Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, О разрушении решений трехмерного уравнения Розенау–Бюргерса, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 3, 342–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6771>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:44:05

© 2012 г.

М. О. Корпусов*

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ РОЗЕНАУ–БЮРГЕРСА

Рассмотрена начально-краевая задача для широко известного трехмерного уравнения Розенау–Бюргерса в цилиндре $(0, L) \otimes \mathbb{S}$, где $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^2$, при некоторых граничных условиях. С использованием метода пробных функций получен результат о разрушении решений этой начально-краевой задачи за конечное время. Это один из первых результатов в направлении “blow up” для этого уравнения.

Ключевые слова: разрушение за конечное время, нелинейные уравнения соболевского типа, нелинейные смешанные краевые задачи, гидродинамика, полупроводники, уравнение Розенау–Бюргерса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим начально-краевую задачу для следующего трехмерного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta^2 u + u) - \Delta u - \mu \frac{\partial}{\partial x_1} |u|^{p+1} = 0, \quad \mu > 0, \quad p > 0,$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta^2 \equiv \Delta \Delta,$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad \Omega = (0, L) \otimes \mathbb{S}, \quad x_1 \in (0, L), \quad (x_2, x_3) \in \mathbb{S},$$

где $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial \mathbb{S} \in \mathbb{C}^{4, \delta}$ при $\delta \in (0, 1]$.

В 1989 г. в работе [1] было предложено уравнение для описания волн на “мелкой” воде вида

$$u_{xxxxt} + u_t - u_{xx} - \mu(|u|^{p+1})_x = 0, \quad (1)$$

которое отличается от обобщенного уравнения Бюргерса $u_t - u_{xx} - \mu(|u|^{p+1})_x = 0$ наличием дополнительного сильно диссипативного слагаемого u_{xxxxt} . Однако за всю историю изучения уравнения (1), которое получило название уравнения Розенау–Бюргерса, не было получено достаточных условий разрушения его решения, хотя для родственного уравнения Камассы–Холма [2]

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: korpusov@gmail.com

результат об опрокидывании решения был получен [3]. Отметим, кроме того, что для регуляризованного уравнения Розенау $u_t + uu_x = Q * u - u$, где $Q = e^{-|x|}/2$, результат об опрокидывании решения был получен в работах [4], [5].

В настоящей работе получены достаточные условия разрушения решения начально-краевой задачи для уравнения Розенау–Бюргерса. При этом мы используем мощный метод пробных функций, который был развит в работах [6]–[11]. Метод нелинейной емкости и метод пробных функций уже был успешно применен в работах [8], [10], [11] для доказательства разрушения решения начально-краевых задач в ограниченных и неограниченных областях для уравнения Курамoto–Сивашинского

$$u_t + \Delta^2 u + \Delta u + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 = 0.$$

Для наших целей мы используем методику работ [6], [10]. В работах [12]–[14] рассматривались начальные и смешанные задачи для уравнения Розенау–Бюргерса, были получены результаты о глобальной во времени разрешимости этого уравнения и изучено асимптотическое поведение его решений при больших временах. Наконец, в работе [15] было предложено многомерное обобщение уравнения Розенау–Бюргерса с источниками, в котором $u(x, t)$ имеет физический смысл потенциала электрического поля, и, кроме того, получены достаточные условия разрушения решений некоторых начально-краевых задач. При этом использовался метод, предложенный в работах [16], [17].

Отметим, что существуют три основных метода исследования возникновения разрушения: метод нелинейной емкости Похожаева и Митидиери [7], энергетический метод Левина [16]–[18] и, наконец, метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения, который был развит в работах Самарского, Галактионова, Курдюмова и Михайлова [9] (см. также работу [6]).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В силу важности уравнения Розенау–Бюргерса с точки зрения физических приложений мы приведем вывод этого уравнения в теории кристаллических полупроводников [15] и объясним физический смысл используемых в следующем разделе граничных условий.

Рассмотрим электрическую часть системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, которая имеет поверхностно односвязную границу $\partial\Omega$:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -n, \quad \mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{D}$ – вектор индукции электрического поля, $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{P}$ – вектор поляризации среды, n – плотность свободных зарядов, а $\hat{\varepsilon}$ – дифференциальный оператор, учитывающий пространственную дисперсию. Мы воспользуемся стандартным его видом

$$\hat{\varepsilon} w(x) = -\varepsilon_0 \Delta w(x), \quad \varepsilon_0 > 0. \quad (3)$$

Теперь заметим, что по своему физическому смыслу величина

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = \rho \quad (4)$$

есть плотность так называемых связанных зарядов.

Рассмотрим кристаллический полупроводник, помещенный во внешнее постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_0$, причем выберем ортогональный репер $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ декартовой системы координат так, чтобы напряженность внешнего поля имела вид

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_1. \quad (5)$$

В кристаллическом полупроводнике как в проводящей среде имеет место следующее уравнение:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (6)$$

где $\mathbf{J}$ есть вектор тока свободных зарядов. Справедливо следующее соотношение, связывающее этот вектор с вектором $\mathbf{E}$ напряженности электрического поля:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + eh(\phi) \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi, \quad \sigma > 0, \quad (7)$$

где функция $h(\phi)$ описывает квазистационарное распределение плотности свободных зарядов и поэтому должна быть неотрицательной, а e – заряд электрона. Зададим в явном виде функции $h(\phi)$ из соотношений (7) и $\rho(\phi)$ из формулы (4):

$$h(\phi) = h_0 |\phi|^{p+1}, \quad \rho = \rho_0 \phi, \quad h_0 > 0, \quad \rho_0 > 0, \quad p > 0. \quad (8)$$

Дифференциальным следствием системы уравнений (2)–(8) является уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \Delta^2 \phi + \rho_0 \phi) - \sigma \Delta \phi + eh_0 E_0 \frac{\partial}{\partial x_1} |\phi|^{p+1} = 0,$$

которое легко сводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta^2 \phi + \phi) - \Delta \phi - \mu \frac{\partial}{\partial x_1} |\phi|^{p+1} = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad (9)$$

причем в нашем случае $\mu > 0$.

Обсудим теперь различные виды граничных условий. Условие $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ означает, что граница полупроводника $\partial\Omega$ заземлена (по договоренности электрический потенциал Земли считается равным нулю). Поскольку $\mathbf{E} = -\nabla \phi$, задание нормальной производной

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_x} \right|_{\partial\Omega} = -(\mathbf{E}, \mathbf{n}_x)|_{\partial\Omega}$$

означает задание нормальной компоненты электрического поля на границе, что является естественным условием. Если мы задаем $\Delta \phi|_{\partial\Omega}$, то это означает, что задана плотность свободных зарядов на границе области. Наконец, можно рассматривать случай, когда на границе задана нормальная компонента $(\mathbf{D}, \mathbf{n}_x)|_{\partial\Omega}$ вектора индукции электрического поля $\mathbf{D}$. С учетом (2) и (3) это означает, что фактически задается следующая величина:

$$\Delta \left. \frac{\partial \phi}{\partial n_x} \right|_{\partial\Omega}.$$

Таким образом, все граничные условия, используемые в следующем разделе, имеют естественный физический смысл. Отметим, что физический смысл разрушения решения уравнения (9) – это экспериментально наблюдаемый электрический “пробой” в кристаллическом полупроводнике.

3. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу, для которой мы будем доказывать наличие разрушения решений:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta^2 u + u) - \Delta u - \mu \frac{\partial}{\partial x_1} |u|^{p+1} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (10)$$

$$u|_{\partial \mathbb{S}} = \Delta_2 u|_{\partial \mathbb{S}} = 0, \quad \Delta_2 u = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad (x_1, t) \in (0, L) \otimes (0, T); \quad (11)$$

$$[Lu'_{x_1 x_1 x_1}(x, t) + u'_{x_1 x_1}(x, t) - Lu_{x_1}(x, t) - 2\lambda_1 Lu'_{x_1}(x, t)]_{x_1=0} = 0; \quad (12)$$

$$u(x, t)|_{x_1=0} = u(x, t)|_{x_1=L} = 0, \quad u_{x_1 x_1}(x, t)|_{x_1=L} = 0 \quad \text{при } (x_2, x_3, t) \in \mathbb{S} \otimes (0, T). \quad (13)$$

Здесь $Q_T = (0, T) \otimes \Omega$, $\Omega = (0, L) \otimes \mathbb{S}$, $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial \mathbb{S} \in \mathbb{C}^{(4, \delta)}$ при $\delta \in (0, 1]$. В уравнении (12) штрихом обозначена производная по времени, а λ_1 – первое собственное значение задачи

$$\Delta_2 \psi_1(x_2, x_3) + \lambda_1 \psi_1(x_2, x_3) = 0, \quad \psi_1|_{\partial \mathbb{S}} = 0, \quad (x_2, x_3) \in \mathbb{S}, \quad (14)$$

где $\psi_1(x_2, x_3)$ – соответствующая неотрицательная первая собственная функция, которую мы выберем нормированной на единицу,

$$\int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) dx_2 dx_3 = 1,$$

причем в силу условий на $\partial \mathbb{S}$ имеем $\psi_1(x_2, x_3) \in \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S}) \cap \mathbb{H}^2(\mathbb{S})$.

Будем рассматривать решения начально-краевой задачи (10)–(13) в классе $\mathbb{C}^{(1)}((0, T]; \mathbb{C}^{(4)}([0, L] \otimes \mathbb{S}))$ при некотором $T > 0$, а начальное условие понимать в следующем слабом смысле:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+0} \int_0^L \int_{\mathbb{S}} (L - x_1) \psi_1(x_2, x_3) u(x, t) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = \int_0^L \int_{\mathbb{S}} (L - x_1) \psi_1(x_2, x_3) u_0(x) dx_1 dx_2 dx_3, \quad u_0(x) \in \mathbb{L}^1(\Omega). \end{aligned}$$

Перепишем теперь уравнение (10) в более удобном виде

$$\Delta_2^2 u' + 2\partial_{x_1}^2 \Delta_2 u' - \Delta_2 u + u'_{x_1 x_1 x_1 x_1} + u' - u_{x_1 x_1} - \mu(|u|^{p+1})_{x_1} = 0. \quad (15)$$

Умножим обе его части на функцию $\psi(x_1, x_2, x_3) = (L - x_1)\psi_1(x_2, x_3)$ и проинтегрируем по области $\Omega = (0, L) \otimes \mathbb{S}$. Рассмотрим первое слагаемое уравнения (15):

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{\mathbb{S}} (L - x_1) \psi_1(x_2, x_3) \Delta_2^2 u' dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = \lambda_1^2 \int_0^L \int_{\mathbb{S}} (L - x_1) \psi_1(x_2, x_3) u' dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (16)$$

где мы воспользовались однородными условиями Навье (11) и задачей (14) для функции $\psi_1(x_2, x_3)$. Рассмотрим второе слагаемое. В силу граничных условий Навье (11)

$$\begin{aligned} 2 \int_0^L \int_{\mathbb{S}} (L - x_1) \psi_1(x_2, x_3) \partial_{x_1}^2 \triangle_2 u' dx_1 dx_2 dx_3 &= \\ &= -2\lambda_1 \int_0^L \int_{\mathbb{S}} (L - x_1) \psi_1(x_2, x_3) u'_{x_1 x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) [2\lambda_1 L u'_{x_1}(0, x_2, x_3, t) - 2\lambda_1 u'(L, x_2, x_3, t) + \\ &\quad + 2\lambda_1 u'(0, x_2, x_3, t)] dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим теперь третье слагаемое:

$$\begin{aligned} - \int_0^L \int_{\mathbb{S}} (L - x_1) \psi_1(x_2, x_3) \triangle_2 u dx_1 dx_2 dx_3 &= \\ &= \lambda_1 \int_0^L \int_{\mathbb{S}} (L - x_1) \psi_1(x_2, x_3) u dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (18)$$

где мы воспользовались первым граничным условием из условий Навье (11). Рассмотрим четвертое слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) u'_{x_1 x_1 x_1 x_1} (L - x_1) dx_1 dx_2 dx_3 &= \\ &= \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) [-L u'_{x_1 x_1 x_1}(0, x_2, x_3, t) + \\ &\quad + u'_{x_1 x_1}(L, x_2, x_3, t) - u'_{x_1 x_1}(0, x_2, x_3, t)] dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь мы рассмотрим шестое слагаемое. Имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} - \int_0^L \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) u_{x_1 x_1} (L - x_1) dx_1 dx_2 dx_3 &= \\ &= \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) [L u_{x_1}(0, x_2, x_3, t) - u(L, x_2, x_3, t) + u(0, x_2, x_3, t)] dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Наконец, рассмотрим седьмое слагаемое:

$$\begin{aligned} -\mu \int_0^L \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) (L - x_1) (|u|^{p+1})_{x_1} dx_1 dx_2 dx_3 &= \\ &= \mu L \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) |u|^{p+1}(0, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3 - \\ &\quad - \mu \int_0^L \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) (L - x_1) |u|^{p+1} dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Соберем все слагаемые, отвечающие граничным условиям в точках $x_1 = 0$ и $x_1 = L$ и получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) [2\lambda_1 L u'_{x_1}(0, x_2, x_3, t) - 2\lambda_1 u'(L, x_2, x_3, t) + 2\lambda_1 u'(0, x_2, x_3, t) - \\ & - L u'_{x_1 x_1 x_1}(0, x_2, x_3, t) + u'_{x_1 x_1}(L, x_2, x_3, t) - u'_{x_1 x_1}(0, x_2, x_3, t) + L u_{x_1}(0, x_2, x_3, t) - \\ & - u(L, x_2, x_3, t) + u(0, x_2, x_3, t) + \mu L |u|^{p+1}(0, x_2, x_3, t)] dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (22)$$

которое в силу граничных условий (12), (13) равно нулю. Таким образом, с учетом равенств (16)–(22) мы имеем как следствие уравнения (15) следующее соотношение:

$$(1 + \lambda_1^2) \frac{dJ_1(t)}{dt} + \lambda_1 J_1(t) = \mu \int_0^L \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) |u|^{p+1} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (23)$$

где

$$J_1(t) \equiv \int_0^L \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) (L - x_1) u(x, t) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Введем обозначение

$$J(x_2, x_3, t) = \int_0^L (L - x_1) u(x, t) dx_1$$

и заметим, что из равенства (23) вытекает неравенство

$$(1 + \lambda_1^2) \frac{dJ_1(t)}{dt} + \lambda_1 J_1(t) \geq \mu \int_0^L \int_{\mathbb{S}} \frac{L - x_1}{L} \psi_1(x_2, x_3) |u|^{p+1} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (24)$$

Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |J| & \leq \int_0^L (L - x_1) |u| dx_1 \leq \int_0^L (L - x_1)^{1/(p+1)} |u| (L - x_1)^{p/(p+1)} dx_1 \leq \\ & \leq \left(\int_0^L (L - x_1) |u|^{p+1} dx_1 \right)^{1/(p+1)} \left(\int_0^L (L - x_1) dx_1 \right)^{p/(p+1)} = \\ & = \left(\frac{L^2}{2} \right)^{p/(p+1)} \left(\int_0^L (L - x_1) |u|^{p+1} dx_1 \right)^{1/(p+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда мы сразу же получаем неравенство

$$\int_0^L (L - x_1) |u|^{p+1} dx_1 \geq \left(\frac{2}{L^2} \right)^p |J|^{p+1}. \quad (25)$$

Из неравенств (24) и (25) вытекает, что

$$(1 + \lambda_1^2) \frac{dJ_1(t)}{dt} + \lambda_1 J_1(t) \geq k \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3) |J(x_2, x_3, t)|^{p+1} dx_2 dx_3,$$

где $k = (\mu/L)(2/L^2)^p$. Отсюда, используя неравенство Йенсена (см. например, монографию [19]) и условие нормировки функции $\psi_1(x_2, x_3)$, получаем искомое обыкновенное дифференциальное неравенство

$$(1 + \lambda_1^2) \frac{dJ_1(t)}{dt} + \lambda_1 J_1(t) \geq k |J_1(t)|^{p+1}.$$

Это неравенство легко интегрируется, и мы в результате приходим к следующей оценке снизу:

$$J_1(t) \geq \frac{e^{-\alpha t}}{[J_1^{-p}(0) - (\beta/\alpha)(1 - e^{-p\alpha t})]^{1/p}} \quad \text{при} \quad J_1(0) > \left(\frac{\lambda_1}{k}\right)^{1/p},$$

где

$$\beta = \frac{\mu}{(1 + \lambda_1^2)L} \left(\frac{2}{L^2}\right)^p, \quad \alpha = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1^2}.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнено начальное условие

$$J_1(0) > \left(\frac{\lambda_1}{k}\right)^{1/p}, \quad k = \frac{\mu}{L} \left(\frac{2}{L^2}\right)^p,$$

тогда классическое решение задачи (10)–(13) не существует глобально во времени. А именно, найдется такое T_∞ , для которого выполнена оценка сверху

$$T_\infty \leq -\frac{1 + \lambda_1^2}{p\lambda_1} \ln \left(1 - J_1^{-p}(0) \frac{\lambda_1}{k}\right),$$

причем имеет место предельное равенство $\lim_{t \uparrow T_\infty} J_1(t) = +\infty$, где

$$J_1(t) = \int_0^L \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3)(L - x_1)u(x, t) dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$J_1(0) = \int_0^L \int_{\mathbb{S}} \psi_1(x_2, x_3)(L - x_1)u_0(x) dx_1 dx_2 dx_3.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для классических однородных условий Дирихле–Неймана решение трехмерного уравнения Розенау–Бюргерса при $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ существует глобально во времени в классе функций $u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, +\infty); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$. Очевидно, что никакого разрушения его решения нет, поэтому естественно искать “blow up” среди неклассических граничных условий или для начальных функций $u_0(x) \notin \mathbb{H}^2(\Omega)$.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 11-01-12018-офи_м) и Программой поддержки молодых ученых – докторов наук (грант МД-99.2009.1).

Список литературы

- [1] Ph. Rosenau, *Phys. Rev. A*, **40**:12 (1989), 7193–7196.
- [2] R. Camassa, D.D. Holm, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:11 (1993), 1661–1664, arXiv: parr-sol/9305002.
- [3] A. Constantin, J. Escher, *Acta Math.*, **181**:2 (1998), 229–243.
- [4] C. Escudero, *Phys. Rev. E*, **71**:4 (2005), 047302, 3 pp.
- [5] H. Liu, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **13**:3 (2006), 441–466.
- [6] В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846.
- [7] Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.

- [8] С. И. Похожаев, *Матем. сб.*, **199**:9 (2008), 97–106.
- [9] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.
- [10] V. A. Galaktionov, E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, *Nonlinear Anal.*, **70**:8 (2009), 2930–2952.
- [11] S. I. Pohozaev, *Milan J. Math.*, **77**:1 (2009), 127–150.
- [12] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, *Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **1884**, Springer, Berlin, 2006.
- [13] L. Liu, M. Mei, *Appl. Math. Comput.*, **131**:1 (2002), 147–170.
- [14] M. A. Park, *Nonlinear Anal.*, **21**:1 (1993), 77–85.
- [15] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
- [16] H. A. Levine, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**:5 (1973), 371–386.
- [17] H. A. Levine, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.
- [18] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **69**, Наука, Ленинград. отд., Л., 1977, 77–102.
- [19] Л. К. Эванс, *Уравнения с частными производными*, Университетская серия, **7**, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2003.

Поступила в редакцию 11.04.2011