{1}{4}\chi^2 + \frac{53}{32}\chi^4 + \frac{12565}{256}\chi^6. \quad (45)$$

Отметим, что с помощью асимптотических разложений (44), (45) определяются, например, поправки к ширине уровня и его сдвиг для электрона, находящегося в связанном состоянии в δ -яме, при действии постоянного плоскостолнового поля. Учет поправок, обусловленных полем волны и постоянным магнитным полем, в рассматриваемом пределе позволяет записать

$$I = -|I_0| \left[1 + \frac{1}{32I_0^3} \left(\frac{eF_0}{m^2} \right)^2 \right] - i \frac{eF_0}{4m^2 \sqrt{2|I_0|}} \exp\left\{ -\frac{2}{3\chi} \left[1 - \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{2\delta}{5} - \frac{\delta^2}{5} - \frac{2}{15} \right) \right] \right\}. \quad (46)$$

Следует подчеркнуть, что если в рассматриваемой конфигурации электромагнитных полей полностью исключить магнитное поле, т.е. рассмотреть предел $\delta \rightarrow 1$, то из выражения (46) следуют известные результаты, определяющие сдвиг и ширину уровня в постоянном электрическом поле, с волновыми поправками в экспоненте [5, 15, 18]. Из формулы (46), в частности, следует, что отличия туннельного и многофотонного режимов в электромагнитном поле рассматриваемой конфигурации начинаются не со значения $\xi^2 \sim 1/15$, как в случае чисто волнового поля, а с величины

$$\xi^2 \sim |\Delta(\delta)| = \left| \frac{2\delta}{5} - \frac{\delta^2}{5} - \frac{2}{15} \right|, \quad (47)$$

которая определяется соотношением частот

$$\Delta(\delta) = \frac{\omega^2 - 3\omega_H^2}{15\omega^2}. \quad (48)$$

Легко видеть, что при изменении магнитного поля от нулевого значения величина $\Delta(\delta)$ сначала уменьшается, а затем при значении $\omega = \sqrt{3}\omega_H$ меняет знак. Далее с ростом

величины постоянного магнитного поля наблюдается квадратичный рост $\Delta(\delta)$. Интересно отметить, что предельное значение величины полной поправки в экспоненте при $\omega_H \gg \omega$ есть

$$-\frac{\Delta(\delta)}{\xi^2} = \frac{2}{5} \frac{H^2}{F_0^2} I_0, \quad (49)$$

откуда следует, что дополнительное включение магнитного поля уменьшает ширину уровня энергии по сравнению со случаем постоянного плоскостного поля.

В другом предельном случае при $\chi \gg 1$ характер зависимости существенно меняется:

$$\text{Im}\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{\sqrt{3}\Gamma^4\left(\frac{2}{3}\right)}{4\pi^2 2^{\frac{4}{3}}}(3\chi)^{\frac{2}{3}}, \quad (50)$$

$$\text{Re}\left(\frac{I}{I_0}\right) = \frac{\Gamma^4\left(\frac{2}{3}\right)}{4\pi^2 2^{\frac{4}{3}}}(3\chi)^{\frac{2}{3}}. \quad (51)$$

Эта ситуация соответствует либо очень сильным полям $F_0 \gg m^2/e$, либо области значений $I_0 \rightarrow 0$.

Оставляя лишь главные члены разложений в пределе $I_0 \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow 0$), получим

$$I = -\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{10}{3}}\pi^2} \left(\frac{eF_0}{m^2}\right)^{\frac{2}{3}} \Gamma^4\left(\frac{2}{3}\right) + i\frac{\sqrt{3}3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{10}{3}}\pi^2} \left(\frac{eF_0}{m^2}\right)^{\frac{2}{3}} \Gamma^4\left(\frac{2}{3}\right). \quad (52)$$

Из (50)–(52) следует, что при больших значениях динамической переменной χ ширина уровня и его сдвиг оказываются одного порядка и растут с ростом χ как $\chi^{2/3}$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $I_0 > 0$. Эта область значений параметров соответствует, например, процессу поглощения света кристаллом при приложении к нему внешнего поля, когда энергия фотона оказывается больше ширины запрещенной зоны полупроводника. Тогда $z < 0$, и в слабом поле $\chi \ll 1$ имеем $z \rightarrow -\infty$. Как следует из (41), (42), в этом пределе мнимая и вещественная части интеграла (8) имеют осциллирующий характер. Выделяя основные вклады для ширины уровня и поправки к энергии, имеем

$$I = I_0 \left[1 - \chi \cos\left(\frac{2}{3\chi}\right) \right] - i\sqrt{\frac{I_0}{2}} \chi \sin\left(\frac{2}{3\chi}\right). \quad (53)$$

Следует подчеркнуть, что полученные результаты применимы и к случаю образования пар e^+e^- двумя фотонами во внешнем электромагнитном поле. В выражении $W_{3/2}$ для двухфотонной вероятности образования нерелятивистской (e^+e^-)-пары в присутствии поля следует заменить параметр χ на $\chi\sqrt{2}$, а μ — на 2μ . Аналогичные замены нужно произвести и в интегралах (8) и (19).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог проведенного исследования, необходимо отметить, что осцилляции коэффициента поглощения как функции приложенного поля и частоты света хорошо известны [2, 3] и давно используются для исследования зонной структуры полупроводника. В этой связи следует отметить, что при тех же значениях параметров должны наблюдаться и осцилляции максимальной энергии электронов. Причем эти осцилляции происходят в фазе с колебаниями коэффициента поглощения, а их относительная амплитуда в 2 раза превышает амплитуду последних.

Полученные результаты наглядно демонстрируют также следующие факты:

1) величина $\text{Re}(I - I_0) < 0$ и при $I_0 < 0$ монотонно возрастает с увеличением параметра χ , причем квадратичная зависимость при $\chi \ll 1$ заменяется зависимостью, пропорциональной $\chi^{2/3}$ при $\chi \gg 1$;

2) величина $\text{Im}(I/I_0) > 0$ и при $I_0 < 0$ монотонно возрастает с увеличением χ , достигая своего максимального значения при $I_0 = 0$; при $I_0 > 0$ с ростом I_0 мнимая и вещественная части энергии осциллируют с возрастающей частотой ($\sim 1/\chi$) и затухающей амплитудой ($\sim 1/I_0$);

3) при $I_0 \rightarrow 0$ (или $\chi \rightarrow \infty$) модуль энергии растет как $\chi^{2/3}$. В этом пределе вещественная и мнимая части энергии отличаются только множителем $\sqrt{3}$;

4) сравнение полученных значений для ширины уровня энергии и энергетического сдвига при больших значениях динамической переменной со значениями вещественных и мнимых частей радиационных поправок к массам электрона и фотона во внешнем поле [9, 15] в пределе сильных полей указывает на их достаточно глубокую аналогию. Она выражается в том, что их рост с увеличением интенсивности поля при $\chi \gg 1$, по существу, определяется одной и той же функциональной зависимостью от полевого параметра. Отличия сводятся лишь к разным числовым множителям, причем относительный множитель, связывающий вещественные и мнимые части, оказывается общим в обоих случаях.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-17936а).

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
- [2] Л. В. Келдыш. ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 1138.
- [3] W. Franz. Z. Naturforsch. A. 1958. V. 13. P. 484.
- [4] А. А. Соколов, И. М. Тернов. ДАН СССР. 1963. Т. 153. С. 1053.
- [5] Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов. УФН. 1998. Т. 168. С. 531.
- [6] В. Н. Родионов. ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 3.
- [7] В. Н. Родионов. ЖЭТФ. 1998. Т. 113. С. 21.
- [8] В. Н. Родионов. Вестн. Моск. ун-та. Физика, астрономия. 1999. № 2. С. 5.
- [9] И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Родионов. Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: Изд-во МГУ, 1982.
- [10] В. Г. Кадышевский. Квантовая теория поля и импульсное пространство постоянной кривизны. В сб.: Проблемы теоретической физики. Ред. В. И. Ритус (отв. ред.) и др. М.: Наука, 1972. С. 52.
- [11] В. Г. Кадышевский. ЭЧАЯ. 1980. Т. 11. С. 5.
- [12] V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev. Phys. Lett. B. 1981. V. 106. P. 139.
- [13] В. Г. Кадышевский. ЭЧАЯ. 1998. Т. 29. С. 563.
- [14] V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev. Nuovo Cimento. A. 1985. V. 87. № 3. P. 324.
- [15] А. И. Никишов, В. И. Ритус. Тр. ФИАН. 1979. Т. 111. С. 84; 1986. Т. 168. С. 232.
- [16] В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко. ЯФ. 1976. Т. 24. С. 379.
- [17] В. Г. Кадышевский, В. Н. Родионов. Электромагнитная длина и фундаментальная масса в электродинамике. В сб.: Тр. семинара "Симметрии и интегрируемые системы". Ред. А. Н. Сисакян. Дубна: ОИЯИ, 1999. С. 103.
- [18] Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов. Атом в сильном световом поле. М.: Атомиздат, 1978.

Поступила в редакцию 15.VI.2000 г.