Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Тянь Шоу-Фу, Чжан Хун-Цин, Периодические волновые решения, выражаемые через супер-тета-функции Римана, и рациональные характеристики для суперсимметричного уравнения КдФ–Бюргерса, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 3, 350–380

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6772>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 04:43:43

© 2012 г.

Тянь Шоу-Фу^{*†}, Чжан Хун-Цин^{*}

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ, ВЫРАЖАЕМЫЕ ЧЕРЕЗ СУПЕР-ТЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА, И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ КДФ–БЮРГЕРСА

С использованием многомерной супер-тета-функции Римана предложены две ключевые теоремы для явного построения периодических волновых решений в виде мультипериодических супер-тета-функций Римана для суперсимметричных уравнений в суперпространстве $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1,M}$, представляющие собой ясное и непосредственное обобщение метода супер-Хироты–Римана. Коль скоро суперсимметричное уравнение записано в билинейной форме, можно непосредственно получить его периодические волновые решения в виде супер-тета-функции Римана, используя две предложенные теоремы. В качестве применения представлено суперсимметричное уравнение Кортевега–де Фриза–Бюргерса. Подробно исследована предельная процедура и строго установлены асимптотическое поведение мультипериодических волн и соотношения между периодическими волновыми решениями и солитонными решениями. Кроме того, получено, что в отличие от чисто бозонного случая имеет место интересное явление, случающееся с периодическими волнами в виде супер-тета-функции Римана в присутствии грасмановой переменной. Периодические волны, выражаемые супер-тета-функциями Римана, симметричны относительно зоны, но убывают вдоль нее. Более того, результаты можно распространить на случай $N > 2$, здесь же рассмотрены только условия существования N -периодического волнового решения общего суперсимметричного уравнения.

Ключевые слова: суперсимметричное уравнение Кортевега–де Фриза–Бюргерса, билинейная суперформа Хироты, тета-функция Римана, периодическое волновое решение в виде супер-тета-функции Римана, волновое решение.

---

^{*}School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian, China.
E-mail: shoufu2006@126.com, shoufu@math.ubc.ca

[†]Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, Canada

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, алгебро-геометрический подход дает квазипериодические или алгебро-геометрические решения многих солитонных уравнений, которые исходно были получены для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) на основании обратной спектральной задачи и алгебро-геометрического метода, развитых в основополагающих работах Новикова, Дубровина, Маккина, Лакса, Итса, Матвеева и их соавторов [1]–[5] в конце 1970-х гг. Такое решение представляет собой выражение, записанное в терминах тета-функций Римана. Ввиду квазипериодичности тета-функций оно также называется квазипериодическим (периодическое волновое решение, выражающееся через тета-функции Римана). В настоящее время данная теория распространена на широкий класс нелинейных интегрируемых уравнений, включая уравнение синус-Гордон, уравнение Камассы–Холма, уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП), решеточное уравнение Абловица–Ладика и решеточное уравнение Тоды [6]–[14]. Все основные физические характеристики квазипериодических решений (волновые числа, фазовые скорости, амплитуды взаимодействующих мод) определяются компактной римановой поверхностью. Однако гораздо труднее непосредственно определить эти характеристические параметры, используя алгебро-геометрическую теорию. Алгебро-геометрическая теория требует использования пар Лакса и сложных вычислений на римановых поверхностях. Достаточно сложно непосредственно определить характеристические параметры волн такие, как частоты и фазовые сдвиги, как функции заданных волновых чисел и амплитуд. С другой стороны, метод билинейной производной, развитый Хиротой, представляет собой мощный подход к построению точного решения нелинейных уравнений. Коль скоро нелинейное уравнение записано в билинейной форме с помощью преобразования зависимой переменной, обычно получаются многосолитонные решения [15]–[19]. В 1980-х г. г., основываясь на существовании формы Хироты, Накамура предложил удобный способ построения чего-то вроде квазипериодических решений нелинейных уравнений [20]–[22]; при этом были получены периодические волновые решения уравнения КдФ и уравнения Буссинеска. Такой метод действительно обладает рядом преимуществ по сравнению с алгебро-геометрическими методами. Например, он не требует никаких пар Лакса и римановых поверхностей для рассматриваемого уравнения и допускает явное построение мультипериодических волновых решений лишь на основе существования билинейной формы Хироты; кроме того, все параметры, появляющиеся в матрице Римана, являются произвольными. Недавно авторами работ [23]–[31] были исследованы дискретное решеточное уравнение Тоды, $(2 + 1)$ -мерное уравнение КП, уравнение Богоявленского для опрокидывания солитонов, асимметричное уравнение Нижника–Новикова–Веселова и т. д. В действительности имеются некоторые различия между квазипериодическими и алгебро-геометрическими решениями. Не требуется, чтобы квазипериодическое решение было алгебро-геометрическим. Иногда квазипериодическое решение может не соответствовать никакой римановой поверхности и быть в общем положении связано с бесконечной зоной, а не просто с конечным числом зон, например, с римановой поверхностью бесконечного рода.

Хорошо известно, что концепция суперсимметрии была исходно введена и разработана 30 лет назад для применения в физике элементарных частиц [32], [33]. Оказалось, что суперсимметрию можно применять к разнообразным задачам таким, как

релятивистская и нерелятивистская физика, а также ядерная физика. В последнее время большой интерес к суперсимметрии проявляют как физики, так и математики. Математическая формулировка суперсимметрии основана на введении грасмановых переменных наряду со стандартными [34]. Таким образом, некоторое количество хорошо известных уравнений математической физики было обобщено до их суперсимметричных аналогов таких, как суперсимметричные варианты уравнений синус-Гордон, КдФ, КП-иерархии, Буссинеска и т. д. [35]–[44]. Было показано, что эти суперсимметричные интегрируемые системы обладают бигамильтоновой структурой, свойствами Пенлеве, бесконечным числом симметрий, преобразованиями Дарбу, преобразованиями Беклунда, билинейной формой и многосолитонными решениями. Систематическое переписывание суперсимметричных уравнений в билинейной форме было введено в работах [38], [39]. Это требовало расширения билинейного оператора Хироты на суперсимметричный случай. Несмотря на билинеаризацию суперсимметричных уравнений, стандартное построение не приводило к многосолитонным решениям. В последнее время авторы работ [38]–[44] далеко продвинулись в построении солитонных решений суперсимметричных уравнений.

Недавно, основываясь на методе двухсингулярного многообразия, мы получили автопреобразование Беклунда, пары Лакса, преобразование Дарбу и некоторые периодические решения $(2 + 1)$ -мерных неизоспектральных уравнений КП и модифицированных уравнений КП (мКП) с самосогласованными источниками [45], [46]. Более того, в работах [30] и [31] мы привели некоторые результаты, касающиеся явного построения периодических волновых решений в виде мультипериодической тета-функции Римана соответственно для некоторых дискретных солитонных уравнений и нелинейных уравнений, что дает ясное и непосредственное обобщение метода Хироты–Римана. В настоящей работе мы рассматриваем построение периодических волновых решений суперсимметричных уравнений в виде супер-тета-функции Римана (СТФР), которые можно рассматривать как обобщение солитонных решений. Предложены две ключевые теоремы для явного построения периодических волновых решений в виде мультипериодической STFР для суперсимметричного уравнения в суперпространстве $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1,M}$, что представляет собой ясное и непосредственное обобщение метода супер-Хироты–Римана.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы кратко описываем некоторые концепции и свойства суперпространства $\mathbb{R}_\Lambda^{m,n}$. В разделе 3 мы напоминаем о некоторых свойствах билинейных операторов супер-Хироты и вводим многомерную STFР на суперпространстве $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1,M}$, а также обсуждаем ее квазипериодичность. В разделе 4 на основании билинейной формы супер-Хироты и STFР мы приводим две ключевые теоремы для построения одно- и двухпериодических волновых решений в виде STFР для суперсимметричного уравнения (4.1). Однопериодические волны можно рассматривать как параллельную суперпозицию пересекающихся односолитонных волн, расположенных на расстоянии одного периода, при этом их поверхностные картины одномерны. Двухпериодические волны являются прямым обобщением однопериодических, их поверхностная картина двумерна, так что они имеют два независимых пространственных периода в двух независимых горизонтальных направлениях. В разделе 5 наш метод мы применяем к суперсимметричному уравнению КдФ–Бюргера (сКдФБ). Кроме того, далее мы подробно анализируем характерные особенности и асимптотическое поведение однопериодического и двухпериодического волновых решений, проводя предельную процедуру, которая

строго показывает, что в пределе малой амплитуды периодические решения стремятся к известным солитонным решениям. Наконец, мы теоретически рассматриваем N -периодические волновые решения для суперсимметричного уравнения (4.1) в теории. Кроме того, приводятся некоторые другие заключения и обсуждения.

2. СУПЕРПРОСТРАНСТВО $\mathbb{R}_\Lambda^{m,n}$

В настоящем разделе мы дадим краткое описание некоторых концепций и свойств суперпространства $\mathbb{R}_\Lambda^{m,n}$, которое обобщает $\mathbb{R}^m$, и областей в нем. Подробности суперанализа можно найти, например, в работах [47], [48].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть Λ – векторное пространство с заданным разложением в прямую сумму подпространств Λ_0 и Λ_1 :

$$\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1.$$

Тогда Λ называется $\mathbb{Z}_2$ -градуированным пространством. Мы полагаем, что Λ_0 – подпространство, состоящее из четных элементов, а Λ_1 – подпространство, состоящее из нечетных элементов. Для элемента $f \in \Lambda$, определенного с помощью его четной и нечетной компонент f_0 и f_1 , функция четности p вводится на Λ , а именно

$$p(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \in \Lambda_0, \\ 1, & \text{если } f \in \Lambda_1. \end{cases}$$

Аннуляторное множество нечетных элементов определяется, если положить ${}^\perp\Lambda = \{f \in \Lambda: f\Lambda_1 = 0\}$. Введем супералгебру как $\mathbb{Z}_2$ -градуированное пространство $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$, в котором введена структура ассоциативной алгебры с единицей e и четным умножением, т.е. произведение двух четных и двух нечетных элементов есть четный элемент, а произведение четного и нечетного элементов есть нечетный элемент: $p(fg) = p(f) + p(g) \bmod 2$, где $f, g \in \Lambda$. Говорят, что супералгебра Λ коммутативна, если суперкоммутатор

$$[f, g] = fg - (-1)^{p(f)p(g)} gf$$

обращается в нуль для произвольных однородных элементов $f, g \in \Lambda$. Таким образом, четные элементы и элементы различной четности коммутируют, тогда как нечетные элементы антикоммутируют. В частности, если $\theta \in \Lambda_1$, то из суперкоммутатора $[f, g]$ следует, что $\theta^2 = 0$.

Коммутативная грассманова супералгебра $G(n)$ с единицей e называется конечномерной грассмановой алгеброй, если она содержит систему антикоммутирующих генераторов $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ со свойствами $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, в частности $\sigma_i^2 = 0$. Грассманову алгебру будем обозначать как $G_n = G_n(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_n})$. Мономы $\{e_0, e_i = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\dots\sigma_{i_n}\}$, $i = (i_1 < i_2 < \dots < i_n)$ образуют базис в грассмановой алгебре G_n , $\dim G_n = 2^n$. Ее произвольный элемент $\mathcal{F} \in G_n$ имеет вид линейной комбинации мономов: $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\dots\sigma_{i_m}$, $i = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, т.е.

$$\mathcal{F} = \sum_i f_i \sigma_i = f_0 e_0 + \sum_{m=1}^n \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} f_{i_1 i_2 \dots i_m} \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_m},$$

с коэффициентами $f_{i_1 i_2 \dots i_m} \in \mathbb{C}$. Подпространство Λ_0 (подпространство Λ_1) состоит из элементов $\mathcal{F}$, для которых каждый член разложения $\mathcal{F}$ содержит только четное (соответственно нечетное) число генераторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ – фиксированная коммутативная банахова супералгебра. Тогда банахово пространство

$$\mathbb{R}^{m,n} = \mathbb{R}_\Lambda^{m,n} = \underbrace{\Lambda_0 \times \Lambda_0 \times \cdots \times \Lambda_0}_m \times \underbrace{\Lambda_1 \times \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_1}_n = \Lambda_0^m \times \Lambda_1^n$$

называется суперпространством размерности (m, n) над Λ . В частности,

$$\mathbb{R}_\Lambda^{m,n} = \begin{cases} \mathbb{R}^m, & \text{если } \Lambda_0 = \mathbb{R} \text{ и } \Lambda_1 = 0, \\ \mathbb{C}^m, & \text{если } \Lambda_0 = \mathbb{C} \text{ и } \Lambda_1 = 0. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Предположим, что заданы два суперпространства $\mathbb{R}_\Lambda^{m,n}$ и $\mathbb{R}_{\Lambda'}^{m',n'}$ с нормами $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ соответственно, где $\Lambda \in \Lambda'$, и открытое множество $\mathcal{C}(\in \mathbb{R}_\Lambda^{m,n})$.

1. Говорят, что функция $f(X) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\Lambda'}^{m',n'}$ непрерывна в точке $X \in \mathcal{C}$, если

$$\lim_{\|H\| \rightarrow 0} \|f(X+H) - f(X)\| = 0,$$

где $X = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$, при этом компоненты x_i , $i = 1, 2, \dots, m$, – четные переменные, а $x_{m+j} = \theta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, – грассмановы нечетные. Кроме того, вектор $H = (h_1, h_2, \dots, h_m, h_{m+1}, \dots, h_{m+n})$, где $(h_1, h_2, \dots, h_m) \in \Lambda_0^m$ и $(h_{m+1}, h_{m+2}, \dots, h_{m+n}) \in \Lambda_1^n$. Обозначим множество функций, непрерывных в $\mathcal{C}$ и принимающих значения в $\mathbb{R}_{\Lambda'}^{m',n'}$, как $C(\mathcal{C}, \mathbb{R}_{\Lambda'}^{m',n'}) = C(\mathcal{C})$.

2. Говорят, что функция $f(X) : \mathcal{C} \rightarrow \Lambda'$ супердифференцируема в точке X в $\mathcal{C}$, если существуют элементы $F_i(X)$ в Λ , $i = 1, 2, \dots, m+n$, такие, что

$$f(X+H) = f(X) + \sum_{i=1}^{m+n} \langle F_i(X), h_i \rangle + o(X, H),$$

где

$$\lim_{\|H\| \rightarrow 0} \frac{\|o(X, H)\|}{\|H\|} = 0.$$

В этом случае $F_i(X)$ называются частными производными функции f по x_i в точке X и обозначаются соответственно как

$$F_i(X) = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial x_i},$$

$$F_{m+j}(X) = \frac{\partial f(X)}{\partial x_{m+j}} = \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где $X = (x_1, \dots, x_m, \dots, x_{m+n}) \triangleq (x_1, \dots, x_m, \theta_1, \dots, \theta_n) \triangleq (x, \theta)$ и $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Lambda_0^m$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \Lambda_1^n$. Производные $\partial f(X)/\partial x_i$ по четным переменным x_i , $i = 1, 2, \dots, m$, определены единственным образом. Но производные $\partial f(X)/\partial \theta_j$ по нечетным переменным $\theta_j = x_{m+j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, определены не единственным образом, а с точностью до аддитивной постоянной $c\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$, $c \in \mathbb{C}$, из аннулятора ${}^\perp G_n$ конечномерной грассмановой алгебры G_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Предположим, что функции $f(X)$ и $g(X)$ отображают $\mathcal{C} \in \mathbb{R}_\Lambda^{m,n}$ в $\Lambda' \supset \Lambda$ и являются супердифференцируемыми в точке $X \in \mathcal{C}$, а $g(X)$ – однородный элемент из Λ' (т.е. $g(X) \in \Lambda'_0$ или $g(X) \in \Lambda'_1$). Тогда имеется формула Лейбница для суперпроизводной:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [f(X)g(X)] = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} g(X) + (-1)^{p(x_i)p(f(X))} \frac{\partial g(X)}{\partial x_i} f(X), \quad i = 1, 2, \dots, m+n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\Lambda_1^n, \Lambda)$ – множество многочленов, определенных на Λ_1^n и принимающих значения в Λ , а $\tilde{\mathcal{P}}_n = \tilde{\mathcal{P}}_n(\Lambda_1^n, \Lambda)$ – множество соответствующих полиномиальных функций. Пусть $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_n(\Lambda)$ – множество мультииндексов $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$, $\epsilon_i = 0, 1$, для которых $\theta^\epsilon = \theta_1^{\epsilon_1} \theta_2^{\epsilon_2} \dots \theta_n^{\epsilon_n} \neq 0$. Будем говорить, что отображение $\mathcal{A}: \tilde{\mathcal{P}}_n \rightarrow \Lambda$, удовлетворяющее следующим условиям, является суперинтегралом по грассмановой переменной:

- 1) линейность (слева): $\mathcal{A}(\alpha f + \beta g) = f\mathcal{A}(\alpha) + g\mathcal{A}(\beta)$, $f, g \in \Lambda$, $\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{P}}_n$;
- 2) трансляционная инвариантность: $\mathcal{A}(f_\xi) = \mathcal{A}(f)$, где $f_\xi(\theta) = f(\theta + \xi)$, для всех $\xi \in \Lambda_1^n$, $f \in \tilde{\mathcal{P}}_n$.

Предположим, что такой интеграл $\mathcal{A}(f)$ существует. Обозначим $\mathcal{A}(\theta^\epsilon) = \mathcal{A}_\epsilon$, где $\epsilon \in \mathcal{G}_n$. В случае, когда $\mathcal{A}(\theta^\epsilon) = 0$, $|\epsilon| \leq n - 1$, $x_n \neq 0$, интеграл такого типа имеет вид

$$\mathcal{A}(f) = \mathcal{B}(f)\mathcal{A}(1, 1, \dots, 1),$$

где

$$\mathcal{B}(f) = \frac{\partial^n f(0)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2 \dots \partial \theta_n}.$$

Производная определяется вплоть до аддитивной постоянной из аннулятора ${}^\perp L_n$, $L_n = \{\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n, \theta \in \Lambda_1^n\}$, тогда $\mathcal{B}(f): \tilde{\mathcal{P}}_n \rightarrow \Lambda / {}^\perp L_n$ определяет однозначное отображение $\tilde{\mathcal{P}}_n$ в фактор-пространство $\Lambda / {}^\perp L_n$. Это отображение удовлетворяет условиям 1 и 2, поэтому мы также будем называть его интегралом и обозначать как

$$\mathcal{B}(f) = \int f(\theta) d\theta = \int \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n.$$

В приложении A приведены и некоторые другие свойства интеграла $\mathcal{B}(f)$, кроме условий 1 и 2.

3. БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА СУПЕР-ХИРОТЫ И СТФР

В настоящем разделе мы кратко напомним некоторые свойства билинейных операторов супер-Хироты и введем многомерную СТФР на суперпространстве $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1, M}$.

3.1. Билинейная форма супер-Хироты. Рассмотрим функции $N + 1$ обыкновенных четных переменных $x_1, x_2, \dots, x_N, t$ и M грассмановых нечетных переменных $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$. Ассоциированным пространством $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1, M} = \Lambda_0^{N+1} \times \Lambda_1^M$ (можно взять $\Lambda_0 = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) является суперпространство над грассмановой алгеброй $G_M(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) = G_{M,0} \oplus G_{M,1} \oplus \dots \oplus G(M, M)$, элементы которой имеют вид

$$f = f_0 e_0 + \sum_{k=1}^M \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}, \quad (3.1)$$

где $e_0 = e = 1$ – единица, а $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$ – антикоммутирующие генераторы. Мономы $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M\}$ образуют базис в $G_M(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$, $\dim G_M(\sigma) = C_M^0 + C_M^1 + \dots + C_M^M = 2^M$. В системе отсчета, двужущейся с волной в пространстве $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1, M}$, фазовая переменная должна иметь вид

$$\xi = kx_1 + lx_2 + \dots + \rho x_N + \omega t + \alpha \sigma_1 \theta_1 + \beta \sigma_2 \theta_2 + \dots + \gamma \sigma_M \theta_M, \quad (3.2)$$

где $k, l, \dots, \rho, \omega, \alpha, \beta, \dots, \gamma \in \mathbb{C}$.

Для функций $f(X, t, \theta)$, $g(X, t, \theta)$: $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1, M} \rightarrow \Lambda$ при $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ и $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M)$ билинейные дифференциальные операторы Хироты $D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}$ и D_t по обычным четным переменным $x_1, x_2, \dots, x_N, t$ определяются как

$$D_{x_1}^m D_{x_2}^n \dots D_{x_N}^p D_t^r f(X, t, \theta) \cdot g(X, t, \theta) = (\partial_{x_1} - \partial_{x'_1})^m (\partial_{x_2} - \partial_{x'_2})^n \dots \dots (\partial_{x_N} - \partial_{x'_N})^p (\partial_t - \partial_{t'})^r f(X, t, \theta) \cdot g(X', t', \theta') \Big|_{X=X', t=t', \theta=\theta'}. \quad (3.3)$$

Билинейный оператор супер-Хироты определяется как [38]

$$S^N f(X, t, \theta) \cdot g(X, t, \theta) = \sum_{i=0}^N (-1)^{|f|+(1/2)i(1+i)} \begin{bmatrix} N \\ i \end{bmatrix} \mathcal{D}^{N-i} f(X, t, \theta) \mathcal{D}^i g(X, t, \theta), \quad (3.4)$$

где f, g – грассманозначные функции (нечетные или четные), дифференциальный оператор $\mathcal{D} = \partial_\theta + \theta \partial_x$ является суперпроизводной, а супербиномиальные коэффициенты определяются как

$$\begin{bmatrix} N \\ i \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} [N/2] \\ [i/2] \end{bmatrix}, & (N, i) \neq (0, 1) \bmod 2, \\ 0, & (N, i) = (0, 1) \bmod 2. \end{cases} \quad (3.5)$$

Здесь $[k]$ – целая часть вещественного числа k ($[k] \leq k < 1 + [k]$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Предположим, что $f(X, t, \theta), g(X, t, \theta)$: $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1, M} \rightarrow \Lambda$, тогда билинейные операторы Хироты $D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t$ и билинейный оператор супер-Хироты S обладают свойствами*

$$S^{2N} f \cdot g = (D_{x_1} D_{x_2} \dots D_{x_N})^N f \cdot g, \quad (3.6a)$$

$$D_{x_1}^m D_{x_2}^n \dots D_{x_N}^p D_t^r e^{\xi_1} \cdot e^{\xi_2} = (k_1 - k_2)^m (l_1 - l_2)^n \dots (\rho_1 - \rho_2)^p (\omega_1 - \omega_2)^r e^{\xi_1 + \xi_2}, \quad (3.6b)$$

$$S e^{\xi_1} \cdot e^{\xi_2} = [\langle \sigma, \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 \rangle + \langle \theta, (k_1 - k_2) E_M \rangle + \langle \theta, (l_1 - l_2) E_M \rangle + \dots \dots \dots + \langle \theta, (\rho_1 - \rho_2) E_M \rangle] e^{\xi_1 + \xi_2}, \quad (3.6b)$$

где

$$\xi_i = k_i x_1 + l_i x_2 + \dots + \rho_i x_N + \omega_i t + \alpha_i \sigma_1 \theta_1 + \beta_i \sigma_2 \theta_2 + \dots + \gamma_i \sigma_M \theta_M + \delta_i,$$

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) \in \Lambda_1^M, \quad \mathcal{V}_i = (\alpha_i, \beta_i, \dots, \gamma_i),$$

$$k_i, l_i, \dots, \rho_i, \omega_i, \delta_i \in \Lambda_0, \quad \alpha_i, \beta_i, \dots, \gamma_i \in \mathbb{C}$$

– параметры, $i = 1, 2$,

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M) \in G_M, \quad E_M = \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_M \right).$$

Третья из приведенных выше формул определяется с точностью до аддитивной постоянной $sc \in {}^\perp \Lambda_1^M$ ($c \in \mathbb{C}$). Более общим образом, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t) e^{\xi_1} \cdot e^{\xi_2} = \\ = \mathcal{R}(\langle \sigma, \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 \rangle + \langle \theta, (k_1 - k_2) E_M \rangle + \langle \theta, (l_1 - l_2) E_M \rangle + \dots \dots \dots + \langle \theta, (\rho_1 - \rho_2) E_M \rangle, k_1 - k_2, l_1 - l_2, \dots, \rho_1 - \rho_2, \omega_1 - \omega_2) e^{\xi_1 + \xi_2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\mathcal{R}(S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t) e^{\xi_1} \cdot e^{\xi_2}$ – многочлен по операторам $D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}$ и D_t . Это свойство полезно при выводе билинейной формы Хироты и построении

периодических волновых решений суперсимметричного уравнения, выражаемых через СТФР.

В приложении Б перечислены несколько простых свойств данного оператора супер-Хироты.

3.2. СТФР. Введем многомерную СТФР на суперпространстве $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1,M}$ и обсудим ее квазипериодичность, которая играет центральную роль при построении периодических волновых решений в виде СТФР для суперсимметричных уравнений. Многомерная тета-функция Римана имеет вид

$$\vartheta(\xi, \varepsilon, \mathbf{s} | \boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} e^{2\pi i(\xi + \varepsilon, \mathbf{n} + \mathbf{s}) + \pi i(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} + \mathbf{s}), \mathbf{n} + \mathbf{s})}. \quad (3.8)$$

Здесь $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)^T \in \mathbb{Z}^N$ – целочисленный вектор, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)^T$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)^T \in \mathbb{C}^N$ – векторы комплексных параметров. Комплексные фазовые переменные

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T,$$

$$\xi_i = k_i x_1 + l_i x_2 + \dots + \rho_i x_N + \omega_i t + \alpha_i \sigma_1 \theta_1 + \beta_i \sigma_2 \theta_2 + \dots + \gamma_i \sigma_M \theta_M + \delta_i,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) \in \mathbb{R}_1^M, \quad k_i, l_i, \dots, \rho_i, \omega_i, \delta_i \in \Lambda_0, \quad \alpha_i, \beta_i, \dots, \gamma_i \in \mathbb{C}$$

– параметры. Здесь $i = 1, 2, \dots, N$, $x_1, x_2, \dots, x_N, t$ – обыкновенные переменные, а $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$ – грассмановы переменные. Кроме того, скалярное произведение двух векторов $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ и $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T$ определяется как

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_N g_N. \quad (3.9)$$

Положительно-определенная и вещественнозначная симметричная $(N \times N)$ -матрица $-i\boldsymbol{\tau} = -i(\tau_{ij})$ не зависит от $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M)$ и $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$ в суперпространстве $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1,M}$. Элементы τ_{ij} матрицы периодов $\boldsymbol{\tau}$ можно рассматривать как свободные параметры тета-функции (3.8).

Возьмем чисто мнимую матрицу периодов $\boldsymbol{\tau}$, чтобы тета-функция (3.8) сходилась к вещественнозначной функции для произвольного вектора $\xi \in \mathbb{C}^N$. В определении тета-функции (3.8) в случае $\varepsilon = \mathbf{s} = 0$ здесь и далее для простоты используем $\vartheta(\xi, \boldsymbol{\tau}) = \vartheta(\xi, \mathbf{0}, \mathbf{0} | \boldsymbol{\tau})$. Кроме того, имеем $\vartheta(\xi, \varepsilon, \mathbf{0} | \boldsymbol{\tau}) = \vartheta(\xi + \varepsilon, \boldsymbol{\tau})$. Очевидно, что тета-функция Римана (3.8) сходится абсолютно и супердифференцируема на суперпространстве $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1,M}$.

Рассмотрим периодичность тета-функции $\vartheta(\xi, \boldsymbol{\tau})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Говорят, что функция $f(X, t, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}_\Lambda^{N+1,M}$ квазипериодична по t с фундаментальными периодами $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_k)^T \in \mathbb{C}^k$, если $T_1, T_2, \dots, T_k$ линейно зависят от $\mathbb{Z}$ и существует функция $\mathcal{G}(X, \mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}_\Lambda^{N+k,M}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^k$, такая, что

$$\mathcal{G}(X, y_1, y_2, \dots, y_i + T_i, \dots, y_k, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{G}(X, y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_k, \boldsymbol{\theta}),$$

$$\mathcal{G}\left(X, \underbrace{t, t, \dots, t}_k, \boldsymbol{\theta}\right) = f(X, t, \boldsymbol{\theta}),$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M)^T$, $y_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, k$. В частности, $f(X, t, \boldsymbol{\theta})$ становится периодической по T , если и только если $T_i = m_i T$.

Основываясь на результатах работы [49], получаем следующее свойство квазипериодической волны в виде тета-функции Римана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Предположим, что*

$$\mathbf{e}_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad i = 1, \dots, N,$$

τ_i – i -й столбец матрицы $\boldsymbol{\tau}$, а $\tau_{ij} - (i, j)$ -й элемент матрицы $\boldsymbol{\tau}$. Тогда тета-функция $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ обладает свойствами периодичности:

$$\vartheta(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}_j + \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}) = e^{-2\pi i \xi_j - i\pi \tau_{jj}} \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}). \quad (3.10)$$

Тета-функция $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ – мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям 1 и 2 определения 2.5. Будем рассматривать векторы $\{\mathbf{e}_j, j = 1, 2, \dots, N\}$ и $\{\boldsymbol{\tau}_j, j = 1, 2, \dots, N\}$ как периоды тета-функции $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ с множителями 1 и $e^{-2\pi i \xi_j - i\pi \tau_{jj}}$ соответственно. Тогда только первые N векторов действительно являются периодами тета-функции $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$, а последние N векторов являются периодами функций $\partial_{\xi_i \xi_j}^2 \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$, $\partial_{\xi_i} \ln [\vartheta(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}, \boldsymbol{\tau}) / \vartheta(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h}, \boldsymbol{\tau})]$ и $\vartheta(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}, \boldsymbol{\tau}) \vartheta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{e}, \boldsymbol{\tau}) / \vartheta(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h}, \boldsymbol{\tau})^2$, $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_N)^T$, $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^N$, $i, j = 1, 2, \dots, N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Предположим, что $\mathbf{e}_i$ и $\boldsymbol{\tau}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, определены как в предложении 3.2. Мероморфные функции $f(\boldsymbol{\xi})$ на $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1, M}$ имеют вид*

$$f(\boldsymbol{\xi}) = \partial_{\xi_a \xi_b}^2 \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}), \quad (3.11a)$$

$$f(\boldsymbol{\xi}) = \partial_{\xi_a} \ln \frac{\vartheta(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}, \boldsymbol{\tau})}{\vartheta(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h}, \boldsymbol{\tau})}, \quad (3.11b)$$

где $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}, \mathbf{h} \in \mathbb{C}^N$, $a, b = 1, 2, \dots, N$. Тогда в обоих случаях (3.11a) и (3.11b) имеет место следующее:

$$f(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}_j + \boldsymbol{\tau}_j) = f(\boldsymbol{\xi}), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя предложение 3.2 (уравнение (3.10)), легко видеть, что

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_a} \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}_j + \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}) &= \frac{\vartheta'_{\xi_a}(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}_j + \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau})}{\vartheta(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}_j + \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau})} = -2\pi i \delta_{aj} + \frac{\vartheta'_{\xi_a}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})} = \\ &= -2\pi i \delta_{aj} + \partial_{\xi_a} \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Дифференцирование (3.13) с соответствующим ξ_b немедленно доказывает формулу (3.12) в случае (3.11a). Аналогичным образом можно доказать формулу (3.13) в случае (3.11b).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Здесь матрица периодов $\boldsymbol{\tau}$ отличается от той, которая используется в алгебро-геометрической теории, обсуждаемой в работах [1]–[31], [45], [46], где она, как правило, строится исходя из компактной римановой поверхности $\mathcal{T}$ рода $N \in \mathbb{Z}$. В настоящей работе матрица $-i\boldsymbol{\tau}$ симметрична и имеет положительно-определенную мнимую часть. Однако мы видим, что элементы такой матрицы $\boldsymbol{\tau}$ не являются свободными и их трудно задать явно.

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящем разделе мы введем метод билинейного оператора супер-Хироты и СТФР, которые играют центральную роль при построении периодических волновых решений в виде СТФР для суперсимметричного уравнения в суперпространстве $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1, M}$.

Рассмотрим наиболее общий вид суперсимметричного уравнения в суперпространстве $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1,M}$:

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{D}_t u, \mathcal{D}_{x_1} u, \mathcal{D}_{x_2} u, \dots, \mathcal{D}_{x_N} u_{x_N}, \dots) = 0, \quad (4.1)$$

где $\mathcal{N}$ – полиномиальная функция, $\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{x_i}, i = 1, 2, \dots, N$ – билинейные операторы супер-Хироты, а $u = u(X, t, \theta) \in \mathbb{R}_\Lambda^{N+1,M}$ – зависимая переменная, причем $X = (x_1, x_2, \dots, x_N), (X, t) \in \Lambda_0^{N+1}, \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M) \in \Lambda_1^M$. Далее кратко введем полезную билинейную форму супер-Хироты для уравнения (4.1) и отметим некоторые важные моменты относительно СТФР.

4.1. Билинейная форма супер-Хироты для уравнения (4.1). Билинейный метод Хироты представляет собой мощный инструмент для построения точных решений большого числа нелинейных уравнений. Коль скоро нелинейное уравнение записано в билинейном виде посредством преобразования зависимой переменной, обычно получаются многосолитонные решения. Сначала предположим, что билинейный вид супер-Хироты для суперсимметричного уравнения (4.1) выражается как

$$\mathcal{H}(S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t) f(X, t, \theta) \cdot f(X, t, \theta) = 0, \quad (4.2)$$

что получается из подстановки следующего преобразования зависимой переменной в уравнении (4.1):

$$u = a \mathcal{D}_\Lambda^n \ln f(X, t, \theta), \quad (4.3)$$

где a – константа, $\Lambda = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_N^{n_N}$ и $n = n_1 + n_2 + \dots + n_N$. Здесь билинейный оператор супер-Хироты S и билинейные операторы Хироты $D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}$ и D_t определяются уравнениями (3.3) и (3.4) соответственно.

Согласно уравнению (3.7) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t) e^{\xi_1} \cdot e^{\xi_2} = \\ = \mathcal{H}(\langle \sigma, \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 \rangle + \langle \theta, (k_1 - k_2) E_M \rangle + \langle \theta, (l_1 - l_2) E_M \rangle + \dots \\ \dots + \langle \theta, (\rho_1 - \rho_2) E_M \rangle, k_1 - k_2, l_1 - l_2, \dots, \rho_1 - \rho_2, \omega_1 - \omega_2) e^{\xi_1 + \xi_2}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $\mathcal{H}(S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t)$ – многочлен по $S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}$ и D_t ,

$$\xi_i = k_i x_1 + l_i x_2 + \dots + \rho_i x_N + \omega_i t + \alpha_i \sigma_1 \theta_1 + \beta_i \sigma_2 \theta_2 + \dots + \gamma_i \sigma_M \theta_M + \delta_i,$$

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) \in \Lambda_1^M, \quad \mathcal{V}_i = (\alpha_i, \beta_i, \dots, \gamma_i),$$

$$k_i, l_i, \dots, \rho_i, \omega_i, \delta_i \in \Lambda_0, \quad \alpha_i, \beta_i, \dots, \gamma_i \in \mathbb{C}$$

– параметры, $i = 1, 2$,

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M) \in G_M, \quad E_M = \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_M \right).$$

Эта формула для производной будет играть ключевую роль в процессе успешного получения однопериодического, двухпериодического и N -периодических волновых решений.

Согласно билинейной теории Хироты, уравнение (4.1) допускает односуперсолитонное решение

$$u_1 = a \mathcal{D}_\Lambda^n \ln(1 + e^\eta), \quad (4.5)$$

где $\eta = \mu x_1 + \nu x_2 + \dots + \chi x_N + \gamma(X)t + \Omega \sigma_1 \theta_1 + \Theta \sigma_2 \theta_2 + \dots + \Xi \sigma_M \theta_M + \delta$ – фазовая переменная, причем $\mu, \nu, \dots, \chi, \gamma(\mu, \nu, \dots, \chi), \Omega, \Theta, \dots, \Xi, \delta \in \Lambda_0$ – свободные константы,

$\mathcal{X} = (\mu, \nu, \dots, \chi)$ и $\gamma(\mu, \nu, \dots, \Omega)$ – функция $\mu, \nu, \dots, \Omega$. Аналогично двухсуперсолитонное решение принимает вид

$$u_2 = a\mathcal{D}_\Lambda^n \ln(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}), \quad (4.6)$$

где $\eta_i = \mu_i x_1 + \nu_i x_2 + \dots + \chi_i x_N + \gamma(\mathcal{X}_i)t + \Omega_i \theta_1 \sigma_1 + \Theta_i \theta_2 \sigma_2 + \dots + \Xi_i \theta_M \sigma_M + \delta_i$, $e^{A_{12}} = \Gamma(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma})$, $\mathcal{X}_i = (\mu_i, \nu_i, \dots, \chi_i)$, $i = 1, 2$, – фазовая переменная, причем $\mu_i, \nu_i, \dots, \chi_i, \gamma_i(\mathcal{X}_i), \Omega_i, \Theta_i, \dots, \Xi_i, \delta_i \in \Lambda_0$ – свободные константы, а $\gamma(\mathcal{X}_i), \Gamma(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma})$ – функции $\mathcal{X}_i$ и $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}$ соответственно.

Используя билинейный метод супер-Хироты для построения мультисуперпериодических волновых решений уравнения (4.1), рассмотрим несколько обобщенный вид билинейного уравнения супер-Хироты (4.2). Предположим, что уравнение (4.1) имеет ненулевое асимптотическое условие $u \rightarrow u_0$ при $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow 0$, и будем искать его решения в виде

$$u = u_0 + a\mathcal{D}_\Lambda^n \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{s} | \boldsymbol{\tau}), \quad (4.7)$$

где $u_0 = u_0(\boldsymbol{\theta})$ – нечетное специальное решение уравнения (4.1), а фазовая переменная $\boldsymbol{\xi}$ берется в виде $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$, $\xi_i = k_i x_1 + l_i x_2 + \dots + \rho_i x_N + \omega_i t + \alpha_i \sigma_1 \theta_1 + \beta_i \sigma_2 \theta_2 + \dots + \gamma_i \sigma_M \theta_M + \delta_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Подставляя уравнение (4.7) в уравнение (4.1) и интегрируя по x_1 , можно получить следующую супербилинейную форму:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t, u_0, c) \vartheta(\boldsymbol{\xi}) \cdot \vartheta(\boldsymbol{\xi}) = \\ = \mathcal{H}(S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t, u_0, c) \vartheta(\boldsymbol{\xi}) \cdot \vartheta(\boldsymbol{\xi}) = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $c = c(x_2, \dots, t, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta})$ – постоянная интегрирования. Для супербилинейного уравнения (4.8) рассмотрим его мультипериодические решения в терминах СТФР $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{s} | \boldsymbol{\tau})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. При построении суперсолитонных решений можно положить постоянную $c = c(x_2, \dots, x_N, t, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta})$ равной нулю. Однако в нашем периодическом случае ненулевая постоянная c играет важную роль и не должна быть опущена, потому что, как правило, эллиптические функции не удовлетворяют уравнениям с нулевыми постоянными интегрирования такими, как уравнение (4.2).

4.2. Построение однопериодических волновых решений. Теперь рассмотрим однопериодические волновые решения уравнения (4.1), т.е. сначала рассмотрим простой случай $N = 1$ и $s = 0$. Тогда СТФР (3.8) сводится к следующему ряду Фурье по n :

$$\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}, 0 | \boldsymbol{\tau}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon})}, \quad (4.9)$$

где $\boldsymbol{\xi} = kx_1 + lx_2 + \dots + \rho x_N + \omega t + \alpha \sigma_1 \theta_1 + \beta \sigma_2 \theta_2 + \dots + \gamma \sigma_M \theta_M + \delta$ – фазовая переменная, а $\text{Im } \tau > 0$ – чисто мнимый параметр.

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{s} | \boldsymbol{\tau})$ и $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}', \boldsymbol{s}' | \boldsymbol{\tau})$ – две СТФР на $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1, M}$ с $\boldsymbol{\xi} = kx_1 + lx_2 + \dots + \rho x_N + \omega t + \alpha \sigma_1 \theta_1 + \beta \sigma_2 \theta_2 + \dots + \gamma \sigma_M \theta_M + \delta$ и $k, l, \dots, \rho, \omega, \alpha, \beta, \dots, \gamma, \varepsilon, \varepsilon', \boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}', \delta \in \Lambda_0$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) \in \Lambda_1^M$.*

1. Свойства билинейных операторов Хироты и билинейного оператора супер-Хироты имеют следующий вид:

$$D_{x_i} \vartheta(\xi, \varepsilon, s | \tau) \cdot \vartheta(\xi, \varepsilon', s' | \tau) = \begin{cases} \left. \partial_{x_i} \vartheta \left(2\xi, \varepsilon - \varepsilon', \frac{s - s'}{2} \right) \right|_{\xi=0} \vartheta \left(2\xi, \varepsilon + \varepsilon', \frac{s + s'}{2} \right), & \text{если } s + s' \text{ четно,} \\ \left. \partial_{x_i} \vartheta \left(2\xi, \varepsilon - \varepsilon', \frac{s - s' + 1}{2} \right) \right|_{\xi=0} \vartheta \left(2\xi, \varepsilon + \varepsilon', \frac{s + s' + 1}{2} \right), & \text{если } s + s' \text{ нечетно,} \end{cases} \quad (4.10a)$$

$$S_{x_i} \vartheta(\xi, \varepsilon, s | \tau) \cdot \vartheta(\xi, \varepsilon', s' | \tau) = \begin{cases} \left. \mathcal{D}_{x_i} \vartheta \left(2\xi, \varepsilon - \varepsilon', \frac{s - s'}{2} \right) \right|_{\xi=0} \vartheta \left(2\xi, \varepsilon + \varepsilon', \frac{s + s'}{2} \right), & \text{если } s + s' \text{ четно,} \\ \left. \mathcal{D}_{x_i} \vartheta \left(2\xi, \varepsilon - \varepsilon', (s - s' + 1) \right) \right|_{\xi=0} \vartheta \left(2\xi, \varepsilon + \varepsilon', \frac{s + s' + 1}{2} \right), & \text{если } s + s' \text{ нечетно,} \end{cases} \quad (4.10b)$$

при $i = 1, 2, \dots, N$. Аналогично можно получить подобное свойство для S_t .

2. Если $k, l, \dots, \rho, \omega, \alpha, \beta, \dots, \gamma, \theta_j, \sigma_j, \delta, \varepsilon, \varepsilon', j = 1, 2$, удовлетворяют системе

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(4n\pi i k, \dots, 4n\pi i \rho, 4n\pi i \omega, \dots, 4n\pi i (\gamma \sigma_M + \theta_M \rho)) e^{2\pi i n^2 \tau + 2\pi i n (\varepsilon - \varepsilon')} = 0, \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(2\pi i (2n - 1)k, \dots, 2\pi i (2n - 1)\omega, \dots, 2\pi i (2n - 1)(\gamma \sigma_M + \theta_M \rho)) \times \\ & \times e^{2\pi i (n-1/2)^2 \tau + 2\pi i (n-1/2)(\varepsilon - \varepsilon')} = 0, \end{aligned} \quad (4.11b)$$

то выражение

$$u = u_0 + a \mathcal{D}_\Lambda^n \ln \vartheta(\xi, \varepsilon, 0 | \tau) \quad (4.12)$$

является однопериодическим волновым решением уравнения (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Согласно формуле (3.6в) имеем

$$\begin{aligned} S_t \vartheta(\xi, \varepsilon, s | \tau) \cdot \vartheta(\xi, \varepsilon', s' | \tau) &= \\ &= \sum_{m, m' \in \mathbb{Z}} S_t e^{2\pi i (m+s)(\xi+\varepsilon) + \pi i \tau (m+s)^2} e^{2\pi i (m'+s')(\xi+\varepsilon') + \pi i \tau (m'+s')^2} = \\ &= \sum_{m, m' \in \mathbb{Z}} 2\pi i (m - m' + s - s') \mathcal{O} \times \\ & \times e^{2\pi i (m+m'+s+s')\xi + 2\pi i [(m+s)\varepsilon + (m'+s')\varepsilon'] + \pi i \tau [(m+s)^2 + (m'+s')^2]} \stackrel{k=m+m'}{=} \\ & \stackrel{k=m+m'}{=} \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} 2\pi i (2m - k + s - s') \mathcal{O} \times \\ & \times e^{2\pi i (k+s+s')\xi + 2\pi i [(m+s)\varepsilon + (k-m+s')\varepsilon'] + \pi i \tau [(m+s)^2 + (k-m+s')^2]} = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \sum_{m, n' \in \mathbb{Z}} 2\pi i(2m - 2n' + s - s') \mathcal{O} \times \\ \times e^{4\pi i \xi(n' + (s+s')/2) + 2\pi i[(m+s)\varepsilon - (m-2n'-s')\varepsilon'] + \pi i \tau[(m+s)^2 + (m-2n'-s')^2]}, & \text{если } k = 2n'; \\ \sum_{m, n' \in \mathbb{Z}} 2\pi i(2m - 2n' + s - s' - 1) \mathcal{O} \times \\ \times e^{4\pi i \xi(n' + (s+s'+1)/2) + 2\pi i[(m+s)\varepsilon - (m-2n'-s'-1)\varepsilon'] + \pi i \tau[(m+s)^2 + (m-2n'-s'-1)^2]}, & \text{если } k = 2n' + 1, \end{cases} \quad (4.13)$$

где $\mathcal{O} = \langle \sigma, \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 \rangle + \langle \theta, (k_1 - k_2)E_M \rangle + \langle \theta, (l_1 - l_2)E_M \rangle + \dots + \langle \theta, (\rho_1 - \rho_2)E_M \rangle$, $\mathcal{V}_i = (\alpha_i, \beta_i, \dots, \gamma_i)$, $i = 1, 2$. Полагая $n = m - n'$ и используя соотношения

$$n + n' + s = \left(n + \frac{s - s' - d_0}{2} \right) + \left(n' + \frac{s + s' + d_0}{2} \right),$$

$$n - n' - s' - d_0 = \left(n + \frac{s - s' - d_0}{2} \right) - \left(n' + \frac{s + s' + d_0}{2} \right), \quad d_0 = 0, 1,$$

можно получить

$$S_t \vartheta(\xi, \varepsilon, s | \tau) \cdot \vartheta(\xi, \varepsilon', s' | \tau) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{n, n' \in \mathbb{Z}} 4\pi i \left(n + \frac{s - s'}{2} \right) \mathcal{O} e^{2\pi i(\varepsilon - \varepsilon')(n + (s-s')/2) + \pi i \tau(n + (s-s')/2)^2} \times \\ \times e^{2\pi i(2\xi\varepsilon + \varepsilon')(n + (s+s')/2) + \pi i \tau(n + (s+s')/2)^2}, & \text{если } s + s' \text{ четно,} \\ \sum_{n, n' \in \mathbb{Z}} 4\pi i \left(n + \frac{s - s' - 1}{2} \right) \mathcal{O} e^{2\pi i(\varepsilon - \varepsilon')(n + (s-s'-1)/2) + \pi i \tau(n + (s-s'-1)/2)^2} \times \\ \times e^{2\pi i(2\xi\varepsilon + \varepsilon')(n + (s+s'+1)/2) + \pi i \tau(n + (s+s'+1)/2)^2}, & \text{если } s + s' \text{ нечетно,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathcal{D}_t \vartheta \left(2\xi, \varepsilon - \varepsilon', \frac{s - s'}{2} \middle| 2\tau \right) \Big|_{\xi=0} \vartheta \left(2\xi, \varepsilon + \varepsilon', \frac{s + s'}{2} \middle| 2\tau \right), & \text{если } s + s' \text{ четно,} \\ \mathcal{D}_t \vartheta \left(2\xi, \varepsilon - \varepsilon', (s - s' + 1) \middle| 2\tau \right) \Big|_{\xi=0} \vartheta \left(2\xi, \varepsilon + \varepsilon', \frac{s + s' + 1}{2} \middle| 2\tau \right), & \text{если } s + s' \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Аналогично можно также доказать формулы (4.10a) и (4.10б).

2. Чтобы тета-функция (4.9) удовлетворяла билинейному уравнению (4.8), подставим ее в левую часть уравнения (4.8). Используя свойство предложения 3.1 и приведенное выше свойство 1, окончательно получаем

$$\mathcal{L}(S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t, u_0, c) \vartheta(\xi, \varepsilon, 0 | \tau) \cdot \vartheta(\xi, \varepsilon', 0 | \tau) =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(2\pi i(n - m)k, \dots, 2\pi i(n - m)\rho, 2\pi i(n - m)\omega, 2\pi i(n - m)(\sigma_1 + \theta_1 k), \dots$$

$$\dots, 2\pi i(n - m)(\gamma\sigma_M + \theta_M \rho)) e^{\pi i(m^2 + n^2)\tau + 2\pi i(m+n)\xi + 2\pi i(n\varepsilon + m\varepsilon')} =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(2\pi i(2n - m')k, \dots, 2\pi i(2n - m')\omega, 2\pi i(2n - m')(\alpha\sigma_1 + \theta_1 k), \dots \right.$$

$$\begin{aligned} & \dots, 2\pi i(2n - m')(\gamma\sigma_M + \theta_M\rho))e^{2\pi i\tau(n-m'/2)^2+2\pi i(n-m'/2)(\varepsilon-\varepsilon')} \Big\} \times \\ & \times e^{2\pi im'(\xi+\varepsilon'/2)+\pi im'\varepsilon+\pi i\tau m'^2} \triangleq \sum_{m' \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{L}}(m')e^{2\pi im'(\xi+\varepsilon'/2)+\pi im'\varepsilon+\pi i\tau m'^2}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$m' = m + n$. Теперь вычислим каждую строку $\tilde{\mathcal{L}}(m')$ при $m' \in \mathbb{Z}$. Сдвигая индекс суммирования как $n' = n - 1$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(m') &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(2\pi i(2n' - (m' - 2))k, \dots \\ & \dots, 2\pi i(2n' - (m' - 2))\omega, \dots, 2\pi i(2n' - (m' - 2))(\gamma\sigma_M + \theta_M\rho)) \times \\ & \times e^{2\pi i\tau(n-(m'-2)/2)^2+2\pi i(n-(m'-2)/2)(\varepsilon-\varepsilon')} = \\ & = \tilde{\mathcal{L}}(m' - 2) = \dots = \begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}(0), & m' \text{ четно,} \\ \tilde{\mathcal{L}}(1), & m' \text{ нечетно,} \end{cases} \quad m', n' \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

откуда следует, что $\tilde{\mathcal{L}}(m')$, $m \in \mathbb{Z}$, полностью определяются двумя функциями $\tilde{\mathcal{L}}(0)$ и $\tilde{\mathcal{L}}(1)$. Если $\tilde{\mathcal{L}}(0) = \tilde{\mathcal{L}}(1) = 0$, то $\tilde{\mathcal{L}}(m') = 0$, $m' \in \mathbb{Z}$, и, таким образом, тета-функция (4.9) является точным решением уравнения (4.8), а именно $\mathcal{L}(S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t)\vartheta(\xi, \varepsilon, 0|\tau) \cdot \vartheta(\xi, \varepsilon, 0|\tau) = 0$. С учетом конкретного вида уравнения (4.8) можно получить однопериодические волновые решения в виде СТФР, если потребовать, чтобы выполнялись равенства

$$\tilde{\mathcal{L}}(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(4n\pi ik, \dots, 4n\pi i\rho, 4n\pi i\omega, \dots, 4n\pi i(\gamma\sigma_M + \theta_M\rho))e^{2\pi in^2\tau+2\pi in(\varepsilon-\varepsilon')} = 0, \quad (4.17a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(1) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(2\pi i(2n - 1)k, \dots, 2\pi i(2n - 1)\omega, \dots \\ & \dots, 2\pi i(2n - 1)(\gamma\sigma_M + \theta_M\rho))e^{2\pi i(n-1/2)^2\tau+2\pi i(n-1/2)(\varepsilon-\varepsilon')} = 0. \end{aligned} \quad (4.17b)$$

Решая эту систему, получаем однопериодическое волновое решение в виде СТФР для уравнения (4.1):

$$u = u_0 + a\mathcal{D}_\Lambda^n \ln \vartheta(\xi, \varepsilon, 0|\tau),$$

в котором параметры ω , c и $\vartheta(\xi, \varepsilon, 0|\tau)$ даются уравнениями (4.11a), (4.11b) и уравнением (4.9) соответственно. Другие параметры $k, l, \dots, \rho, \tau, \varepsilon, \varepsilon', \delta, u_0$ являются свободными и $\sigma \in \Lambda_1^M, \theta \in G_M$. $N + 2M + 5$ параметров $k, l, \dots, \rho, \sigma, \theta$ и τ полностью определяют односуперпериодическую волну.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Теорема 4.1 действительно предоставляет унифицированный подход к построению однопериодических волновых решений в виде СТФР для суперсимметричных уравнений. Коль скоро суперсимметричное уравнение записано в билинейном виде, его однопериодические волновые решения, выражаемые через СТФР, можно получить непосредственно, решая систему (4.11a) и (4.11b).

4.3. Посторение двухпериодических волновых решений. Здесь мы рассмотрим двухпериодические волновые решения уравнения (4.1), которые являются двумерным обобщением однопериодических волновых решений. Двухпериодические волны, которые мы рассматриваем, обладают трехмерными полями скоростей и двумерными картинами поверхности.

Рассмотрим случай $N=2$, $s=0$ и тета-функцию Римана (3.8) вида

$$\vartheta(\xi, \varepsilon, \mathbf{0} | \tau) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i \langle \xi + \varepsilon, \mathbf{n} \rangle + \pi i \langle \tau \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}, \quad (4.18)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T \in \mathbb{Z}^2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T \in \mathbb{C}^2$,

$$\xi_i = k_i x_1 + l_i x_2 + \dots + \rho_i x_N + \omega_i t + \alpha_i \theta_1 \sigma_1 + \beta_i \theta_1 \sigma_1 + \dots + \gamma_i \theta_M \sigma_M + \delta_i, \quad i = 1, 2,$$

и $-i\tau$ – положительно-определенная и вещественнозначная симметричная (2×2) -матрица, которая может иметь вид

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{Im}(\tau_{11}) > 0, \quad \text{Im}(\tau_{22}) > 0, \quad \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 < 0. \quad (4.19)$$

ТЕОРЕМА 4.2. *Предположим, что $\vartheta(\xi, \varepsilon, s | \tau)$, а $\vartheta(\xi, \varepsilon', s' | \tau)$ – две СТПР на $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1, M}$, в которых*

$$\xi = (\xi_1, \xi_2)^T, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T, \quad \varepsilon' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)^T, \quad s = (s_1, s_2)^T, \quad s' = (s'_1, s'_2)^T,$$

$$\xi_i = k_i x_1 + l_i x_2 + \dots + \rho_i x_N + \omega_i t + \alpha_i \sigma_1 \theta_1 + \beta_i \sigma_2 \theta_2 + \dots + \gamma_i \sigma_M \theta_M + \delta_i,$$

$$k_i, l_i, \dots, \rho_i, \omega_i, \alpha_i, \beta_i, \dots, \gamma_i, \varepsilon_i, \varepsilon'_i, s_i, s'_i, \delta_i \in \Lambda_0, \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) \in \Lambda_1^M.$$

Можно получить те же самые свойства билинейных операторов Хироты и билинейного оператора супер-Хироты, что и свойство 1 в теореме 4.1. Если $k_i, l_i, \dots, \rho_i, \omega_i, \alpha_i, \beta_i, \dots, \gamma_i, \theta_j, \sigma_j, \delta_i, \varepsilon_i, \varepsilon'_i$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, M$, удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \theta_1, \mathbf{k} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \theta_1, \omega \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \theta_1, \gamma \sigma_M + \theta_M \rho \rangle) \times \\ \times e^{2\pi i \langle \tau(\mathbf{n} - \theta_1/2), \mathbf{n} - \theta_1/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \theta_1/2, \varepsilon - \varepsilon' \rangle} = 0, \end{aligned} \quad (4.20a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \theta_2, \mathbf{k} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \theta_2, \omega \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \theta_2, \gamma \sigma_M + \theta_M \rho \rangle) \times \\ \times e^{2\pi i \langle \tau(\mathbf{n} - \theta_2/2), \mathbf{n} - \theta_2/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \theta_2/2, \varepsilon - \varepsilon' \rangle} = 0, \end{aligned} \quad (4.20б)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \theta_3, \mathbf{k} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \theta_3, \omega \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \theta_3, \gamma \sigma_M + \theta_M \rho \rangle) \times \\ \times e^{2\pi i \langle \tau(\mathbf{n} - \theta_3/2), \mathbf{n} - \theta_3/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \theta_3/2, \varepsilon - \varepsilon' \rangle} = 0, \end{aligned} \quad (4.20в)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \theta_4, \mathbf{k} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \theta_4, \omega \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \theta_4, \gamma \sigma_M + \theta_M \rho \rangle) \times \\ \times e^{2\pi i \langle \tau(\mathbf{n} - \theta_4/2), \mathbf{n} - \theta_4/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \theta_4/2, \varepsilon - \varepsilon' \rangle} = 0, \end{aligned} \quad (4.20г)$$

где $\theta_1 = (0, 0)^T$, $\theta_2 = (1, 0)^T$, $\theta_3 = (0, 1)^T$, $\theta_4 = (1, 1)^T$, то выражение

$$u = u_0 + a \mathcal{D}_\Lambda^n \ln \vartheta(\xi, \varepsilon, \mathbf{0} | \tau) \quad (4.21)$$

является двухпериодическим волновым решением уравнения (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы получить некоторые достаточные условия того, что тета-функция (4.18) удовлетворяет билинейному уравнению (4.8), подставим функцию (4.18) в левую часть уравнения (4.8) и получим

$$\mathcal{L}(S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t) \vartheta(\xi, \varepsilon, \mathbf{0} | \tau) \cdot \vartheta(\xi, \varepsilon', \mathbf{0} | \tau) = \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}, \mathbf{k} \rangle, \dots$$

$$\begin{aligned}
 & \dots, 2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}, \boldsymbol{\rho} \rangle, 2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}, \boldsymbol{\omega} \rangle, 2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha} \sigma_1 + \theta_1 \mathbf{k} \rangle + \dots \\
 & \dots + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma} \sigma_M + \theta_M \boldsymbol{\rho} \rangle \Big) e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{m} + \mathbf{n} \rangle + \pi i (\langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle) + 2\pi i (\langle \boldsymbol{\varepsilon}', \mathbf{m} \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n} \rangle)} = \\
 & = \sum_{\mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^2} \left\{ \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \mathbf{k} \rangle, \dots \right. \\
 & \quad \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \boldsymbol{\omega} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \boldsymbol{\gamma} \sigma_M + \theta_M \boldsymbol{\rho} \rangle) \times \\
 & \quad \times e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} - \mathbf{m}'/2), \mathbf{n} - \mathbf{m}'/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}'/2, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle} \Big\} e^{2\pi i \langle 2\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}', \mathbf{m}' \rangle + \pi i \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{m}', \mathbf{m}' \rangle} \triangleq \\
 & \triangleq \sum_{\mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^2} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{m}'_1, \mathbf{m}'_2) \vartheta \left(2\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}', \frac{\mathbf{m}'}{2} \middle| \boldsymbol{\tau} \right) = \\
 & = \sum_{\mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^2} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{m}') \vartheta \left(2\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}', \frac{\mathbf{m}'}{2} \middle| \boldsymbol{\tau} \right), \quad \mathbf{m}' = \mathbf{m} + \mathbf{n}. \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

Сдвигая индекс $\mathbf{n}$ как $\mathbf{n}' = \mathbf{n} - \delta_{ij}$, $j = 1, 2$, можно вычислить, что

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{m}') & = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \mathbf{k} \rangle, \dots \\
 & \quad \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \boldsymbol{\omega} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \boldsymbol{\gamma} \sigma_M + \theta_M \boldsymbol{\rho} \rangle) \times \\
 & \quad \times e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} - \mathbf{m}'/2), \mathbf{n} - \mathbf{m}'/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}'/2, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle} = \\
 & = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L} \left(2\pi i \sum_{i=1}^2 [2n'_i - (m'_i - 2\delta_{ij})] k_i, \dots, 2\pi i \sum_{i=1}^2 [2n'_i - (m'_i - 2\delta_{ij})] \omega_i, \dots \right. \\
 & \quad \dots, 2\pi i \sum_{i=1}^2 [2n'_i - (m'_i - 2\delta_{ij})] (\boldsymbol{\gamma} \sigma_M + \theta_M \boldsymbol{\rho}) \Big) \times \\
 & \quad \times e^{2\pi i \sum_{i,k=1}^2 [(n'_i + \delta_{ij})(n'_k + \delta_{kj}) + (m'_i/2 - n'_i - \delta_{ij})(m'_k/2 - n'_k - \delta_{kj} + (n'_i + \delta_{ij} - m'_i/2)(\varepsilon_k - \varepsilon'_k))]} \tau_{ik} = \\
 & = \begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{m}'_1 - 2, \mathbf{m}'_2) e^{2\pi i (m'_1/2 + \varepsilon_1 - \varepsilon'_1 - 1) \tau_{11} + 2\pi i (m'_2/2 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_2) \tau_{12}}, & j = 1, \\ \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{m}'_1, \mathbf{m}'_2 - 2) e^{2\pi i (m'_2/2 + \varepsilon_1 - \varepsilon'_1 - 1) \tau_{22} + 2\pi i (m'_1/2 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_2) \tau_{12}}, & j = 2, \end{cases} \quad \mathbf{m}', \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^2, \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

где δ_{ij} – дельта-символ Кронекера. Отсюда следует, что $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{m}')$, $\mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^2$, полностью определяются четырьмя функциями $\tilde{\mathcal{L}}(0, 0)$, $\tilde{\mathcal{L}}(1, 0)$, $\tilde{\mathcal{L}}(0, 1)$ и $\tilde{\mathcal{L}}(1, 1)$. Если $\tilde{\mathcal{L}}(0, 0) = \tilde{\mathcal{L}}(1, 0) = \tilde{\mathcal{L}}(0, 1) = \tilde{\mathcal{L}}(1, 1) = 0$, то $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{m}') = 0$ и, таким образом, тета-функция (4.18) представляет собой точное решение уравнения (4.8), а именно $\mathcal{L}(S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t) \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{0} | \boldsymbol{\tau}) \cdot \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}', \mathbf{0} | \boldsymbol{\tau}) = 0$. Учитывая конкретный вид уравнения (4.8), можно получить двухпериодические волновые решения, если потребовать, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{L}}(0, 0) & = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{k} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\omega} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\gamma} \sigma_M + \theta_M \boldsymbol{\rho} \rangle) \times \\
 & \quad \times e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1/2), \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1/2, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle} = 0, \tag{4.24a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{L}}(1, 0) & = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{k} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\omega} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\gamma} \sigma_M + \theta_M \boldsymbol{\rho} \rangle) \times \\
 & \quad \times e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2/2), \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2/2, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle} = 0, \tag{4.24б}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(0,1) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3, \mathbf{k} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3, \gamma\sigma_M + \theta_M \boldsymbol{\rho} \rangle) \times \\ \times e^{2\pi i \langle \tau(\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3/2), \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3/2, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle} = 0, \quad (4.24\text{В})$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(1,1) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4, \mathbf{k} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4, \boldsymbol{\omega} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4, \gamma\sigma_M + \theta_M \boldsymbol{\rho} \rangle) \times \\ \times e^{2\pi i \langle \tau(\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4/2), \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4/2, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle} = 0. \quad (4.24\text{Г})$$

Решая эту систему, получаем двухпериодическое волновое решение уравнения (4.1), выражаемое через СТФР:

$$u = u_0 + a\mathcal{D}_\Lambda^n \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{0} | \boldsymbol{\tau}), \quad (4.25)$$

где $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{0} | \boldsymbol{\tau})$ и параметры $\omega_1, \omega_2, u_0, c$ задаются уравнениями (4.18) и (4.20a)–(4.20r) соответственно. Другие параметры $k_i, l_i, \dots, \rho_i, \varepsilon_i, \delta_i, \tau_{ij}, i, j = 1, 2$, являются свободными, а $\boldsymbol{\sigma} \in \Lambda_1^M$, $\boldsymbol{\theta} \in G_M$. Двухпериодическая волна определяется $2N + 2M + 3$ параметрами $k_i, l_i, \dots, \rho_i, \tau_{ij}, \boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\theta}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Теорема 4.2 действительно предоставляет унифицированный подход к построению двухпериодических волновых решений суперсимметричных уравнений, выражаемых через СТФР. Коль скоро суперсимметричное уравнение записано в билинейном виде, его двухпериодические волновые решения в виде СТФР можно получить непосредственно, решая систему (4.20a)–(4.20r).

5. СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ КДФБ

В настоящем разделе мы предлагаем применить наш метод к уравнению сКДФБ

$$u_t + a(3u_x \mathcal{D}_x u_x + u_{xxx}) + b(u \mathcal{D}_x u_x + u_{xx}) = 0, \quad (5.1)$$

где поле $u = u(x, \theta, t)$ – грассманова нечетная переменная, зависящая от суперпространственных переменных (x, θ) и временной переменной t . $\mathcal{D}_x = \partial_\theta + \theta \partial_x$ – обычная суперпроизводная. Действительно, уравнение (5.1) представляет собой линейную комбинацию суперсимметричного уравнения КдФ для $b=0$ и суперсимметричного уравнения Бюргерса для $a=0$:

$$u_t + 3u_x \mathcal{D}_x u_x + u_{xxx} = 0, \quad (5.2a)$$

$$u_t + u \mathcal{D}_x u_x + u_{xx} = 0. \quad (5.2b)$$

Суперсимметричное уравнение КдФ (5.2a) было введено в работах [35], [36]. В последнее время большое внимание уделялось исследованию его бигамильтоновой структуры, свойств Пенлеве, бесконечного набора симметрий, преобразований Дарбу, преобразований Беклунда, билинейного вида и многосолитонных решений [35]–[38]. Солитонные решения уравнения (5.2a) были получены в работах [38], [42], [50] с использованием метода Хироты и преобразования Дарбу соответственно. Затем были получены солитонные решения и билинейный вид Хироты суперсимметричного уравнения Бюргерса (5.2b) [51]. В настоящем разделе мы построим периодические волновые решения в виде СТФР для уравнения сКДФБ и покажем, что его солитонные решения можно получить как предельный случай периодических решений.

Применяя теоремы 4.1 и 4.2 для построения периодических волновых решений уравнения (5.1) в виде СТФР, рассмотрим преобразование переменной

$$u = u_0 + 2\mathcal{D}_x \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{0}, \mathbf{0} | \boldsymbol{\tau}), \quad (5.3)$$

где $\xi = kx + \omega t + \alpha\sigma\theta + \delta$, а $\text{Im } \tau > 0$ – чисто мнимый параметр. Подставляя выражение (5.3) в уравнение (5.1) и интегрируя по x , получаем уравнение (5.1) в билинейном виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S_x, D_x, D_t)\vartheta(\xi, 0, 0 | \tau) \cdot \vartheta(\xi, 0, 0 | \tau) = \\ = (S_x D_t + a S_x D_x^3 + 2b D_x^2 D_t + bu_0 D_x + c)\vartheta(\xi, 0, 0 | \tau) \cdot \vartheta(\xi, 0, 0 | \tau) = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Согласно уравнениям (4.5) и (4.6), уравнение (5.1) допускает односолитонное и двухсолитонное решения:

$$u_1 = 2\mathcal{D}_x \ln(1 + e^\eta), \quad (5.5a)$$

$$u_2 = 2\mathcal{D}_x \ln(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}), \quad (5.5b)$$

где $\eta = \mu x - (a\mu^3 + b\mu^2)t + \nu\sigma\theta + \epsilon$, $\eta_i = \mu_i x - (a\mu_i^3 + b\mu_i^2)t + \nu_i\sigma\theta + \epsilon_i$, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} e^{A_{12}} = \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) \left\{ a[\mu_1 - \mu_2 - 2\nu_1\nu_2 - 2\sigma\theta(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1)] + \right. \\ \left. + 2b \frac{\mu_1 - \mu_2 + \theta\sigma(\mu_2\nu_1 - \mu_1\nu_2)}{\mu_1 + \mu_2} \right\} \end{aligned}$$

– фазовая переменная, а $\mu, \nu, \delta, \mu_i, \nu_i, \epsilon_i \in \Lambda_0$, $i = 1, 2$, – свободные константы.

5.1. Построение однопериодических волновых решений уравнения сКдФБ. Здесь мы рассмотрим однопериодические волновые решения уравнения сКдФБ (5.1). Согласно теореме 4.1 $k, \omega, \alpha, \sigma$ и δ должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \{ -16\pi^2 n^2 (\alpha\sigma + \theta k) \omega + 256a\pi^4 n^4 (\alpha\sigma + \theta k) k^3 - \\ - 128b\pi^3 i n^3 k^2 \omega + 4bu_0 \pi i n k + c \} e^{2\pi i \tau n^2} = 0, \end{aligned} \quad (5.6a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \{ -4\pi^2 (2n-1)^2 (\alpha\sigma + \theta k) \omega + 16a\pi^4 (2n-1)^4 (\alpha\sigma + \theta k) k^3 - \\ - 16b\pi^3 i (2n-1)^3 k^2 \omega + 2bu_0 \pi i (2n-1) k + c \} e^{2\pi i \tau (n-1/2)^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.6b)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \wp = e^{\pi i \tau / 2}, \quad \vartheta_1(\xi, \wp) = \vartheta(2\xi, 0, 0 | 2\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \wp^{4n^2} e^{4\pi i n \xi}, \\ \vartheta_2(\xi, \wp) = \vartheta\left(2\xi, 0, -\frac{1}{2} \middle| 2\tau\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \wp^{(2n-1)^2} e^{2\pi i (2n-1)\xi}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

мы просто превращаем уравнения (5.6a) и (5.6b) в линейную систему относительно частоты ω и постоянной интегрирования c , а именно

$$\begin{aligned} (\alpha\sigma + \theta k) \vartheta_1'' \omega + a(\alpha\sigma + \theta k) \vartheta_1^{(4)} k^3 + 2b \vartheta_1''' k^2 \omega + bu_0 \vartheta_1' k + \vartheta_1 c = 0, \\ (\alpha\sigma + \theta k) \vartheta_2'' \omega + a(\alpha\sigma + \theta k) \vartheta_2^{(4)} k^3 + 2b \vartheta_2''' k^2 \omega + bu_0 \vartheta_2' k + \vartheta_2 c = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $\omega \in \Lambda_0$ – четная, а $u_0, c \in \Lambda_1$ – нечетная и значения производных функций $\vartheta_i(\xi, \wp)$ при $\xi = 0$ обозначены как

$$\vartheta_i' = \left. \frac{d\vartheta_i(\xi, \wp)}{d\xi} \right|_{\xi=0}, \quad i = 1, 2. \quad (5.9)$$

Функции ϑ_i и их производные не зависят от грассмановых переменных θ и антикоммутирующего числа σ .

Очевидно, что определитель коэффициентов системы (5.8) не равен нулю. Полагая для простоты $u_0 = \gamma_0 k(\alpha\sigma + \theta k)$, $\gamma_0 \in \Lambda_0$, получаем решение ω и c из системы (5.8):

$$\begin{aligned} \omega = & -\frac{a(\alpha\sigma + \theta k)(\vartheta_2\vartheta_1^{(4)} - \vartheta_1\vartheta_2^{(4)})k^3 + b\gamma_0(\alpha\sigma + \theta k)(\vartheta_2\vartheta_1' - \vartheta_1\vartheta_2')k^2}{\vartheta_1[(\alpha\sigma + \theta k)\vartheta_2'' + 2b\vartheta_2'''k^2] - \vartheta_2[(\alpha\sigma + \theta k)\vartheta_1'' + 2b\vartheta_1'''k^2]}, \quad s = \alpha\sigma + \theta k, \\ c = & sk^2\{(s\vartheta_1'' + 2b\vartheta_1'''k^2)[a\vartheta_2\vartheta_1^{(4)}k + b\gamma_0\vartheta_2\vartheta_1' + a(\vartheta_2\vartheta_1^{(4)} - \vartheta_1\vartheta_2\vartheta_2^{(4)}) + \\ & + b\gamma_0(\vartheta_2\vartheta_1' - \vartheta_1\vartheta_2')] - (s\vartheta_2'' + 2b\vartheta_2'''k^2)(a\vartheta_1\vartheta_1^{(4)}k + b\gamma_0\vartheta_1\vartheta_1')\} \times \\ & \times \{\vartheta_1^2[(\alpha\sigma + \theta k)\vartheta_2'' + 2b\vartheta_2'''k^2] - \vartheta_1\vartheta_2[(\alpha\sigma + \theta k)\vartheta_1'' + 2b\vartheta_1'''k^2]\}^{-1}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где ω не зависит от грассмановой переменной θ и антикоммутирующего числа σ , а параметр k является свободным. Таким образом, мы получаем однопериодическое волновое решение уравнения (5.1)

$$u = u_0 + 2\mathcal{D}_x \ln \vartheta(\xi, 0, 0 | \tau), \quad (5.11)$$

где ω и c задаются системой (5.10), в то время как другие параметры $k, \alpha, \tau, \delta \in \Lambda_0$ являются свободными. Три параметра k, α и τ полностью определяют однопериодическую волну.

На рис. 1–3 показаны вещественная часть, мнимая часть и модуль однопериодического волнового решения уравнения сКдФБ с параметрами $a = b = 1$, $k = 0.2$, $\alpha = 1$, $\tau = 2i$ и $\sigma = 0.01$; приведены вид волны в перспективе и вид волны сверху.

5.2. Характерные особенности и асимптотические свойства однопериодических волновых решений. Однопериодическое волновое решение (5.11) имеет следующие простые характеристики.

1. Оно в действительности является чем-то вроде одномерных периодических волн и имеет два фундаментальных периода 1 и τ по фазовой переменной ξ . Его можно рассматривать как параллельную суперпозицию пересекающихся одиночно уединенных волн, разнесенных на расстояние одного периода. Однако ему не требуется быть периодическим по направлениям x , t и θ (см. рис. 1–3).

2. Имеется “зона влияния” среди однопериодических волновых решений уравнения сКдФБ в присутствии грассмановой переменной, что выражает отличие от чисто бозонного случая. Однопериодические волны симметричны относительно зоны, но убывают вдоль нее. Более того, амплитуды периодических волновых решений в виде СТФР возрастают, когда волны уходят из зоны (см. рис. 1).

3. Не наблюдается появления “зоны влияния” в мнимой части и модуле однопериодического волнового решения в виде СТФР. Более того, из формы их графиков представляется, что они имеют одну и ту же форму. Кроме того, периодическое волновое решение в виде СТФР вырождается до чисто бозонной периодической волны, когда σ становится малым, что может сделать и θ достаточно малым (см. рис. 2, 3).

Теперь рассмотрим асимптотические свойства однопериодического волнового решения. Для этого используем решения системы (5.8). Интересно, что соотношение между однопериодическим волновым решением (5.11) и односолитонным решением (5.5a) можно установить следующим образом.

Рис. 1. Вещественная часть однопериодического волнового решения уравнения сКдФБ с параметрами $a = b = 1$, $k = 0.2$, $\alpha = 1$, $\tau = 2i$ и $\sigma = 0.01$: вид волны в перспективе (а) и вид волны сверху (б).

Рис. 2. Мнимая часть однопериодического волнового решения уравнения сКдФБ с теми же параметрами, что на рис. 1: вид волны в перспективе (а) и вид волны сверху (б).

Рис. 3. Модуль однопериодического волнового решения уравнения сКдФБ с теми же параметрами, что на рис. 1: вид волны в перспективе (а) и вид волны сверху (б).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть вектор $(\omega, c)^T$ является решением системы (5.10) и для однопериодического волнового решения (5.11) мы полагаем

$$\gamma_0 = 0, \quad k = \frac{\mu}{2\pi i}, \quad \alpha = \frac{\nu}{2\pi i}, \quad \delta = \frac{\epsilon - \pi i \tau}{2\pi i}, \quad (5.12)$$

где μ, ν и ϵ заданы в уравнении (5.5a). Тогда мы имеем следующие асимптотические свойства:

$$\begin{aligned} c &\rightarrow 0, & 2\pi i \xi + \pi i \tau &\rightarrow \eta = \mu x - (a\mu^3 + b\mu^2)t + \nu\sigma\theta + \epsilon, \\ \vartheta(\xi, 0, 0 | \tau) &\rightarrow 1 + e^\eta \quad \text{при} \quad \wp \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Отсюда следует, что однопериодическое решение (5.11) стремится к односолитонному решению (5.5a) в пределе малых амплитуд, т.е. $(u, \wp) \rightarrow (u_1, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя уравнения (5.8), проанализируем асимптотические свойства однопериодического решения (5.11). Поскольку коэффициенты системы (5.8) представляют собой степенной ряд по $\wp$, его решение ω и c также должно быть рядом по $\wp$. Запишем явно функции $\vartheta_1, \vartheta_1'', \vartheta_1''', \vartheta_1^{(4)}, \vartheta_2, \vartheta_2', \vartheta_2'', \vartheta_2'''$ и $\vartheta_2^{(4)}$ системы (5.8) в виде ряда по $\wp$:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= 1 + 2\wp^4 + \dots + 2\wp^{4n^2} + \dots, \\ \vartheta_1' &= -64\pi^3 i \wp^4 - 256\pi^3 i \wp^{16} - \dots - 64\pi^3 i n^2 \wp^{4n^2} + \dots, \\ \vartheta_1'' &= -32\pi^2 \wp^4 - 128\pi^2 \wp^{16} - 32\pi^2 n^2 \wp^{4n^2} - \dots, \\ \vartheta_1^{(4)} &= 128\pi^4 \wp^4 + 512\pi^4 \wp^{16} + \dots + 512n^4 \wp^{4n^2} + \dots, \\ \vartheta_2 &= 2\wp + 2\wp^9 + \dots + 2\wp^{(2n-1)^2} + \dots, \\ \vartheta_2' &= -16\pi^3 i \wp - 144\pi^3 i \wp^9 - \dots - 16\pi^3 i (2n-1)^2 \wp^{(2n-1)^2} - \dots, \\ \vartheta_2'' &= -8\pi^2 \wp - 72\pi^2 \wp^9 - \dots - 8\pi^2 (2n-1)^2 \wp^{(2n-1)^2} - \dots, \\ \vartheta_2^{(4)} &= 32\pi^4 \wp + 2592\pi^4 \wp^9 + \dots + 32\pi^4 (2n-1)^4 \wp^{(2n-1)^2} + \dots, \\ \vartheta_1''' &= \vartheta_2''' = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Предположим, что решение ω и c системы (5.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \omega_1 \wp + \omega_2 \wp^2 + \dots = \omega_0 + o(\wp), \\ c &= c_0 + c_1 \wp + c_2 \wp^2 + \dots = c_0 + o(\wp). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Подставляя уравнения (5.14) и (5.15) в систему (5.8) и полагая $\wp \rightarrow 0$, немедленно получаем систему

$$\begin{aligned} -32\pi^2(\alpha\sigma + \theta k)\omega_0 + 128a\pi^4(\alpha\sigma + \theta k)k^3 - 64b\pi^3 i(\alpha\sigma + \theta k)k^2 + c_0 &= 0, \\ -8\pi^2(\alpha\sigma + \theta k)\omega_0 + 32a\pi^4(\alpha\sigma + \theta k)k^3 - 16b\pi^3 i(\alpha\sigma + \theta k)k^2 + c_0 &= 0, \end{aligned}$$

которая имеет решение

$$\omega_0 = 4a\pi^2 k^3 - 2b\pi i k^2, \quad c_0 = 0. \quad (5.16)$$

Комбинируя (5.12) и (5.16), получаем

$$2\pi i \omega \rightarrow 8a\pi^3 i k^3 + 4b\pi^2 k^2 = -a\mu^3 - b\mu^2, \quad c \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \wp \rightarrow 0,$$

или, эквивалентно,

$$\tilde{\xi} = 2\pi i\xi + \pi i\tau = \mu x + 2\pi i\omega t + \nu\sigma\theta + \epsilon \rightarrow \mu x - (a\mu^3 + b\mu^2)t + \nu\sigma\theta + \epsilon = \eta \quad \text{при } \wp \rightarrow 0. \quad (5.17)$$

Чтобы показать, что однопериодическая волна (5.11) вырождается в односолитонное решение (5.5a) в пределе $\wp \rightarrow 0$, сначала разложим функцию периода $\vartheta(\xi, 0, 0 | \tau)$ как

$$\vartheta(\xi, 0, 0 | \tau) = 1 + (e^{2\pi i\xi} + e^{-2\pi i\xi})\wp^2 + (e^{4\pi i\xi} + e^{-4\pi i\xi})\wp^8 + \dots \quad (5.18)$$

Используя преобразование (5.12) и уравнения (5.16), (5.17), получаем

$$\vartheta(\xi, 0, 0 | \tau) = 1 + e^{\tilde{\xi}} + (e^{-\tilde{\xi}} + e^{2\tilde{\xi}})\wp^4 + (e^{-2\tilde{\xi}} + e^{3\tilde{\xi}})\wp^{12} + \dots \rightarrow 1 + e^{\tilde{\xi}} \rightarrow 1 + e^{\eta} \quad \text{при } \wp \rightarrow 0, \quad (5.19)$$

что вместе с решением (5.11) дает формулу (5.13). Отсюда можно заключить, что однопериодическое решение (5.11) переходит как раз в односолитонное решение (5.5a), если амплитуда $\wp \rightarrow 0$.

5.3. Построение двухпериодических волновых решений уравнения сКдФБ. Построим двухпериодические волновые решения уравнения сКдФБ (5.1), которые являются двумерным обобщением однопериодических волновых решений. Рассматриваемые здесь двухпериодические волны имеют трехмерные поля скоростей и двумерные поверхностные картины. Согласно теореме 4.2 $k_i, \omega_i, \alpha_i, \delta_i, \sigma$ и θ , $i = 1, 2$, должны удовлетворять системе

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} & [-4\pi^2 \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\alpha}\sigma + \boldsymbol{\theta}\mathbf{k} \rangle \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\omega} \rangle + 16a\pi^4 \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\alpha}\sigma + \boldsymbol{\theta}\mathbf{k} \rangle \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{k} \rangle^3 - \\ & - 16b\pi^3 i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{k} \rangle^2 \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\omega} \rangle + 2bu_0\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{k} \rangle + c] \times \\ & \times e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\tau}(n-\boldsymbol{\theta}_1/2), n-\boldsymbol{\theta}_1/2 \rangle} = 0, \end{aligned} \quad (5.20a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} & [-4\pi^2 \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\alpha}\sigma + \boldsymbol{\theta}\mathbf{k} \rangle \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\omega} \rangle + 16a\pi^4 \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\alpha}\sigma + \boldsymbol{\theta}\mathbf{k} \rangle \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{k} \rangle^3 - \\ & - 16b\pi^3 i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{k} \rangle^2 \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\omega} \rangle + 2bu_0\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{k} \rangle + c] \times \\ & \times e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\tau}(n-\boldsymbol{\theta}_2/2), n-\boldsymbol{\theta}_2/2 \rangle} = 0, \end{aligned} \quad (5.20б)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} & [-4\pi^2 \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3, \boldsymbol{\alpha}\sigma + \boldsymbol{\theta}\mathbf{k} \rangle \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle + 16a\pi^4 \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3, \boldsymbol{\alpha}\sigma + \boldsymbol{\theta}\mathbf{k} \rangle \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3, \mathbf{k} \rangle^3 - \\ & - 16b\pi^3 i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3, \mathbf{k} \rangle^2 \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle + 2bu_0\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_3, \mathbf{k} \rangle + c] \times \\ & \times e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\tau}(n-\boldsymbol{\theta}_3/2), n-\boldsymbol{\theta}_3/2 \rangle} = 0, \end{aligned} \quad (5.20в)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} & [-4\pi^2 \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4, \boldsymbol{\alpha}\sigma + \boldsymbol{\theta}\mathbf{k} \rangle \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4, \boldsymbol{\omega} \rangle + 16a\pi^4 \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4, \boldsymbol{\alpha}\sigma + \boldsymbol{\theta}\mathbf{k} \rangle \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4, \mathbf{k} \rangle^3 - \\ & - 16b\pi^3 i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4, \mathbf{k} \rangle^2 \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4, \boldsymbol{\omega} \rangle + 2bu_0\pi i \langle 2\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}_4, \mathbf{k} \rangle + c] \times \\ & \times e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\tau}(n-\boldsymbol{\theta}_4/2), n-\boldsymbol{\theta}_4/2 \rangle} = 0, \end{aligned} \quad (5.20г)$$

где $\theta_1 = (0, 0)^T$, $\theta_2 = (1, 0)^T$, $\theta_3 = (0, 1)^T$, $\theta_4 = (1, 1)^T$. Вводя обозначения

$$\begin{aligned}\vartheta_k(\xi, \wp) &= \vartheta\left(2\xi, \mathbf{0}, -\frac{\theta_k}{2}\middle| 2\tau\right) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{4\pi i \langle \xi, \mathbf{n} - \theta_k/2 \rangle} \mathfrak{S}_k(\mathbf{n}), \\ \mathfrak{S}_k(\mathbf{n}) &= \wp_1^{(2n_1 - \theta_k^1)^2} \wp_2^{(2n_2 - \theta_k^2)^2} \wp_3^{(2n_1 - \theta_k^1)(2n_2 - \theta_k^2)}, \\ \wp_1 &= e^{(\pi i/2)\tau_{11}}, \quad \wp_2 = e^{(\pi i/2)\tau_{22}}, \quad \wp_3 = e^{\pi i\tau_{12}}, \\ \theta_i &= (\theta_i^1, \theta_i^2)^T, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad \nabla = (\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}, \dots, \partial_{\xi_N}), \\ \partial_x &= k_1 \partial_{\xi_1} + k_2 \partial_{\xi_2} + \dots + k_N \partial_{\xi_N} = \mathbf{k} \cdot \nabla, \\ \partial_t &= \omega_1 \partial_{\xi_1} + \omega_2 \partial_{\xi_2} + \dots + \omega_N \partial_{\xi_N} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla, \\ \mathcal{D} &= (\alpha_1 \sigma_1 + \theta k_1) \partial_{\xi_1} + (\alpha_2 \sigma_2 + \theta k_2) \partial_{\xi_2} + \dots + (\alpha_N \sigma_N + \theta k_N) \partial_{\xi_N} = (\boldsymbol{\alpha} \sigma + \theta \mathbf{k}) \cdot \nabla,\end{aligned}\tag{5.21}$$

можно записать систему (5.20a)–(5.20r) как линейную:

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{\alpha} \sigma + \theta \mathbf{k}) \cdot \nabla] (\mathbf{k} \cdot \nabla) \vartheta_1(0, \wp) + a[(\boldsymbol{\alpha} \sigma + \theta \mathbf{k}) \cdot \nabla] (\mathbf{k} \cdot \nabla)^3 \vartheta_1(0, \wp) + \\ + 2b(\mathbf{k} \cdot \nabla)^2 (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \vartheta_1(0, \wp) + bu_0(\mathbf{k} \cdot \nabla) \vartheta_1(0, \wp) + \vartheta_1(0, \wp)c = 0,\end{aligned}\tag{5.22a}$$

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{\alpha} \sigma + \theta \mathbf{k}) \cdot \nabla] (\mathbf{k} \cdot \nabla) \vartheta_2(0, \wp) + a[(\boldsymbol{\alpha} \sigma + \theta \mathbf{k}) \cdot \nabla] (\mathbf{k} \cdot \nabla)^3 \vartheta_2(0, \wp) + \\ + 2b(\mathbf{k} \cdot \nabla)^2 (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \vartheta_2(0, \wp) + bu_0(\mathbf{k} \cdot \nabla) \vartheta_2(0, \wp) + \vartheta_2(0, \wp)c = 0,\end{aligned}\tag{5.22б}$$

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{\alpha} \sigma + \theta \mathbf{k}) \cdot \nabla] (\mathbf{k} \cdot \nabla) \vartheta_3(0, \wp) + a[(\boldsymbol{\alpha} \sigma + \theta \mathbf{k}) \cdot \nabla] (\mathbf{k} \cdot \nabla)^3 \vartheta_3(0, \wp) + \\ + 2b(\mathbf{k} \cdot \nabla)^2 (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \vartheta_3(0, \wp) + bu_0(\mathbf{k} \cdot \nabla) \vartheta_3(0, \wp) + \vartheta_3(0, \wp)c = 0,\end{aligned}\tag{5.22в}$$

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{\alpha} \sigma + \theta \mathbf{k}) \cdot \nabla] (\mathbf{k} \cdot \nabla) \vartheta_4(0, \wp) + a[(\boldsymbol{\alpha} \sigma + \theta \mathbf{k}) \cdot \nabla] (\mathbf{k} \cdot \nabla)^3 \vartheta_4(0, \wp) + \\ + 2b(\mathbf{k} \cdot \nabla)^2 (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \vartheta_4(0, \wp) + bu_0(\mathbf{k} \cdot \nabla) \vartheta_4(0, \wp) + \vartheta_4(0, \wp)c = 0,\end{aligned}\tag{5.22г}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \partial_x^p \partial_t^q \vartheta(\xi, \tau) &= [(\boldsymbol{\alpha} \sigma + \theta \mathbf{k}) \cdot \nabla] (\mathbf{k} \cdot \nabla)^p (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)^q \vartheta(\xi, \tau) = \\ &= (\boldsymbol{\alpha} \sigma \cdot \nabla) (\mathbf{k} \cdot \nabla)^p (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)^q \vartheta(\xi, \tau) + \theta (\mathbf{k} \cdot \nabla)^{p+1} (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)^q \vartheta(\xi, \tau),\end{aligned}$$

$p, q = 1, 2, \dots$. Эту систему можно решить следующим способом: получить u_0 , решая линейное уравнение с одним неизвестным, затем подставить его в оставшиеся уравнения, чтобы получить ω_1 , ω_2 и c . Имея решение $(\omega_1, \omega_2, u_0, c)$, мы находим двухпериодическое волновое решение суперсимметричного уравнения (5.1):

$$u = u_0 + 2\mathcal{D}_x \ln \vartheta(\xi, \mathbf{0}, \mathbf{0} | \tau),\tag{5.23}$$

где параметры $\omega_1, \omega_2, u_0, c$ задаются уравнениями (5.22a)–(5.22г), в то время как другие параметры $k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, \tau_{11}, \tau_{12}$ и τ_{22} являются свободными. Двухпериодическая волна задается семью параметрами $k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2, \tau_{11}, \tau_{12}$ и τ_{22} .

На рис. 4–6 показана вещественная часть, мнимая часть и модуль двухпериодического волнового решения уравнения СКдФБ с параметрами $k_1 = 0.2$, $k_2 = 2$, $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 3$, $\tau_{11} = i$, $\tau_{12} = 0.5i$, $\tau_{22} = 2i$ и $\sigma = 10^{-6}$; приведены вид волны в перспективе и вид волны сверху.

5.4. Характерные особенности и асимптотические свойства двухпериодических волновых решений. Двухпериодическое волновое решение (5.23) обладает следующими простыми характеристиками.

1. Оно является прямым обобщением однопериодических волн, его поверхностная картина двумерна, т.е. имеются две фазовые переменные ξ_1 и ξ_2 , которые имеют

Рис. 4. Вещественная часть двухпериодического волнового решения уравнения сКдФБ с параметрами $k_1 = 0.2$, $k_2 = 2$, $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 3$, $\tau_{11} = i$, $\tau_{12} = 0.5i$, $\tau_{22} = 2i$ и $\sigma = 10^{-6}$: вид волны в перспективе (а) и вид волны сверху (б).

Рис. 5. Мнимая часть двухпериодического волнового решения уравнения сКдФБ с теми же параметрами, что на рис. 4: вид волны в перспективе (а) и вид волны сверху (б).

Рис. 6. Модуль двухпериодического волнового решения уравнения сКдФБ с теми же параметрами, что на рис. 4: вид волны в перспективе (а) и вид волны сверху (б).

два независимых пространственных периода в двух независимых горизонтальных направлениях. Решение имеет четыре фундаментальных периода $\{e_1, e_2\}$ и $\{\tau_1, \tau_2\}$ из (ξ_1, ξ_2) . Его вещественная часть не является периодической по направлению θ , в то время как его вещественная и мнимая части и модуль являются периодическими по направлениям x и t .

2. Имеется также “зона влияния” среди вещественной части двухпериодических волн для уравнения сКдФБ в присутствии грасмановой переменной (см. рис. 4).

3. Как и в случае однопериодической волны в виде СТФР, не наблюдается того, что “зона влияния” появляется среди мнимой части и модуля двухпериодического волнового решения в виде СТФР для уравнения сКдФБ. Из вида их графиков также представляется, что они имеют одни и те же характеристики. Кроме того, периодическая волна в виде СТФР вырождается до чисто бозонной периодической волны в виде тета-функции Римана, если σ становится малой, что может сделать и θ достаточно малым (см. рис. 5 и 6).

Наконец, рассмотрим асимптотические свойства двухпериодического решения (5.23). Аналогично теореме 5.1 можно установить следующее соотношение между двухпериодическим решением (5.23) и двухсолитонным решением (5.56).

ТЕОРЕМА 5.2. Если $(\omega_1, \omega_2, u_0, c)^T$ представляет собой решение системы (5.22a)–(5.22r), а для двухпериодического волнового решения (5.23) мы возьмем

$$k_i = \frac{\mu_i}{2\pi i}, \quad \alpha_i = \frac{\nu_i}{2\pi i}, \quad \delta_i = \frac{\epsilon_i - i\pi\tau_{ii}}{2\pi i}, \quad \tau_{12} = -\frac{A_{12}}{2\pi i}, \quad i = 1, 2, \quad (5.24)$$

где $\mu_i, \nu_i, \epsilon_i, i = 1, 2$, и A_{12} заданы уравнением (5.56), то при наличии связи $k_1\alpha_2 - k_2\alpha_1 = 0$ получим следующие асимптотические соотношения:

$$\begin{aligned} u_0 \rightarrow 0, \quad c \rightarrow 0, \quad 2\pi i\xi_i + \pi i\tau_{ii} \rightarrow \mu_i x - (a\mu_i^3 + b\mu_i^2)t + \nu_i\sigma\theta + \epsilon_i = \eta_i, \\ \vartheta(\xi, \mathbf{0}, \mathbf{0} | \tau) \rightarrow 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} \quad \text{при} \quad \wp_1, \wp_2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Таким образом, двухпериодическое решение (5.23) стремится к двухсолитонному решению (5.56) в пределе малых амплитуд, т. е. при $(u, \wp_1, \wp_2) \rightarrow (u_2, 0, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя уравнение (5.24), получим, что связь $k_1\alpha_2 - k_2\alpha_1 = 0$ приводит к $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 = 0$, откуда следует, что $\tau_{12} = -A_{12}/(2\pi)$ не зависит от грасмановой переменной θ в соответствии с решением (5.56). Для тета-функции (4.18) явно разложим функцию $\vartheta(\xi, \mathbf{0}, \mathbf{0} | \tau)$:

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi, \mathbf{0}, \mathbf{0} | \tau) = 1 + (e^{2\pi i\xi_1} + e^{-2\pi i\xi_1})e^{\pi i\tau_{11}} + (e^{2\pi i\xi_2} + e^{-2\pi i\xi_2})e^{\pi i\tau_{22}} + \\ + (e^{2\pi i(\xi_1 + \xi_2)} + e^{-2\pi i(\xi_1 + \xi_2)})e^{\pi i(\tau_{11} + 2\tau_{12} + \tau_{22})} + \dots \end{aligned} \quad (5.26)$$

Теперь, используя уравнение (5.56), получаем

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi, \mathbf{0}, \mathbf{0} | \tau) = 1 + e^{\tilde{\xi}_1} + e^{\tilde{\xi}_2} + e^{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + 2\pi i\tau_{12}} + e^{-\tilde{\xi}_1}\wp_1^4 + e^{-\tilde{\xi}_2}\wp_2^4 + e^{-\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2 + 2\pi i\tau_{12}} + \dots \rightarrow \\ \rightarrow 1 + e^{\tilde{\xi}_1} + e^{\tilde{\xi}_2} + e^{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + 2\pi i\tau_{12}} \quad \text{при} \quad \wp_1, \wp_2 \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.27)$$

где $\tilde{\xi}_i = \mu_i x + \tilde{\omega}_i t + \nu_i\sigma\theta + \epsilon_i$, $\tilde{\omega}_i = 2\pi i\omega_i$, $i = 1, 2$.

Остается доказать, что

$$c \rightarrow 0, \quad \tilde{\omega}_i \rightarrow -a\mu_i^3 - b\mu_i^2, \quad \tilde{\xi}_i \rightarrow \eta_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{при} \quad \wp_1, \wp_2 \rightarrow 0. \quad (5.28)$$

Аналогично теореме 5.1 пусть решение системы (5.22a)–(5.22r) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_{10} + \omega_{11}\wp_1 + \omega_{12}\wp_2 + o(\wp_1, \wp_2), \quad \omega_2 = \omega_{20} + \omega_{21}\wp_1 + \omega_{22}\wp_2 + o(\wp_1, \wp_2), \\ u_0 = u_{00} + u_{01}\wp_1 + u_{02}\wp_2 + o(\wp_1, \wp_2), \quad c = c_0 + c_1\wp_1 + c_2\wp_2 + o(\wp_1, \wp_2) \end{aligned} \quad (5.29)$$

в случае $N = 1$. Для системы (5.29) можно разложить каждую функцию по ϑ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, а в системе (5.22a)–(5.22г) – в ряд по $\wp_1, \wp_2$. В действительности нам требуется только первый порядок разложений системы (5.22a)–(5.22г) по $\wp_1, \wp_2$, чтобы получить асимптотические соотношения (5.25). Полагая $\wp_1, \wp_2 \rightarrow 0$, получаем систему

$$\begin{aligned} & -16\pi^2(\alpha_1\sigma + \theta k_1)\omega_{10} + 64a\pi^4(\alpha_1\sigma + \theta k_1)k_1^3 - 32b\pi^3i(\alpha_1\sigma + \theta k_1)k_1^2 + \\ & + 8bu_{00}\pi ik_1 + c_0 = 0, \\ & -16\pi^2(\alpha_2\sigma + \theta k_2)\omega_{20} + 64a\pi^4(\alpha_2\sigma + \theta k_2)k_2^3 - 32b\pi^3i(\alpha_2\sigma + \theta k_2)k_2^2 + \\ & + 8bu_{00}\pi ik_2 + c_0 = 0, \\ & 8\pi^2(\alpha_1\sigma - \theta k_1)\omega_{10} - 32a\pi^4(\alpha_1\sigma + \theta k_1)k_1^3 + 16b\pi^3i(\alpha_1\sigma + \theta k_1)k_1^2 - \\ & - 4bu_{00}\pi ik_1 - c_0 = 0, \\ & 8\pi^2(\alpha_2\sigma + \theta k_2)\omega_{20} - 32a\pi^4(\alpha_2\sigma + \theta k_2)k_2^3 + 16b\pi^3i(\alpha_2\sigma + \theta k_2)k_2^2 - \\ & - 4bu_{00}\pi ik_2 - c_0 = 0, \end{aligned}$$

которая в системе (5.22a)–(5.22г) имеет решение

$$c_0 = 0, \quad u_{00} = 0, \quad \omega_{10} = 4a\pi^2k_1^3 - 2b\pi ik_1^2, \quad \omega_{20} = 4a\pi^2k_2^3 - 2b\pi k_2^2. \quad (5.30)$$

Используя (5.29) и (5.30), приходим к

$$\begin{aligned} u_0 &= o(\wp_1, \wp_2) \rightarrow 0, \quad c = o(\wp_1, \wp_2) \rightarrow 0, \\ \omega_1 &= 4a\pi^2k_1^3 - 2b\pi ik_1^2 + o(\wp_1, \wp_2) \rightarrow 4a\pi^2k_1^3 - 2b\pi ik_1^2, \\ \omega_2 &= 4a\pi^2k_2^3 - 2b\pi k_2^2 + o(\wp_1, \wp_2) \rightarrow 4a\pi^2k_2^3 - 2b\pi k_2^2 \quad \text{при } \wp_1, \wp_2 \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

откуда следует уравнение (5.25). Все сказанное выше позволяет сделать вывод, что двухпериодическое решение (5.23) стремится к двухсолитонному решению (5.56) при $(\wp_1, \wp_2) \rightarrow (0, 0)$.

6. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе на основании многомерной СТФР предложены две ключевые теоремы для явного построения периодических волновых решений в виде мультипериодической СТФР для суперсимметричных уравнений в суперпространстве $\mathbb{R}_\Lambda^{N+1, M}$, что представляет собой ясное и непосредственное обобщение метода супер-Хироты–Римана. В качестве приложения метода мы применили его к уравнению сКдФБ. На основании этого мы получили одно- и двухпериодические волновые решения в виде СТФР для уравнения сКдФБ. Проводя предельную процедуру, мы подробно анализировали асимптотическое поведение мультипериодических периодических волн и получили точные соотношения между периодическими волновыми решениями и хорошо известными солитонными решениями, для которых строго показано, что периодические волновые решения стремятся к солитонным решениям в пределе малых амплитуд. В рамках того же подхода можно также получить эти периодические волновые решения для других суперсимметричных уравнений. Коль скоро такое суперсимметричное уравнение записано в билинейной форме, его периодические волновые решения можно непосредственно получить, используя теоремы 4.1 и 4.2.

Приведем некоторые другие выводы из наших результатов.

1. Обобщенный метод супер-Хироты–Римана также применим к нелинейным дифференциальным уравнениям таким, как суперсимметричное уравнение синус-Гордон [38], [51], [52]

$$\overline{\mathcal{D}}\mathcal{D}\Phi = 2i \sin \Phi. \quad (6.1)$$

Используя нелинейную подстановку

$$\Phi = 2i \ln \frac{f}{g},$$

можно получить следующий супербилинейный вид:

$$\mathcal{L}(S, D_X, D_T) = \begin{cases} S_{XT} f \cdot f - \frac{1}{2i}(g^2 - f^2), \\ S_{XT} g \cdot g - \frac{1}{2i}(f^2 - g^2), \end{cases} \quad (6.2)$$

где билинейный оператор $S_{XT} f \cdot f := f[D_T, D_X]f - [D_T f, D_X f]$ суперкалибровочно инвариантен по отношению к суперкалибровке $e^{kx + \omega t + \alpha \sigma \theta + \delta}$. Все остальное аналогично случаю нелинейного дифференциального уравнения, и мы не приводим здесь подробного доказательства.

2. Результаты можно распространить на случай $N > 2$, хотя остаются некоторые сложности в вычислении. В настоящем разделе мы рассмотрим только условия для N -периодического волнового решения суперсимметричного уравнения (4.1). Тета-функция принимает вид

$$\vartheta(\xi, \varepsilon, \mathbf{0} | \tau) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} e^{2\pi i \langle \xi + \varepsilon, \mathbf{n} \rangle + \pi i \langle \tau \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}, \quad (6.3)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)^T \in \mathbb{Z}^N$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{C}^N$, $\xi_i = k_i x_1 + l_i x_2 + \dots + \rho_i x_N + \omega_i t + \alpha_i \sigma_1 \theta_1 + \dots + \gamma_i \sigma_M \theta_M + \delta_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, а $-i\tau$ является положительно-определенной и вещественнозначной симметричной $(N \times N)$ -матрицей.

Аналогично функция удовлетворяет билинейному уравнению (4.8), и из (6.3) и (4.8) мы получаем

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(S, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t) \vartheta(\xi, \varepsilon, \mathbf{0} | \tau) \cdot \vartheta(\xi, \varepsilon', \mathbf{0} | \tau) = \\ &= \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} \mathcal{L}(2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}, \mathbf{k} \rangle, \dots, 2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}, \boldsymbol{\rho} \rangle, 2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}, \boldsymbol{\omega} \rangle, \dots \\ & \quad \dots, 2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}, \alpha \sigma_1 + \theta_1 \mathbf{k} \rangle + \dots + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}, \gamma \sigma_M + \theta_M \boldsymbol{\rho} \rangle) \times \\ & \quad \times e^{2\pi i \langle \xi, \mathbf{m} + \mathbf{n} \rangle + \pi i (\langle \tau \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle + \langle \tau \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle) + 2\pi i (\langle \varepsilon', \mathbf{m} \rangle + \langle \varepsilon, \mathbf{n} \rangle)} = \\ &= \sum_{\mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^N} \left\{ \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \mathbf{k} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \boldsymbol{\omega} \rangle, \dots \right. \\ & \quad \left. \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \gamma \sigma_M + \theta_M \boldsymbol{\rho} \rangle) e^{2\pi i \langle \tau(\mathbf{n} - \mathbf{m}'/2), \mathbf{n} - \mathbf{m}'/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}'/2, \varepsilon - \varepsilon' \rangle} \right\} \times \\ & \quad \times e^{2\pi i \langle 2\xi + \varepsilon + \varepsilon', \mathbf{m}' \rangle + \pi i \langle \tau \mathbf{m}', \mathbf{m}' \rangle} \triangleq \\ & \triangleq \sum_{\mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^N} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{m}'_1, \mathbf{m}'_2) \vartheta\left(2\xi, \varepsilon + \varepsilon', \frac{\mathbf{m}'}{2} \middle| \tau\right) = \\ &= \sum_{\mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^N} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{m}') \vartheta\left(2\xi, \varepsilon + \varepsilon', \frac{\mathbf{m}'}{2} \middle| \tau\right), \quad \mathbf{m}' = \mathbf{m} + \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Сдвигая индекс $\mathbf{n}$ как $\mathbf{n}' = \mathbf{n} - \delta_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, N$, можно вычислить

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{m}') &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \mathbf{k} \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \boldsymbol{\omega} \rangle, \dots \\ &\quad \dots, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \gamma\sigma_M + \theta_M \boldsymbol{\rho} \rangle) e^{2\pi i \langle \tau(\mathbf{n} - \mathbf{m}'/2), \mathbf{n} - \mathbf{m}'/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \mathbf{m}'/2, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle} = \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} \mathcal{L}\left(2\pi i \sum_{i=1}^N [2n'_i - (m'_i - 2\delta_{ij})] k_i, \dots, 2\pi i \sum_{i=1}^N [2n'_i - (m'_i - 2\delta_{ij})] \omega_i, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, 2\pi i \sum_{i=1}^N [2n'_i - (m'_i - 2\delta_{ij})] (\gamma\sigma_M + \theta_M \boldsymbol{\rho}), \right) \times \\ &\quad \times e^{2\pi i \sum_{i,k=1}^N [(n'_i + \delta_{ij})(n'_k + \delta_{kj}) + (m'_i/2 - n'_i - \delta_{ij})(m'_k/2 - n'_k - \delta_{kj}) + (n'_i + \delta_{ij} - m'_i/2)(\varepsilon_k - \varepsilon'_k)] \tau_{ik}} = \\ &= \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{m}' - \mathbf{2}) e^{2\pi i \langle 2\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}', \mathbf{n} + \boldsymbol{\theta}/2 \rangle + \pi i \langle \tau(\mathbf{n} + \boldsymbol{\theta}/2), \mathbf{n} + \boldsymbol{\theta}/2 \rangle}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$, $\theta_i = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0 \right)$, δ_{ij} – дельта-символ Кронекера.

Теперь, если

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(0, 0, \dots, 0) &= \tilde{\mathcal{L}}(1, 0, \dots, 0) = \tilde{\mathcal{L}}(0, 1, \dots, 0) = \dots \\ &= \tilde{\mathcal{L}}(0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \dots = \tilde{\mathcal{L}}(0, 0, \dots, 1) = 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

то $\tilde{\mathcal{L}}(m'_1, \dots, m'_N) = 0$ для всех $m'_1, \dots, m'_N \in \mathbb{Z}$ и, таким образом, функция (6.3) является точным решением уравнения (4.8).

В заключение, используя многомерную СТФР, мы представили ясное и непосредственное построение периодических волновых решений в виде многомерной СТФР для билинейных уравнений Хироты. Мы надеемся, что этот метод мог бы помочь в улучшении понимания разнообразия и интегрируемости суперсимметричных уравнений, при этом он также пригоден для других более общих нелинейных эволюционных уравнений математической физики.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Некоторые свойства интеграла $\mathcal{B}(f)$

Помимо условий 1 и 2, имеются следующие свойства интеграла $\mathcal{B}(f)$ [47], [48]:

$$\int \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n = 1; \quad (A.1)$$

интеграл производной:

$$\int \frac{\partial f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n = 0, \quad f \in \tilde{\mathcal{F}}_n, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (A.2)$$

интегрирование по частям: если $g(\boldsymbol{\theta})$ – однородная функция четности $p(g)$, то

$$\mathcal{B}(f) \left(f \frac{\partial g}{\partial \theta_i} \right) = (-1)^{1+p(g)} \mathcal{B} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_i} g \right), \quad f, g \in \tilde{\mathcal{F}}_n, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (A.3)$$

линейная замена переменных: если $\boldsymbol{\theta} = A\xi$, A^{-1} существует, то

$$\int f(\boldsymbol{\theta}) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n = (\det A)^{-1} \int f(A\xi) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \quad (A.4)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Некоторые свойства билинейного оператора супер-Хироты

В настоящем приложении мы перечислим несколько свойств билинейного оператора супер-Хироты, которые полезны при выводе билинейных форм [38], [47], [48]:

$$S(D_x f \cdot g) \cdot g f = D_x(Sf \cdot g) \cdot g f; \quad (\text{Б.1})$$

$$S^{2N} f \cdot g = (D_{x_1} D_{x_2} \dots D_{x_N})^N f \cdot g; \quad (\text{Б.2})$$

$$(SD_t f \cdot f)g^2 - f^2(SD_t g \cdot g) = 2S(D_t f \cdot g) \cdot g \cdot f; \quad (\text{Б.3})$$

$$\begin{aligned} S(D_x^2 f \cdot g) \cdot (D_x g \cdot f) - D(SD_x f \cdot g) \cdot (D_x g \cdot f) = \\ = \frac{1}{2} [(SD_x f \cdot f)(D_x^2 g \cdot g) - (SD_x g \cdot g)(D_x^2 f \cdot f)]; \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

$$\begin{aligned} (SD_x^3 f \cdot f)g \cdot g - f^2(SD_x^3 g \cdot g) = 2S[(D_x^3 f \cdot g) \cdot f g + 3(D_x^2 f \cdot g) \cdot (D_x g \cdot f)] - \\ - 3[(SD_x f \cdot f)(D_x^2 g \cdot g) - (SD_x g \cdot g)(D_x^2 f \cdot f)]; \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

$$\begin{aligned} S^{2N+1} e^{\xi_1} \cdot e^{\xi_2} = [\langle \sigma, \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 \rangle + \langle \theta, (k_1 - k_2)E_M \rangle + \langle \theta, (l_1 - l_2)E_M \rangle + \dots \\ \dots + \langle \theta, (\rho_1 - \rho_2)E_M \rangle] [(k_1 - k_2)^N + (l_1 - l_2)^N + \dots + (\rho_1 - \rho_2)^N] e^{\xi_1 + \xi_2}; \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

$$\begin{aligned} S^{2N+1} 1 \cdot e^{\xi_1} = (-1)^{1+N} [\langle \sigma, \mathcal{V}_1 \rangle + \langle \theta, k_1 E_M \rangle + \langle \theta, l_1 E_M \rangle + \dots \\ \dots + \langle \theta, \rho_1 E_M \rangle] (k_1^N + l_1^N + \dots + \rho_1^N) e^{\xi_1} = \\ = (-1)^{1+N} S^{2N+1} e^{\xi_1} \cdot 1, \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

где $\xi_i = k_i x_1 + l_i x_2 + \dots + \rho_i x_N + \omega_i t + \alpha_i \theta_1 \sigma_1 + \beta_i \theta_2 \sigma_2 + \dots + \gamma_i \theta_M \sigma_M + \delta_i$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) \in \Lambda_1^M$, $\mathcal{V}_i = (\alpha_i, \beta_i, \dots, \gamma_i)$, $k_i, l_i, \dots, \rho_i, \omega_i, \delta_i \in \Lambda_0$, $\alpha_i, \beta_i, \dots, \gamma_i \in \mathbb{C}$ – параметры, а $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M) \in G_M$, $E_M = \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_M \right)$, $i = 1, 2$;

$$2D \ln f = \frac{Df}{f}, \quad 2D^3 \ln f = \frac{S^3 f \cdot f}{f^2}, \quad 2D \partial_t \ln f = \frac{SD_t f \cdot f}{f^2}, \quad (\text{Б.8})$$

где f – грассманова четная функция; кроме того, если G и F – грассмановы функции, то

$$D^3 \left(\frac{G}{F} \right) = \frac{S^3 G \cdot F}{F^2} + (-1)^{1+|G|} \frac{G}{F} \frac{S^3 F \cdot F}{F^2}. \quad (\text{Б.9})$$

Благодарности. Авторы выражают искреннюю признательность редакторам и рецензентам за их замечания. Тянь хотел бы выразить благодарность профессору Дж. Блуману за его вдохновляющие и ценные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке со стороны Doctoral Academic Freshman Award of Ministry of Education of China (грант № 0213C812002), Natural Sciences Foundation of China (грант № 50909017), Tianyuan Foundation of China (грант № 11026165), Research Fund for the Doctoral Program of Ministry of Education of China (грант № 20100041120037) и “Mathematics+X” Key Project of Dalian University of Technology.

Список литературы

- [1] С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 54–66.
- [2] Б. А. Дубровин, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 41–51.
- [3] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:1 (1975), 69–70.
- [4] P. D. Lax, *Commun. Pure Appl. Math.*, **28**:1 (1975), 141–188.
- [5] H. P. McKean, P. van Moerbeke, *Invent. Math.*, **30**:3 (1975), 217–274.
- [6] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enolskii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-Geometrical Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin, 1994.
- [7] F. Gesztesy, H. Holden, *Soliton Equations and Their Algebro-Geometric Solutions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **79**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [8] J. S. Geronimo, F. Gesztesy, H. Holden, *Commun. Math. Phys.*, **258**:1 (2005), 149–177.
- [9] Z. Qiao, *Commun. Math. Phys.*, **239**:1–2 (2003), 309–341.
- [10] R. Zhou, *J. Math. Phys.*, **38**:5 (1997), 2535–2346.
- [11] C. Cao, Y. Wu, X. Geng, *J. Math. Phys.*, **40**:8 (1999), 3948–3970.
- [12] X. Geng, Y. Wu, C. Cao, *J. Phys. A*, **32**:20 (1999), 3733–3742.
- [13] J. Atkinson, F. Nijhoff, *Commun. Math. Phys.*, **299**:2 (2010), 283–304, arXiv:0911.0458.
- [14] Y. C. Hon, E. G. Fan, *J. Math. Phys.*, **46**:3 (2005), 032701, 21 pp.
- [15] R. Hirota, *The Direct Methods in Soliton Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, **155**, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2004.
- [16] R. Hirota, X.-B. Hu, X.-Y. Tang, *J. Math. Anal. Appl.*, **288**:1 (2003), 326–348.
- [17] X.-B. Hu, P. A. Clarkson, *J. Phys. A*, **28**:17 (1995), 5009–5016.
- [18] X.-B. Hu, C.-X. Li, J. J. C. Nimmo, G.-F. Yu, *J. Phys. A*, **38**:1 (2005), 195–204.
- [19] D. Zhang, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **71**:11 (2002), 2649–2656.
- [20] A. Nakamura, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **47**:5 (1979), 1701–1705.
- [21] A. Nakamura, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **48**:4 (1980), 1365–1370.
- [22] R. Hirota, M. Ito, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **50**:1 (1981), 338–342.
- [23] H. H. Dai, E. G. Fan, X. G. Geng, *Periodic wave solutions of nonlinear equations by Hirota's bilinear method*, arXiv: nlin/0602015.
- [24] Y. Zhang, L. Ye, Y. Lv, H. Zhao, *J. Phys. A*, **40**:21 (2007), 5539–5549.
- [25] Y. C. Hon, E. Fan, Z. Qin, *Mod. Phys. Lett. B*, **22**:8 (2008), 547–553.
- [26] E. Fan, Y. C. Hon, *Phys. Rev. E*, **78**:3 (2008), 036607, 13 pp.
- [27] E. Fan, *J. Phys. A*, **42**:9 (2009), 095206, 11 pp.
- [28] E. G. Fan, Y. C. Hon, *Stud. Appl. Math.*, **125**:4 (2010), 343–371.
- [29] W.-X. Ma, R. Zhou, L. Gao, *Mod. Phys. Lett. A*, **24**:21 (2009), 1677–1688.
- [30] S.-F. Tian, H.-Q. Zhang, *J. Math. Anal. Appl.*, **371**:2 (2010), 585–608.
- [31] S.-F. Tian, H.-Q. Zhang, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **16**:1 (2011), 173–186.
- [32] P. Ramond, *Phys. Rev. D*, **3**:10 (1971), 2415–2418.
- [33] J. Wess, B. Zumino, *Nucl. Phys. B*, **70**:1 (1974), 39–50.
- [34] F. A. Berezin, *Introduction to Superalgebra*, Mathematical Physics and Applied Mathematics, **9**, Reidel, Dordrecht, 1987.
- [35] Yu. I. Manin, A. Q. Radul, *Commun. Math. Phys.*, **98**:1 (1985), 65–77.
- [36] P. Mathieu, *J. Math. Phys.*, **29**:11 (1988), 2499–2506.
- [37] W. Oevel, Z. Popowicz, *Commun. Math. Phys.*, **139**:3 (1991), 441–460.
- [38] A. S. Carstea, *Nonlinearity*, **13**:5 (2000), 1645–1656.
- [39] A. S. Carstea, A. Ramani, B. Grammaticos, *Nonlinearity*, **14**:5 (2001), 1419–1423.
- [40] D. Sarma, *Nucl. Phys. B*, **681**:3 (2004), 351–358, arXiv: nlin/0406067).
- [41] Q. P. Liu, Y. F. Xie, *Phys. Lett. A*, **325**:2 (2004), 139–143, arXiv: nlin/0212002.

- [42] Q. P. Liu, *Lett. Math. Phys.*, **35**:2 (1995), 115–122, arXiv: hep-th/9409008.
- [43] Q. P. Liu, X.-B. Hu, M.-X. Zhang, *Nonlinearity*, **18**:4 (2005), 1597–1603, arXiv: nlin/0407050.
- [44] S. Ghosh, D. Sarma, *Nonlinearity*, **16**:2 (2003), 411–418, arXiv: nlin/0202031.
- [45] S.-F. Tian, H.-Q. Zhang, *J. Nonl. Math. Phys.*, **17**:4 (2010), 491–502.
- [46] S.-F. Tian, Z. Wang, H.-Q. Zhang, *J. Math. Anal. Appl.*, **366**:2 (2010), 646–662.
- [47] В. С. Владимиров, И. В. Волович, *ТМФ*, **59**:1 (1984), 3–27.
- [48] В. С. Владимиров, И. В. Волович, *ТМФ*, **60**:2 (1984), 169–198.
- [49] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta*, v. II: *Jacobian Theta Functions and Differential Equations*, Progress in Mathematics, **43**, Birkhäuser, Boston, MA, 1984.
- [50] I. McArthur, C. M. Yung, *Mod. Phys. Lett. A*, **8**:18 (1993), 1739–1745.
- [51] A. S. Carstea, *Hirota bilinear formalism and supersymmetry*, arXiv: nlin/0006032.
- [52] T. Inami, H. Kanno, *Commun. Math. Phys.*, **136**:3 (1991), 519–542.

Поступила в редакцию 27.04.2011