Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Савченко, О. Я. Савченко, Обтекание эллипсоида
гармоническим векторным полем, *ТМФ*, 2012, том 170,
номер 3, 381–392

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6773>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:15:41

© 2012 г.

А. О. Савченко*, О. Я. Савченко†

ОБТЕКАНИЕ ЭЛЛИПСОИДА ГАРМОНИЧЕСКИМ ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ

Рассматривается экранировка внешнего магнитного поля, в которое вносится сверхпроводящий эллипсоид, и изменение распределения скоростей в идеальной жидкости, когда в нее помещают эллипсоид, который эта жидкость обтекает. В обоих случаях решением является гармоническое векторное поле, параллельное поверхности вблизи эллипсоида.

Ключевые слова: магнитное поле, сверхпроводимость, эллипсоид, поверхностные токи, скорость, идеальная жидкость, полином.

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени было аналитически определено гармоническое векторное поле, обтекающее эллипсоид вращения, когда начальное поле, в которое помещают эллипсоид, является однородным [1]–[3]. В настоящей работе впервые аналитически определено осесимметричное гармоническое векторное поле, соосно обтекающее эллипсоид вращения, помещенный в любое заданное осесимметричное гармоническое поле.

Осесимметричное гармоническое векторное поле, заданное на конечном участке оси симметрии, однозначно определяется в любом объеме, включающем в себя этот участок [4]. В качестве искомого векторного гармонического поля рассмотрим осесимметричное магнитное гармоническое поле, которое обтекает соосно вложенный эллипсоид вращения. Токи на поверхности этого эллипсоида, компенсирующие начальное магнитное поле на отрезке оси, находящемся внутри эллипсоида, компенсируют и начальное магнитное поле во всем объеме эллипсоида [4], [5], и нормальную составляющую начального магнитного поля вне эллипсоида вблизи его поверхности [3]. Это означает, что задача обтекания как сверхпроводящего эллипсоида, так и любого сверхпроводящего тела сводится к определению поверхностных токов, компенсирующих начальное осевое магнитное поле на любом участке оси внутри эллипсоида [5].

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: savch@ommfao1.sccc.ru

†Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Рис. 1

Осесимметричное начальное магнитное поле $B_0(Z, R)$ индуцирует на поверхности сверхпроводящего тела, имеющего ту же ось симметрии, что и магнитное поле, круговые токи вокруг общей оси, когда тело помещается в поле. Согласно формуле Био–Савара [6] эти токи создают на оси магнитное поле

$$B(s) = \frac{1}{2}\mu_0 \int_{z_1}^{z_2} \frac{r^2(z)}{[r^2(z) + (s - z)^2]^{3/2}} j(z) dl(z), \quad z_1 < s < z_2, \quad (1)$$

где $B(s)$ – осевое магнитное поле, создаваемое током с поверхностной плотностью $j(z)$, $dl(z)$ – элемент длины образующей тела вращения, $r(z)$ – радиус сечения тела на расстоянии z от начала координат (рис. 1), μ_0 – магнитная постоянная. Магнитное поле $B(s)$ компенсирует на оси магнитное поле $B_0(Z, R)$:

$$B(s) = -B_0(s) = \frac{1}{2}\mu_0 \int_{z_1}^{z_2} \frac{r^2(z)}{[r^2(z) + (s - z)^2]^{3/2}} j_0(z) dz, \quad z_1 < s < z_2, \quad (2)$$

где $j_0(z) = j(z) dl/dz$, $B_0(s) = B_0(s, 0)$.

Уравнение (2) использовалось в работе [5] для аналитического определения плотности поверхностных токов, экранирующих соосное магнитное поле, на сверхпроводящем эллипсоиде вращения и на шаре. При этом для эллипсоида был повторен случай однородного магнитного поля, а для шара получен новый результат: найдено распределение поверхностных токов шара, помещенного на оси внешнего магнитного поля, изменяющегося вдоль своей оси как полином степени n , $n \geq 1$. В настоящей

работе уравнение (2) используется как для аналитического определения на сверхпроводящем эллипсоиде вращения плотности поверхностного тока, экранирующего внешнее соосное осесимметричное магнитное поле, которое меняется вдоль своей оси как полином степени n , так и для аналитического определения скорости жидкости, обтекающей эллипсоид вращения, установленный соосно потоку идеальной жидкости с осевой скоростью, когда скорость жидкости до установки эллипсоида меняется как полином степени n . Изменение магнитного поля вне сверхпроводящего тела определяется через поверхностные токи по формуле Био-Савара.

С помощью аналога уравнения (2) для эллипсоида с осями разной длины аналитически определяется магнитное поле, индуцированное этим эллипсоидом в однородном магнитном поле, а также поле скоростей ранее неподвижной идеальной жидкости при поступательном равномерном движении в ней такого эллипсоида. В обоих случаях решение получено для любой ориентации эллипсоида. В частном случае, когда длины двух осей эллипсоида совпадают, второе решение совпадает с решением, приведенным в монографии [2] для эллипсоида вращения.

2. ТОКИ НА ПОВЕРХНОСТИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

Если плотность поверхностного тока $j(z)$ сверхпроводящего эллипсоида вращения с полуосями, равными соответственно 1 и γ , помещенного вдоль оси внешнего магнитного поля $B_0(Z, R)$ (полуось единичной длины направлена по оси симметрии), определяется равенством

$$j(z) = \chi(z)j_0(z), \quad (3)$$

где $\chi(z) = dz/dl = \sqrt{(1-z^2)/[1-z^2(1-\gamma^2)]}$, то функция $j_0(z)$ удовлетворяет уравнению [5]

$$\gamma^2 \int_{-1}^1 \frac{1-z^2}{[(z-s)^2 + \gamma^2(1-z^2)]^{3/2}} j_0(z) dz = -\frac{2}{\mu_0} B_0(s), \quad -1 < s < 1. \quad (4)$$

Если $j_0(z) = z^n$, где n – целое неотрицательное число, то, проинтегрировав левую часть уравнения (4), получим, используя математическую индукцию, полином степени n для переменной s . Поэтому, когда внешнее магнитное поле меняется на оси как полином степени n :

$$-\frac{2}{\mu_0} B_0(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, \quad (5)$$

функция $j_0(z)$ также является полиномом степени n :

$$j_0(z) = \sum_{i=0}^n c_i z^i, \quad (6)$$

коэффициенты которого c_i могут быть определены из уравнения

$$DC = A, \quad (7)$$

где $C = (c_0, \dots, c_n)^T$, $A = (a_0, \dots, a_n)^T$, $D = \{D_{ik}\}$, $i, k = 1, \dots, n+1$, а матрица D является верхней треугольной, ненулевые элементы которой равны

$$D_{ik} = \frac{\gamma^2}{(i-1)!} \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}} \left(\frac{1}{[(z-s)^2 + \gamma^2(1-z^2)]^{3/2}} \right) \right]_{s=0} z^{k-1} (1-z^2) dz. \quad (8)$$

Тогда матрица $G = D^{-1} = \{G_{ik}\}$ также будет верхней треугольной матрицей. Ниже в явном виде приводятся точные значения элементов матрицы G для $n = 2$, $i = 1, \dots, 3$, $k = i, \dots, 3$:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{1-\gamma^2}{2-\gamma^2 q}, & G_{12} &= 0, \\ G_{13} &= -\frac{\gamma^2(1-\gamma^2)^2 [q(\gamma^2+2)-6]}{2(2-\gamma^2 q) [2+13\gamma^2-\gamma^2(6+1.5\gamma^2)q]}, \\ G_{22} &= \frac{(1-\gamma^2)^2}{2+4\gamma^2-3\gamma^2 q}, & G_{23} &= 0, & G_{33} &= \frac{(1-\gamma^2)^3}{2+13\gamma^2-\gamma^2(6+1.5\gamma^2)q}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$q \equiv q(\gamma) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\gamma^2-1}} \arctg(\sqrt{\gamma^2-1}) & \text{при } \gamma > 1, \\ \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\gamma^2}}{1-\sqrt{1-\gamma^2}}\right) & \text{при } \gamma \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Из формул (3)–(10) следует, что если осевое магнитное поле является полиномом второй степени:

$$-\frac{2}{\mu_0} B_0(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2, \quad (11)$$

то $j_0(z)$ определяется формулой

$$j_0(z) = a_0 G_{11} + a_2 G_{13} + a_1 G_{22} z + a_2 G_{33} z^2,$$

а плотность поверхностного тока $j(z)$ равна

$$j(z) = \chi(z) j_0(z) = \sqrt{\frac{1-z^2}{1-z^2(1-\gamma^2)}} (a_0 G_{11} + a_2 G_{13} + a_1 G_{22} z + a_2 G_{33} z^2),$$

где значения коэффициентов G_{ik} определяются формулами (9), (10). В случае, когда осевое магнитное поле является полиномом степени выше двух, значения элементов матрицы G можно получить, обратив матрицу D из формулы (8).

3. СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА СВЕРХПРОВОДЯЩИЙ ЭЛЛИПСОИД ВРАЩЕНИЯ В СООСНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ, И ЕГО МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ

При полной экранировке закон Ампера [6] связывает плотность поверхностного тока $j(z)$ с магнитным полем $B_l(z)$ вне тела вблизи его поверхности равенством

$$B_l(z) = -\mu_0 j(z),$$

поэтому уравнение (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} B_0(s) &= \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{r^2(z)}{[r^2(z) + (s-z)^2]^{3/2}} B_l(z) dl = \\ &= \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{r^2(z)}{\sqrt{r^2(z) + (s-z)^2}} B_l(z) \frac{\partial l}{\partial z} dz, \quad z_1 < s < z_2, \end{aligned} \quad (12)$$

а уравнение (4) – в виде

$$B_0(s) = \frac{1}{2} \gamma^2 \int_{-1}^1 \frac{1-z^2}{[(z-s)^2 + \gamma^2(1-z^2)]^{3/2}} K_l(z) dz, \quad -1 < s < 1,$$

где

$$K_l(z) = B_l(z) \frac{\partial l}{\partial z} = B_l(z) \sqrt{\frac{1-z^2(1-\gamma^2)}{1-z^2}}.$$

Магнитное давление $p(z)$ на поверхность тела определяется равенством

$$p(z) = \frac{B_l^2(z)}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 j^2(z), \quad (13)$$

а результирующая сила действует на тело вдоль оси Z и равна

$$F = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} p(z) r(z) dr(z) = -\frac{1}{2} \pi \mu_0 \int_{z_1}^{z_2} j^2(z) \frac{\partial r^2(z)}{\partial z} dz. \quad (14)$$

Для сверхпроводящего эллипсоида вращения с полуосями 1 и γ формула (14) имеет вид

$$F = -\pi \mu_0 \gamma^2 \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=0}^n c_i z^i \right)^2 \frac{z(1-z^2)}{1-z^2(1-\gamma^2)} dz.$$

В случае, когда $B_0(s)$ является полиномом второй степени, явное значение для силы F можно записать как

$$F = -\frac{2\pi \mu_0 \gamma^2 (1-\gamma^2) a_1}{3(2-\gamma^2 q)} \left[a_0 + a_2 \frac{(1-\gamma^2)[4(1-\gamma^2) - 5(2-\gamma^2 q)]}{5[4(1-\gamma^2) - 3(2-\gamma^2 q)]} \right], \quad (15)$$

где a_0, a_1, a_2 – коэффициенты в формуле (11), определяющие осевое магнитное поле, в которое вносится сверхпроводящий эллипсоид. Согласно формуле (11) эти коэффициенты связаны с осевым магнитным полем и его первой и второй производными в центре эллипсоида в точке $s = 0$ равенствами

$$a_0 = -\frac{2}{\mu_0} B_0(0), \quad a_1 = -\frac{2}{\mu_0} B'_0(0), \quad a_2 = -\frac{1}{\mu_0} B''_0(0), \quad (16)$$

поэтому формулу (15) можно переписать в виде

$$F = \frac{4\pi \gamma^2 (1-\gamma^2)}{3\mu_0 (2-\gamma^2 q)} \left[B_0(0) + \frac{1-\gamma^2}{10} \frac{4(1-\gamma^2) - 5(2-\gamma^2 q)}{4(1-\gamma^2) - 3(2-\gamma^2 q)} B''_0(0) \right] B'_0(0). \quad (17)$$

Магнитный диполь сверхпроводящего эллипсоида определяется формулой

$$M = \pi \int_{-1}^1 r^2(z) j_0(z) dz = \frac{2\pi\gamma^2}{3} \left[a_0 G_{11} + a_2 \left(G_{13} + \frac{1}{5} G_{33} \right) \right] = \\ = \frac{4\pi\gamma^2(1-\gamma^2)}{3\mu_0(2-\gamma^2q)} \left[B_0(0) + \frac{1-\gamma^2}{5} \frac{20(1-\gamma^2) - (11+4\gamma^2)(2-\gamma^2q)}{20(1-\gamma^2) - (12-3\gamma^2)(2-\gamma^2q)} B_0''(0) \right]. \quad (18)$$

При $\gamma \rightarrow 1$ формулы (17), (18) определяют силу, действующую на шар, и его магнитный момент:

$$F = B_0'(0) M_0 \left(1 + \frac{B_0''(0)}{B_0(0)} \right), \\ M = M_0 \left(1 + \frac{7B_0''(0)}{6B_0(0)} \right), \quad (19)$$

где $M_0 = \pi B_0(0)/\mu_0$ – магнитный момент сверхпроводящего шара единичного радиуса в однородном магнитном поле $B_0(0)$ [3]. Из формул (17)–(19) следует, что формула

$$F = B_0' M, \quad (20)$$

справедливая для любого осесимметричного сверхпроводящего тела, соосно помещенного в магнитное поле с постоянным градиентом, неверна при непостоянном градиенте.

4. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ЭЛЛИпсоИД В соосной СТАЦИОНАРНОЙ СТРУЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Распределение скоростей идеальной стационарной струи, обтекающей тело, аналогично распределению магнитного поля вне такого же сверхпроводящего тела. Аналог уравнения (12), определяющего скорость жидкости ϑ_l , на поверхности осесимметричного тела, соосно струе идеальной жидкости, имеет следующий вид (см. приложение):

$$\vartheta_0(s) = \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{r^2(z)}{[r^2(z) + (s-z)^2]^{3/2}} u(z) dz, \quad z_1 < s < z_2, \quad (21)$$

где $u(z) = \vartheta_l(z) dl/dz$, $\vartheta_0(s)$ – скорость жидкости на оси в отсутствие тела, dl – элемент длины образующей тела. Если тело – эллипсоид вращения с полуосями 1 и γ , помещенный вдоль оси струи так, что полуось единичной длины направлена по оси симметрии струи, то из уравнения (21) следует, что

$$\vartheta_0(s) = \frac{\gamma^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{1-z^2}{[(z-s)^2 + \gamma^2(1-z^2)]^{3/2}} u(z) dz, \quad -1 < s < 1, \\ \vartheta_l(z) = \sqrt{\frac{1-z^2}{1-z^2(1-\gamma^2)}} u(z).$$

Если скорость $\vartheta_0(s)$ изменяется на оси как полином степени n :

$$\vartheta_0(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i,$$

Рис. 2

то $u(z)$ также будет полиномом степени n :

$$u(z) = \sum_{i=0}^n c_i z^i,$$

коэффициенты которого c_i могут быть определены из уравнения (7). Поэтому при $n = 2$ давление $p(z)$ на поверхность эллипсоида определяется равенством

$$p(z) = p_0 - \frac{1}{2} \rho \vartheta_l^2(z) = p_0 - \frac{1}{2} \rho (a_0 G_{11} + a_2 G_{13} + a_1 G_{22} z + a_2 G_{33} z^2)^2 \frac{1 - z^2}{1 - z^2(1 - \gamma^2)},$$

а результирующая сила F_0 , действующая на эллипсоид вдоль оси, – равенством

$$\begin{aligned} F_0 &= 2\pi \int_{-1}^1 p(z) r(z) dr(z) = -\frac{1}{2} \pi \rho \int_{-1}^1 \vartheta_l^2(z) \frac{\partial r^2(z)}{\partial z} dz = \\ &= -\pi \rho \gamma^2 \int_{-1}^1 (a_0 G_{11} + a_2 G_{13} + a_1 G_{22} z + a_2 G_{33} z^2)^2 \frac{z(1 - z^2)}{1 - z^2(1 - \gamma^2)} dz = \\ &= -\frac{2\pi \rho \gamma^2 (1 - \gamma^2)}{3(2 - \gamma^2 q)} \left[\vartheta_0(0) + \frac{(1 - \gamma^2)(6 + 4\gamma^2 - 5\gamma^2 q)}{10(2 + 4\gamma^2 - 3\gamma^2 q)} \vartheta_0''(0) \right] \vartheta_0'(0), \end{aligned} \quad (22)$$

где p_0 – постоянная составляющая давления, ρ – плотность жидкости, а q определяется формулой (10).

5. ОБТЕКАНИЕ ЭЛЛИПСОИДА С ОСЯМИ РАЗНОЙ ДЛИНЫ ОДНОРОДНЫМ ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ

На рис. 2 изображен эллипсоид с полуосями длины a , b и c , направленными вдоль осей декартовой системы координат X , Y и Z . Магнитное поле токов определяется по формуле Био–Савара [6]. Поверхностные токи эллипсоида, когда они перпендикулярны оси Z , дают следующие составляющие индукции магнитного поля в точке

с координатами x_1, y_1, z_1 :

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 b}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{-c}^c \frac{r_c(z-z_1)}{R_c^3} j_0(z) dz, \\ B_y &= \frac{\mu_0 a}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{-c}^c \frac{r_c(z-z_1)}{R_c^3} j_0(z) dz, \\ B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-c}^c \frac{abr_c^2 - r_c(bx_1 \cos \varphi + ay_1 \sin \varphi)}{R_c^3} j_0(z) dz, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} r_c &= \sqrt{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2}, \\ R_c &= \frac{1}{c} \sqrt{c^2(z-z_1)^2 + (ar_c \cos \varphi - x_1)^2 + (br_c \sin \varphi - y_1)^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

а $j_0(z) = \partial I / \partial z$. Здесь I – ток по поверхности, которая расположена ниже плоскости, проходящей через точку z оси Z и параллельной плоскости OXY (рис. 2). Если $j_0(z) = \text{const}$, то внутри эллипсоида составляющие магнитного поля B_x и B_y равны нулю, а составляющая вдоль оси Z – постоянная величина, определяемая формулой

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{ab\mu_0 j_0}{4\pi c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-c}^c \frac{(c^2 - z^2) dz}{[(z-z_1)^2 + (c^2 - z^2)(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)]^{3/2}} = \\ &= \frac{ab\mu_0 j_0}{4\pi c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 \frac{(1 - z^2) dz}{[(z-s)^2 + (1 - z^2)(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)]^{3/2}} = \frac{abC\mu_0 j_0}{4\pi c^2}, \end{aligned}$$

где постоянная C равна

$$C = \int_0^{2\pi} \frac{2 - \beta_c Q_c}{\beta_c(1 - \beta_c)} d\varphi, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \beta_c &= \frac{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}{c^2}, \\ Q_c &= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\beta_c - 1}} \arctg(\sqrt{\beta_c - 1}) & \text{при } \beta_c > 1, \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_c}} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \beta_c}}{1 - \sqrt{1 - \beta_c}}\right) & \text{при } \beta_c < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

В однородном магнитном поле B_c на поверхности сверхпроводящего эллипсоида (рис. 2) возникают поверхностные токи, компенсирующие это поле внутри эллипсоида:

$$B_z = \frac{abC\mu_0 j_0}{4\pi c^2} = -B_c.$$

Следовательно,

$$j_0 = -\frac{4\pi c^2 B_c}{abC\mu_0},$$

а магнитное поле при экранировке сверхпроводящим эллипсоидом однородного магнитного поля согласно формулам (23) равно

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{cB_c}{aC} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{-c}^c \frac{r_c(z-z_1) dz}{R_c^3}, \\ B_y &= -\frac{cB_c}{bC} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{-c}^c \frac{r_c(z-z_1) dz}{R_c^3}, \\ B_z &= B_c \left(1 - \frac{1}{C} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-c}^c \frac{r_c^2 - (r_c x_1/a) \cos \varphi - (r_c y_1/b) \sin \varphi}{R_c^3} dz \right), \end{aligned} \quad (27)$$

где r_c и R_c определяются выражениями (24). Величину магнитного поля $B_l(z, \varphi)$ вне эллипсоида вблизи его поверхности легко определить, если воспользоваться формулами (3) и (12). Они приводят к следующему равенству:

$$B_l(z, \varphi) = \left(\frac{4\pi c^2}{abC} \sqrt{\frac{c^2 - z^2}{c^2 - z^2 + \beta_c z^2}} \right) B_c.$$

Если однородное магнитное поле имеет составляющие B_a , B_b , B_c вдоль каждой оси эллипсоида, аналог формулы (27) имеет вид

$$\begin{aligned} B_x &= B_a \left(1 - \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-a}^a \frac{r_a^2 - (r_a z_1/c) \cos \varphi - (r_a y_1/b) \sin \varphi}{R_a^3} dx \right) - \\ &\quad - \frac{cB_c}{aC} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{-c}^c \frac{r_c(z-z_1) dz}{R_c^3} - \frac{bB_b}{aB} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{-b}^b \frac{r_b(y-y_1) dy}{R_b^3}, \\ B_y &= B_b \left(1 - \frac{1}{B} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-b}^b \frac{r_b^2 - (r_b z_1/c) \cos \varphi - (r_b x_1/a) \sin \varphi}{R_b^3} dy \right) - \\ &\quad - \frac{cB_c}{bC} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{-c}^c \frac{r_c(z-z_1) dz}{R_c^3} - \frac{aB_a}{bA} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{-a}^a \frac{r_a(x-x_1) dx}{R_a^3}, \\ B_z &= B_c \left(1 - \frac{1}{C} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-c}^c \frac{r_c^2 - (r_c x_1/a) \cos \varphi - (r_c y_1/b) \sin \varphi}{R_c^3} dz \right) - \\ &\quad - \frac{aB_a}{cA} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{-a}^a \frac{r_a(x-x_1) dx}{R_a^3} - \frac{bB_b}{cB} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{-b}^b \frac{r_b(y-y_1) dy}{R_b^3}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $r_a = \sqrt{a^2 - x^2}$, $r_b = \sqrt{b^2 - y^2}$,

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{1}{a} \sqrt{a^2(x-x_1)^2 + (br_a \cos \varphi - y_1)^2 + (cr_a \sin \varphi - z_1)^2}, \\ R_b &= \frac{1}{b} \sqrt{b^2(y-y_1)^2 + (ar_b \sin \varphi - x_1)^2 + (cr_b \cos \varphi - z_1)^2}, \end{aligned}$$

r_c , R_c и C определены выражениями (23)–(25), а A и B – формулой (26), в которой переменную β_c следует заменить на β_a и β_b соответственно:

$$\beta_a = \frac{b^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}{a^2}, \quad \beta_b = \frac{a^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi}{b^2}.$$

Вне эллипсоида магнитное поле вблизи его вершин определяется формулами

$$\begin{aligned} B_l(\pm a) &= \frac{4\pi}{a} \sqrt{\left(\frac{b^2 B_b}{cB}\right)^2 + \left(\frac{c^2 B_c}{bC}\right)^2}, \\ B_l(\pm b) &= \frac{4\pi}{b} \sqrt{\left(\frac{c^2 B_c}{aC}\right)^2 + \left(\frac{a^2 B_a}{cA}\right)^2}, \\ B_l(\pm c) &= \frac{4\pi}{c} \sqrt{\left(\frac{a^2 B_a}{bA}\right)^2 + \left(\frac{b^2 B_b}{aB}\right)^2}. \end{aligned}$$

Поток идеальной жидкости с постоянной скоростью $\vec{v}$ при обтекании неподвижного эллипсоида создает распределение скоростей, определяемое формулами (27), в которых составляющие магнитного поля заменяются соответственно составляющими скорости. Это распределение эквивалентно распределению скоростей, возникающему при движении эллипсоида со скоростью $\vec{v}$ в неподвижной идеальной жидкости в системе координат эллипсоида:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\vartheta_a}{A} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-a}^a \frac{r_a^2 - (r_a z_1/c) \cos \varphi - (r_a y_1/b) \sin \varphi}{R_a^3} dx + \\ &\quad + \frac{c\vartheta_c}{aC} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{-c}^c \frac{r_c(z - z_1) dx}{R_c^3} + \frac{b\vartheta_b}{aB} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{-b}^b \frac{r_b(y - y_1) dy}{R_b^3}, \\ v_y &= \frac{\vartheta_b}{B} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-b}^b \frac{r_b^2 - (r_b z_1/c) \cos \varphi - (r_b x_1/a) \sin \varphi}{R_b^3} dy + \\ &\quad + \frac{c\vartheta_c}{bC} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{-c}^c \frac{r_c(z - z_1) dz}{R_c^3} + \frac{a\vartheta_a}{bA} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{-a}^a \frac{r_a(x - x_1) dx}{R_a^3}, \\ v_z &= \frac{\vartheta_c}{C} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-c}^c \frac{r_c^2 - (r_c x_1/a) \cos \varphi - (r_c y_1/b) \sin \varphi}{R_c^3} dz + \\ &\quad + \frac{a\vartheta_a}{cA} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{-a}^a \frac{r_a(x - x_1) dx}{R_a^3} + \frac{b\vartheta_b}{cB} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{-b}^b \frac{r_b(y - y_1) dy}{R_b^3}. \end{aligned} \quad (29)$$

Если жидкость движется равномерно со скоростью $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, то при равномерном движении в ней эллипсоида со скоростью $\vec{v} + \vec{u}$ распределение скоростей в жидкости будет также определяться соотношениями (29), но к компонентам вектора v_x, v_y, v_z необходимо прибавить u_x, u_y, u_z соответственно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как изменяется известное гармоническое векторное поле (магнитное поле, поток идеальной жидкости), когда в него вносится обтекаемое полем тело? В настоящей работе такая задача впервые решена для неоднородного поля и для широкого класса тел. А именно определено гармоническое векторное поле, которое индуцируется соосно направленным эллипсоидом вращения в осесимметричном начальном поле. Для аналитического решения этой задачи использовалось простое интегральное уравнение, полученное авторами в работе [5], которое позволяет определить

поле, обтекающее эллипсоид, если на отрезке оси внутри эллипсоида известно осевое поле, в которое он соосно вносится. Таким образом, определяется обтекающее эллипсоид вращения поле, которое возникает, когда в гармоническое векторное поле, изменяющееся на оси как полином степени n , соосно помещают этот эллипсоид. Если начальное поле задано во всем пространстве, то вносимый в поле эллипсоид не меняет его поведения на бесконечности. В этом случае обтекание эллипсоида происходит при тех же граничных условиях на бесконечности, что и для начального поля.

Полученное решение можно использовать при экранировке магнитного поля сверхпроводниками, для расчета сил, действующих на сверхпроводящее тело при его ускорении магнитным полем [7], для оценки точности численных расчетов путем их сравнения с аналитическими решениями [5], а также для численных расчетов, в которых используется метод последовательных приближений [7]. Это решение описывает и изменение распределения плотности тока в проводящей среде, когда в нее помещают непроводящий эллипсоид. Однако авторам кажется, что основная ценность настоящей работы заключается в том, что найден новый класс аналитических решений классических задач.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Скорость жидкости, обтекающей тело, равна $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0(\vec{r}) + \vec{u}(\vec{r})$, где $\vec{v}_0(\vec{r})$ – начальная скорость жидкости в отсутствие тела, а $\vec{u}(\vec{r})$ равна [2], [3]

$$\vec{u}(\vec{r}) = \int_S \frac{\vec{m} \times (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} dS, \quad (30)$$

где $\vec{r}$ – координата точки вне тела. Вектор $\vec{m}(\vec{r}')$ на поверхности S обтекаемого тела определяется уравнением

$$-\vec{v}_0(\vec{r}) = \int_S \frac{\vec{m} \times (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} dS, \quad (31)$$

где $\vec{r}$ – координата точки внутри тела. Действительно, в этом случае скорость $\vec{v}(\vec{r})$ внутри тела равна нулю, а на поверхности S она параллельна поверхности, так как нормальная составляющая скорости непрерывна и равна нулю на поверхности тела [3]. Поэтому вне тела скорость жидкости при обтекании будет равна

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0(\vec{r}) + \int_S \frac{\vec{m} \times (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} dS, \quad (32)$$

где вектор $\vec{m}(\vec{r}')$ определяется из уравнения (31). Если для скорости $\vec{v}_0(\vec{r})$ заданы граничные условия на бесконечности, то формула (32) определяет скорость жидкости, обтекающей тело, удовлетворяющую таким же граничным условиям на бесконечности. В осесимметричном потоке жидкости, соосно обтекающем осесимметричное тело, вектор $\vec{m}(\vec{r}')$ перпендикулярен оси, а его абсолютная величина зависит только от осевой координаты z , $|\vec{m}(\vec{r})| = |m(z)|$. В этом случае, как следует из уравнения (31), $m(z)$ связана с осевой скоростью $v_0(s)$ в области, занятой телом, формулой

$$-v_0(s) = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} \frac{r^2(z)}{[r^2(z) + (s - z)^2]^{3/2}} m(z) dl(z), \quad z_1 < s < z_2. \quad (33)$$

Здесь $dl(z)$ – элемент длины образующей, а $r(z)$ – радиус сечения тела на расстоянии z от начала координат (рис. 1). Поскольку при обтекании тела $m(z)$ связана со скоростью $\vartheta_l(z)$ на поверхности тела соотношением [3], [6]

$$m(z) = -\frac{\vartheta_l(z)}{4\pi},$$

то из формулы (33) следует равенство

$$\vartheta_0(s) = \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{r^2(z)}{[r^2(z) + (s - z)^2]^{3/2}} \vartheta_l(z) dl(z),$$

которое совпадает с равенством (21) в разделе 4.

Список литературы

- [1] E. Heine, *J. Reine Angew. Math.*, **1843**:26 (1843), 185–216.
- [2] Г. Ламб, *Гидродинамика*, ГИТТЛ, М., Л., 1947.
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. VIII: *Электродинамика сплошных тел*, Наука, М., 1992.
- [4] A. Erdelyi, *Commun. Pure Appl. Math.*, **9**:3 (1956), 403–414.
- [5] А. О. Савченко, О. Я. Савченко, *ЖТФ*, **77**:7 (2007), 130–133.
- [6] Дж. Орир, *Физика*, Мир, М., 1981.
- [7] А. О. Савченко, А. Я. Савченко, О. Я. Савченко, “Математическая модель движения осесимметричного проводящего тела в соосном магнитном поле”, *Материалы международной научной конференции “Моделирование и информационные технологии”* (Украина, Киев, 12–14 мая 2010 г.), Изд-во ИПМЭ НАН Украины, Киев, 2010, 115–123.

Поступила в редакцию 3.02.2011,
после доработки 27.06.2011