Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, Некоторый аналог вариационных формул
Адамара и Шиффера, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 3, 335–
341

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6770>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:59:28

© 2012 г.

С. П. Суетин*

НЕКОТОРЫЙ АНАЛОГ ВАРИАЦИОННЫХ ФОРМУЛ АДАМАРА И ШИФФЕРА

Получена достаточно общая вариационная формула для функции Грина, из которой вытекают, в частности, классические вариационные формулы Адамара и Шиффера.

Ключевые слова: функция Грина, вариационная формула Адамара, вариационная формула Шиффера.

1. ФОРМУЛА АДАМАРА

Пусть G – ограниченная конечносвязная область, граница γ которой состоит из конечного числа (замкнутых) аналитических кривых, $n_z = e^{i\alpha z}$ – единичная внутренняя нормаль к кривой γ в точке $z \in \gamma$. Пусть $\psi(s)$ – положительная аналитическая функция натурального параметра на γ (при $z \in \gamma$ будем иногда писать $\psi(z)$). Тогда для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ можно определить положительный сдвиг $\varepsilon\psi(z)n_z = \varepsilon\psi(z)e^{i\alpha z}$ внутрь области G по направлению внутренней нормали n_z на величину $\delta n_z := \varepsilon\psi(z) > 0$. Кривая γ переходит в кривую $\gamma^* := \{z^* = z + \delta n_z \cdot n_z, z \in \gamma\}$, ограничивающую новую область G^* , $G^* \Subset G$, с границей $\partial G^* = \gamma^*$.

Обозначим через $g(z, \zeta)$ функцию Грина исходной области G с особенностью в точке $\zeta \in K \Subset G$; пусть $g^*(z, \zeta)$ – соответствующая функция Грина для области G^* . Имеет место следующая вариационная формула Адамара [1]–[4]:

$$g^*(z, \zeta) - g(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial g(w, \zeta)}{\partial n_w} \frac{\partial g(w, z)}{\partial n_w} \delta n_w ds_w + O(\varepsilon^2), \quad (1)$$

где $z \in G^*$, причем оценка $O(\varepsilon^2)$ справедлива равномерно по $\zeta \in K \Subset G^*$. Поскольку $G^* \Subset G$, при $z \in G^*$, очевидно, имеем $g^*(z, \zeta) < g(z, \zeta)$. Формула (1) дает количественную оценку для последнего неравенства.

Формула Адамара (1) имеет многочисленные приложения, так как через функцию Грина выражаются в конечном итоге все основные функции, связанные с областью G (так называемые “domain-functions”): гармонические меры компонент границы γ , функция Неймана, ядра Бергмана и Сегё, соответствующая матрица периодов

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: suetin@mi.ras.ru

(см. прежде всего работу [5], а также [6] и [7]). Тем самым вариации этих функций также могут быть выражены через вариацию функции Грина, а значит, представлены в явном виде с помощью формулы (1) [2], [5], [6], [8]–[13].

Доказательство формулы (1) довольно короткое. Действительно, по формуле Тейлора для $z \in \gamma$ имеем (все дальнейшие соотношения выполняются равномерно по $\zeta \in K \Subset G$)

$$g(z^*, \zeta) = g(z, \zeta) + \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z} \delta n_z + O(\varepsilon^2) = \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z} \delta n_z + O(\varepsilon^2), \quad z \in \gamma.$$

Следовательно,

$$g(z, \zeta)|_{\gamma^*} = g(z^*, \zeta) = \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z} \delta n_z + O(\varepsilon^2) \quad (2)$$

и $g(z, \zeta) = -\ln|z - \zeta| + \{\text{регулярная часть}\}$ при $z \in G^*$. Теперь уже ясно, что надо делать: для $w \in \gamma^*$ по граничным значениям $u_0(w) = (\partial g(w, \zeta)/\partial n_w) \delta n_w$ на кривой γ^* надо с помощью формулы Грина построить гармоническую в области G^* функцию $u(z)$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma^*} u_0(w) \frac{\partial g^*(w, z)}{\partial n_w} ds_w = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial g(w, \zeta)}{\partial n_w} \delta n_w \frac{\partial g(w, z)}{\partial n_w} ds_w + O(\varepsilon^2). \quad (3)$$

В правой части последнего равенства в (3) мы заменили γ^* на γ и $g^*(w, z)$ на $g(w, z)$ с точностью $O(\varepsilon^2)$ на следующем основании. В силу принципа максимума модуля $u(z) = O(\varepsilon)$ равномерно в произвольной области $\Omega \Subset G^*$ с гладкой границей. Для $z \in \Omega$ интеграл по кривой γ^* можно заменить на интеграл по кривой $\partial\Omega$. Теперь уже на $\partial\Omega$ можно заменить¹⁾ $g^*(w, z)$ на $g(w, z)$ с точностью $O(\varepsilon)$, а затем вернуться к интегрированию по γ^* (при условии, что $z \in \Omega$) и окончательно перейти к интегрированию по γ с общей точностью $O(\varepsilon^2)$.

Рассмотрим теперь разность $k(z, \zeta) := g(z, \zeta) - u(z)$. В области G^* имеем равенство $k(z, \zeta) = -\ln|z - \zeta| + \{\text{регулярная часть}\}$, а на границе

$$k(z, \zeta)|_{\gamma^*} = g(z^*, \zeta) - u(z^*) = g(z^*, \zeta) - \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z} \delta n_z + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2).$$

Но по определению $g^*(z^*, \zeta) = 0$, $z^* \in \gamma^*$. Таким образом, для гармонической в области G^* функции $g^*(z, \zeta) - k(z, \zeta)$ имеем $g^*(z, \zeta) - k(z, \zeta) = O(\varepsilon^2)$ на γ^* . Следовательно, в силу принципа максимума разность $g^*(z, \zeta) - k(z, \zeta) = O(\varepsilon^2)$ всюду в G^* (и равномерно по $\zeta \in K \Subset G$). Отсюда и из соотношения (3) вытекает, что

$$\begin{aligned} g^*(z, \zeta) - g(z, \zeta) &= -u(z) + O(\varepsilon^2) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial g(w, \zeta)}{\partial n_w} \frac{\partial g(w, z)}{\partial n_w} \delta n_w ds_w + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Данная формула и есть вариационная формула Адамара (1). Отметим, что формула Адамара (1) справедлива и при более общих вариациях границы G вдоль нормали к γ : границу можно сдвигать вдоль нормали с помощью аналитической функции $\psi(s)$ переменного знака (подробнее см. работы [6], [14]).

¹⁾Из (2) вытекает, что $g^*(w, \zeta) - g(w, \zeta) = O(\varepsilon)$ равномерно по $w \in \partial\Omega$, $\zeta \in K$, и такая же оценка справедлива для нормальных производных.

2. ФОРМУЛЫ ШИФФЕРА

Формула Адамара (1) возникает в процессе граничной вариации исходной области G . Рассмотрим теперь внутреннюю вариацию Шиффера [2] (см. также [5], [6]):

$$z^* = z + \frac{e^{2i\phi}\rho^2}{z - z_0}, \quad (4)$$

где точка $z_0 \in G$, $0 \leq \phi < \pi$ и $\rho > 0$ – малый параметр. Преобразование (4) конформно и однолистно во внешности круга $|z - z_0| > \rho$ и отображает внешность круга на внешность отрезка $[z_0 - 2\rho e^{i\phi}, z_0 + 2\rho e^{i\phi}]$ длины 4ρ с центром в точке z_0 . Тем самым при достаточно малых $\rho > 0$ кривая γ конформно и однолистно преобразуется в аналитическую кривую γ^* того же гомотопического класса, ограничивающую новую область G^* , $z_0 \in G^*$. Новую область G^* естественно рассматривать как вариацию исходной области G , полученную в результате преобразования (4). Хорошо известно, что внутренняя вариация Шиффера (4) приводит к следующей вариации функции Грина [2], [5], [6]:

$$g^*(z, \zeta) - g(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\phi} \rho^2 \left(P'(z_0, \zeta) P'(z_0, z) - \frac{P'(\zeta, z)}{\zeta - z_0} - \frac{P'(z, \zeta)}{z - z_0} \right) \right\} + O(\rho^4), \quad (5)$$

где $P(w, \zeta) = g(w, \zeta) + ih(w, \zeta) = -\ln(w - \zeta) + U(w, \zeta)$ – комплексная функция Грина, $h(w, \zeta)$ – функция, гармонически сопряженная $g(w, \zeta)$. Функции $h(w, \zeta)$, $P(w, \zeta)$ – многозначные функции в области D ; производная $P'(w, \zeta)$ – однозначная функция (через $P'(w, \zeta)$ здесь и далее обозначается производная функции $P(w, \zeta)$ по первому аргументу: $P'(w, \zeta) = 2 \partial g(w, \zeta) / \partial w$). Формула (5) доказана ниже в разделе 3. Отметим, что эта формула справедлива для произвольной конечносвязной области G с произвольной границей – это доказывается путем предельного перехода (подробнее см. [6], а также раздел 3 настоящей работы). При помощи формулы Тейлора из (5) получаем вторую вариационную формулу Шиффера, в которой учитывается также вариация точек $z, \zeta \in G$:

$$g^*(z^*, \zeta^*) - g(z, \zeta) = \operatorname{Re} \{ e^{2i\phi} \rho^2 P'(z_0, \zeta) P'(z_0, z) \} + O(\rho^4). \quad (6)$$

Вариационные формулы Шиффера (5), (6) тоже приводят к явным вариационным формулам для всех основных функций, связанных с областью G [5], [7]. Эти формулы имеют многочисленные применения, прежде всего, в геометрической теории функций комплексного переменного при решении задач, связанных с проблемой модулей, и при описании соответствующей экстремальной метрики (см. работы [15], [16], а также [17]–[19]). В последнее время с помощью вариационных формул удалось доказать существование S -кривых для некоторых достаточно общих задач равновесия в теории потенциала, интересных с точки зрения их приложений к различным актуальным задачам математической физики и теории рациональных аппроксимаций аналитических функций [12], [13], [20]–[23].

3. ОБОБЩЕННАЯ ВАРИАЦИЯ

Пусть теперь $h(z)$ – произвольная функция, голоморфная в некоторой окрестности V кривой γ . Определим преобразование (вариацию) переменной $z \mapsto z_t$:

$$z_t = z + th(z), \quad (7)$$

где t – малый комплексный параметр [12], [20], [22], [24]. Ясно, что при достаточно малом t , $|t| \leq \varepsilon_0$, преобразование (7) является конформным и однолиственным в V и переводит кривую γ в новую кривую γ^* , ограничивающую новую область G^* . Отметим, что формула (7) как частные случаи содержит вариацию Адамара и вариацию Шиффера. Цель настоящей работы – найти формулу достаточно общего характера для вариации функции Грина исходной области G при преобразовании (7) такую, что из нее вытекают вариационные формулы Адамара (1) и Шиффера (5), а также некоторые другие явные формулы, уже нашедшие приложения [12], [13], [20]–[22].

Сдвиг $\Delta z = th(z)$ от точки z к точке $z^* = z_t$ происходит теперь не по нормали. Но на γ мы имеем $\partial g(z, \zeta)/\partial s_z = 0$, поэтому вклад в приращение функции Грина в формуле Тейлора все равно дает только сдвиг δn_z по нормали n_z . Найдем его выражение через исходный сдвиг $\Delta w = th(w)$. Пусть α_w – направление внутренней по отношению к области D нормали к кривой γ в точке w (т.е. угол, который нормаль составляет с осью x), β_w – направление касательной (т.е. угол, который касательная составляет с осью x , отсчитываемый в положительном направлении: область G остается слева при обходе по γ). Имеем $\alpha_w - \beta_w = \pi/2$ и, следовательно, $\delta n_w = \operatorname{Re}(e^{-i\alpha_w} \Delta w) = \operatorname{Re}(e^{-i\alpha_w} th(w))$. Поступим теперь так же, как в разделе 1. Тогда по формуле Тейлора с учетом того, что $\partial g(w, \zeta)/\partial s_w = 0$ при $w \in \gamma$, получаем для $w^* = w_t$, $w \in \gamma$

$$g(w^*, \zeta) = g(w, \zeta) + \frac{\partial g(w, \zeta)}{\partial n_w} \delta n_w + O(\varepsilon^2) = \frac{\partial g(w, \zeta)}{\partial n_w} \operatorname{Re}(e^{-i\alpha_w} th(w)) + O(\varepsilon^2).$$

Для комплексной функции Грина $P(w, \zeta)$ справедливы соотношения

$$P(w, \zeta) = -\ln(w - \zeta) + U(w, \zeta), \quad P'(w, \zeta) = -\frac{1}{w - \zeta} + U'(w, \zeta).$$

При $w \in \gamma$, $\zeta \in K$ имеем $|dw| = ds_w$, $dw = e^{i\beta_w} ds_w$, тем самым $ds_w = e^{-i\beta_w} dw \in \mathbb{R}$; кроме того,

$$\frac{\partial g(w, z)}{\partial n_w} = P'(w, z) e^{i\alpha_w} = iP'(w, z) w' > 0 \quad (8)$$

и $\delta n_w = \operatorname{Re}(e^{-i\alpha_w} \Delta w) = \operatorname{Re}(e^{-i\alpha_w} th(w))$. Теперь снова для $w \in \gamma^*$ по граничным значениям $u_0(w) = \partial g(w, z)/\partial n_w = P'(w, z) e^{i\alpha_w}$ на кривой γ^* (см. соотношение (8)) с помощью формулы Грина построим гармоническую в области G^* функцию $u(z)$ и учтем, что (см. (3) и (8))

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(w, \zeta)}{\partial n_w} \frac{\partial g(w, z)}{\partial n_w} \delta n_w ds_w &= P'(w, \zeta) e^{i\alpha_w} P'(w, z) e^{i\alpha_w} \operatorname{Re}(e^{-i\alpha_w} \Delta w) e^{-i\beta_w} dw = \\ &= \operatorname{Re}\{P'(w, \zeta) e^{i\alpha_w} P'(w, z) e^{i\alpha_w} e^{-i\alpha_w} th(w) e^{-i\beta_w} dw\} = \\ &= \operatorname{Re}\{iP'(w, \zeta) P'(w, z) th(w) dw\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассуждая теперь аналогично разделу 1 и используя (9), окончательно получаем

$$g^*(z, \zeta) - g(z, \zeta) = \operatorname{Re}\left\{ \frac{t}{2\pi i} \int_{\gamma} P'(w, \zeta) P'(w, z) h(w) dw \right\} + O(t^2), \quad |t| = \varepsilon \quad (10)$$

(ср. с формулой (1)). Отметим, что в силу конформной инвариантности функции Грина формула (10) справедлива и для области G , содержащей бесконечно удаленную точку.

Из (10) очевидным образом вытекает вариационная формула Адамара (1).

Получим теперь из равенства (10) вариационную формулу Шиффера (5). Пусть $z_0 \in G$, $t = e^{i2\phi}\rho^2$, $h(z) = 1/(z - z_0)$, $z^* = z_t = z + th(z)$. Функция h голоморфна в некоторой окрестности кривой γ , следовательно, мы можем воспользоваться равенством (10). Поскольку $P'(w, z) = -1/(w - z) + A(w, z)$, где функция $A = U'$ голоморфна в G , подынтегральное выражение в (10) имеет в G простые полюсы в точках $w = z, \zeta, z_0$ с вычетами $-1, -1, 1$ соответственно. Следовательно, по теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} P'(w, \zeta) P'(w, z) h(w) dw = -\frac{P'(\zeta, z)}{\zeta - z_0} - \frac{P'(z, \zeta)}{z - z_0} + P'(z_0, \zeta) P'(z_0, z). \quad (11)$$

Непосредственно из (10) и (11) вытекает вариационная формула Шиффера (5).

Избавимся теперь от требования аналитичности границы γ . А именно, докажем формулу (5) для области G , граница которой состоит из конечного числа произвольных континуумов²⁾. Пусть $z, \zeta \in K \Subset G$ и пусть $\{G_n\}$ – последовательность областей с аналитическими границами, исчерпывающая область G : $\bar{G}_n \subset G_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$. Для каждой из областей G_n формула (5) справедлива равномерно по $z, \zeta \in K \Subset G$ и $z_0 \in G$. Анализ доказательства, проведенного выше, показывает, что величины, входящие в остаточный член $O(t^2)$ в (10), зависят только от интегралов от гармонических функций и их производных, связанных с областью G_n . В силу того что значения вышеуказанных интегралов от гармонических функций не зависят от кривых интегрирования, мы можем в процессе предельного перехода $G_n \rightarrow G$ при $n \rightarrow \infty$ зафиксировать кривые, по которым ведется интегрирование, и считать, например, что интегрирование ведется по границе $\gamma_0 = \partial G_0$ некоторой начальной области G_0 . Тогда при $G_n \rightarrow G$ (в вышеуказанном смысле) все гармонические функции для G_n , входящие в $O(t^2)$, вместе со всеми своими производными равномерно на γ_0 сходятся к соответствующим функциям для G , так что величина $O(t^2)$ остается равномерно ограниченной для $z, \zeta \in K$. Для этих же z, ζ, z_0 величины, связанные с функцией Грина для области G_n , сходятся к соответствующим величинам для области G . Таким образом, из формулы (5) для области G_n путем предельного перехода мы получаем соответствующую вариационную формулу для функции Грина области G (с заменой $O(\rho^4)$ на $o(\rho^2)$).

Пусть теперь вне G заданы и зафиксированы некоторые точки $a_1, \dots, a_m$ (например, все $a_k \in \gamma$). Положим

$$A_m(z) = \prod_{k=1}^m (z - a_k), \quad q_{\mu}(z) = \prod_{j=0}^{\mu} (z - z_j),$$

где $z_0, z_1, \dots, z_{\mu}$ – произвольные различные точки области G , $\mu \geq m + 1$. Пусть $h(z) = A_m(z)/q_{\mu}(z)$, тогда вариация $z \mapsto z_t = z + th(z)$ удовлетворяет вышеперечисленным условиям и оставляет неподвижными точки $a_1, \dots, a_m$. Такая вариация рассматривается как композиция вариаций Шиффера и естественным образом возникает при изучении проблемы модулей [16]. Из формулы (10), используя теорему

²⁾Ясно, что приводимые рассуждения, основанные на предельном переходе, справедливы для произвольной области G .

о вычетах, получаем (ср. с равенством (6))

$$g^*(z^*, \zeta^*) - g(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left\{ t \sum_{j=0}^{\mu} \frac{P'(z_j, \zeta) P'(z_j, z) A_m(z_j)}{q'_\mu(z_j)} \right\} + O(t^2) \quad (12)$$

при $z, \zeta \in K \Subset G$. С помощью предельного перехода, как и выше, устанавливается справедливость формулы (12) для конечносвязной области с произвольной границей (с заменой $O(t^2)$ на $o(t)$; разумеется так же, как и в работе [16], некоторые из точек z_j можно было бы взять и вне области G , тогда в окончательной формуле (12) они бы просто отсутствовали).

Пусть, наконец, все точки z_j совпадают: $z_j = z_0 \in G$, $j \geq 1$, и, соответственно, $q_\mu(z) = (z - z_0)^{\mu+1}$. Тогда вместо (12) получаем

$$g^*(z^*, \zeta^*) - g(z, \zeta) = \frac{1}{\mu!} \operatorname{Re} \left\{ t (P'(w, \zeta) P'(w, z) A_m(w))^\mu \Big|_{w=z_0} \right\} + O(t^2) \quad (13)$$

при $z, \zeta \in K \Subset G$. Справедливость данной формулы для конечносвязной области с произвольной границей устанавливается путем предельного перехода, как и выше. Вариация функции Грина вида (13) успешно применялась в различных задачах математической физики и теории аппроксимаций [12], [13], [20]–[22].

Отметим, что в стандартных обозначениях функционального анализа формула (10) принимает следующий вид (ср. с работой [6]):

$$\delta_\phi g(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\phi}}{2\pi i} \int_\gamma P'(w, \zeta) P'(w, z) h(w) dw \right\},$$

где $t = \varepsilon e^{i\phi}$, $\delta_\phi g(z, \zeta)$ – вариация функции Грина “по направлению” ϕ .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получена достаточно общая вариационная формула (10) для функции Грина, из которой вытекают, в частности, классические вариационные формулы Адамара (1) и Шиффера (5).

Благодарности. Автор поддержан РФФИ (грант № 11-01-00330_а) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-8033.2010.1).

Список литературы

- [1] J. Hadamard, “Mémoire sur le problème d’analyse relatif à l’équilibre des plaques élastiques encastrées”, *Mémoires des savants étrangers*, **33**, l’Acad. Sci., Paris, 1908, 1–128; *Œuvres de Jacques Hadamard*, v. 2, CNRS, Paris, 1968, 515–631.
- [2] M. Schiffer, *Amer. J. Math.*, **68**:3 (1946), 417–448.
- [3] J. Hadamard, *Œuvres de Jacques Hadamard*, tome II, Comité de publication des oeuvres de Jacques Hadamard, eds. M. Fréchet, P. Levy, S. Mandelbrojt, L. Schwartz, CNRS, Paris, 1968.
- [4] S. E. Warschawski, *J. Math. Mech.*, **9** (1960), 497–511.
- [5] P. R. Garabedian, M. Schiffer, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 187–238.
- [6] М. Шиффер, “Некоторые новые результаты в теории конформных отображений”, в кн.: Р. Курант, *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности*, ИЛ, М., 1953, 234–301.

- [7] E. Schippers, W. Staubach, *Israel J. Math.*, **173**:1 (2009), 279–303.
- [8] A. Marshakov, P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.*, **227**:1 (2002), 131–153, arXiv: hep-th/0109048.
- [9] I. Krichever, M. Mineev-Weinstein, P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Physica D*, **198**:1–2 (2004), 1–28.
- [10] I. Krichever, A. Marshakov, A. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.*, **259**:1 (2005), 1–44, arXiv: hep-th/0309010.
- [11] A. Zabrodin, *Random matrices and Laplacian growth*, arXiv:0907.4929, 2009.
- [12] A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, “On asymptotic behavior of Heine–Stieltjes and Van Vleck polynomials”, *Recent Trends in Orthogonal Polynomials and Approximation Theory*, Contemp. Math., **507**, AMS, Providence, RI, 2010, 209–232.
- [13] A. Martínez-Finkelshtein, E. Rakhmanov, *Commun. Math. Phys.*, **302**:1 (2011), 53–111, arXiv: 0902.0193.
- [14] М. Шиффер, Д. К. Спенсер, *Функционалы на конечных римановых поверхностях*, ИЛ, М., 1957.
- [15] J. A. Jenkins, *Ann. Math. (2)*, **66**:3 (1957), 440–453.
- [16] Г. В. Кузьмина, Тр. МИАН СССР, **139**, 1980, 3–241.
- [17] В. Н. Дубинин, *УМН*, **49**:1(295) (1994), 3–76.
- [18] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.
- [19] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, **259**, Springer, New York, 1983.
- [20] S. Kamvissis, E. A. Rakhmanov, *J. Math. Phys.*, **46**:8 (2005), 083505, 24 pp.
- [21] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 3–36.
- [22] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *УМН*, **66**:1(397) (2011), 183–184.
- [23] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011), 113–136.
- [24] Е. А. Перевозникова, Е. А. Рахманов, *Вариация равновесной энергии и S-свойство компактов минимальной емкости*, Препринт, МИАН, М., 1994.

Поступила в редакцию 23.03.2011