Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, С. С. Улашов, Существование и аналитичность связанных состояний двухчастичного оператора Шредингера на решетке, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 3, 393–408

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6774>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:45:33

© 2012 г.

С. Н. Лакаев*, С. С. Улашов*

СУЩЕСТВОВАНИЕ И АНАЛИТИЧНОСТЬ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

Рассмотрен двухчастичный дискретный оператор Шредингера $H_\mu(K)$, соответствующий системе двух произвольных частиц на d -мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, которые взаимодействуют с помощью парного контактного потенциала отталкивания с константой связи $\mu > 0$ ($K \in \mathbb{T}^d$ – квазиимпульс двух частиц). Установлено, что верхний (правый) край существенного спектра может быть либо виртуальным уровнем (при $d = 3, 4$), либо собственным значением (при $d \geq 5$) оператора $H_\mu(K)$. Показано, что существует единственное собственное значение, лежащее правее существенного спектра, в зависимости от значений константы связи μ и двухчастичного квазиимпульса K . Доказаны аналитичность соответствующего собственного состояния, а также аналитичности собственного значения и собственного состояния как функций квазиимпульса $K \in \mathbb{T}^d$ в области их существования.

Ключевые слова: дискретный оператор Шредингера, система двух частиц, гамильтониан, контактный отталкивающий потенциал, виртуальный уровень, собственное значение, решетка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Кинематика квантовых квазичастиц на решетке довольно экзотична даже в случае двух частиц. В частности, благодаря тому что дискретный аналог лапласиана не является трансляционно-инвариантным, гамильтониан системы не разделяется на две части: одну, относящуюся к движению центра масс, и другую, относящуюся ко внутренним степеням свободы. В системах на решетке нет такой простой характеристики инерции, как масса, но возможна соответствующая локальная характеристика – эффективная масса. Кроме того, такой естественный локальный заменитель массы, как эффективный тензор масс связанного состояния, зависит от квазиимпульса системы и является только полуаддитивным. Это так называемое явление избытка масс для систем на решетке: эффективная масса N -частичного связанного состояния больше, чем сумма эффективных масс квазичастиц, составляющих систему [1], [2].

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: slakaev@mail.ru

Двухчастичная задача на решетке, в отличие от непрерывного случая, где отделяется движение центра масс, сводится к изучению одночастичной задачи с помощью преобразования Гельфанда: гильбертово пространство $l_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ разлагается в прямой (непрерывный) интеграл фон Неймана, ассоциированный с представлением абелевой (дискретной) группы $\mathbb{Z}^d$, которая образована с помощью перестановочных операторов на решетке. Тогда двухчастичный гамильтониан H_μ также разлагается в прямой (непрерывный) интеграл фон Неймана [3]:

$$H_\mu = \int_{\mathbb{T}^d} \oplus H_\mu(K) dK,$$

где K пробегает первую зону Бриллюэна $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / (2\pi\mathbb{Z})^d$. В отличие от непрерывного случая, соответствующие слойные операторы $H_\mu(K)$ в разложении в прямой интеграл параметрически зависят от квазиимпульса $K \in \mathbb{T}^d$. В результате вследствие того, что задача не является сферически-симметричной, спектры операторов $H_\mu(K)$ оказываются довольно чувствительными к изменению квазиимпульса K .

В спектральном анализе непрерывного оператора Шредингера $H_\mu = -\Delta + \mu V$ в $\mathbb{R}^3$ наблюдается появление собственного значения из непрерывного спектра для критических потенциалов (*при пороговых значениях константы связи $\mu > 0$*) [4]–[8]. Это явление связано с решением уравнения Шредингера, которое убывает на бесконечности, но не является квадратично-интегрируемым. Такие решения обычно называются резонансными состояниями (функциями) с нулевой энергией, и в этом случае оператор Шредингера H_{μ_0} называется критическим или имеющим резонанс с нулевой энергией (виртуальный уровень). Появление собственного значения у неотрицательного критического оператора Шредингера H_μ с пороговым значением константы связи $\mu = \mu_0 > 0$ при малых возмущениях особенно замечательно: если в некоторой трехчастичной системе никакая подсистема не имеет связанного состояния и не менее чем две его двухчастичные подсистемы имеют резонанс с нулевой энергией, то трехчастичная система обладает бесконечным числом связанных состояний с отрицательными энергиями, стремящимися к нулю, т. е. имеет место эффект Ефимова [5], [7]–[12].

Пусть $\mathbf{H}_\mu(K)$ – трехчастичный решетчатый оператор Шредингера ($K \in \mathbb{T}^3$ – трехчастичный квазиимпульс), ассоциированный с гамильтонианом системы трех одинаковых частиц, которые движутся на $\mathbb{Z}^3$ и взаимодействуют с помощью парных контактных потенциалов притяжения с константой связи $\mu > 0$. Следующее явление также тесно связано с пороговым значением константы связи $\mu = \mu_0 > 0$ двухчастичных операторов: при $\mu = \mu_0$ соответствующий трехчастичный оператор Шредингера $\mathbf{H}_{\mu_0}(0)$ имеет бесконечное число собственных значений, однако оператор $\mathbf{H}_{\mu_0}(K)$ при $K \neq 0$ имеет только конечное число собственных значений [5], [12].

В работе [3] для широкого класса двухчастичных дискретных операторов Шредингера $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, $d \geq 3$, ассоциированных с гамильтонианом системы двух произвольных частиц, которые взаимодействуют с помощью парных короткодействующих потенциалов, показано следующее. Если при некотором значении $\mu = \mu_0 > 0$ неотрицательный оператор $H_{\mu_0}(0)$ имеет виртуальный уровень или собственное значение на дне (левом краю) существенного спектра, то при всех ненулевых значениях квазиимпульса $K \in \mathbb{T}^d$ оператор $H_{\mu_0}(K)$ имеет собственное значение, лежащее ниже дна существенного спектра.

В физике устойчивые сложные объекты обычно образуются с помощью сил притяжения, которые позволяют составным частям уменьшить энергию, связывая их

вместе. Отталкивающие силы отделяют частицы в свободном пространстве. Однако в работе [13] описано экспериментальное наблюдение, состоящее в том, что в упорядоченных средах с периодическим потенциалом, а также в отсутствие рассеяния устойчивые сложные объекты могут существовать даже в случае отталкивающих взаимодействий.

Следует отметить, что в работе [14] изучена проблема существования связанных состояний оператора $H_\mu(K)$ при некоторых значениях квазиимпульса $K \in \mathbb{T}^3$. В частности, установлено, что оператор $H_\mu(\vec{\pi})$ не имеет собственных значений при малых $\mu > 0$.

В настоящей работе изучены спектральные свойства оператора Шредингера $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, ассоциированного с гамильтонианом системы двух произвольных частиц, которые взаимодействуют с помощью парных контактных потенциалов с константой связи $\mu > 0$, в зависимости как от константы парного взаимодействия отталкивания $\mu > 0$, так и от квазиимпульса системы $K \in \mathbb{T}^d$. Показано, что:

1) оператор Шредингера $H_\mu(K)$ имеет пороговый виртуальный уровень (пороговое собственное значение) не только при нулевом значении квазиимпульса $K \in \mathbb{T}^d$, но и при всех других значениях $K \in \mathbb{T}^d$, в зависимости от значения константы контактного потенциала отталкивания μ ;

2) для любого $K \in \mathbb{T}^d$ существует $\mu(K) > 0$ такое, что при $0 < \mu < \mu(K)$ оператор $H_\mu(K)$ не имеет собственного значения, лежащего правее существенного спектра, а при $\mu > \mu(K) > 0$ он имеет единственное собственное значение.

При фиксированном значении константы связи $\mu > 0$, рассматривая пороговое значение константы связи как функцию $\mu(K) > 0$, определенную на торе $\mathbb{T}^d$, мы приходим к следующему разбиению тора: $\mathbb{T}^d = M_<(\mu) \cup M_=(\mu) \cup M_>(\mu)$, где $M_<(\mu)$ и $M_>(\mu)$ – открытые связные множества, а $M_=(\mu)$ – замкнутое многообразие коразмерности 1. При этом для любого $K \in M_=(\mu)$ оператор $H_\mu(K)$ имеет пороговый виртуальный уровень (при $d = 3, 4$) или пороговое собственное значение (при $d \geq 5$); при всех $K \in M_<(\mu)$ оператор $H_\mu(K)$ имеет единственное собственное значение, лежащее правее существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$, а при всех $K \in M_>(\mu)$ не имеет собственного значения. Соответствующее собственное состояние $\psi_{\mu,K}(\cdot)$, $K \in M_<(\mu)$, является аналитической функцией на торе $\mathbb{T}^d$. Отображение $\psi_\mu: M_<(\mu) \mapsto L^2(\mathbb{T}^d)$ такое, что $K \mapsto \psi_{\mu,K}(\cdot)$, является векторнозначным аналитическим отображением на $M_<(\mu)$. Установлено, что собственное значение $E_\mu(\cdot)$ – аналитическая функция в $M_<(\mu)$, а также найдены верхняя и нижняя оценки его положения.

2. ОПЕРАТОРЫ ЭНЕРГИИ ДВУХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ. КООРДИНАТНОЕ И ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

2.1. Координатное представление. Пусть $\mathbb{Z}^d$ – d -мерная целочисленная решетка и $(\mathbb{Z}^d)^2$ – декартово произведение решеток. Обозначим через $l_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^d)^2$. Свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ рассматриваемой системы двух произвольных частиц (бозона и фермиона) в координатном представлении на d -мерной решетке $\mathbb{Z}^d$ определяется как ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $l_2((\mathbb{Z}^d)^2)$:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m_1} \Delta_{x_1} + \frac{1}{2m_2} \Delta_{x_2},$$

где $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I$ и $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta$, а $m_\alpha > 0$ обозначает массу частиц, $\alpha = 1, 2$. Лапласиан Δ на решетке есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел:

$$(\Delta\hat{\psi})(x) = \sum_{|s|=1} [\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(x+s)], \quad \hat{\psi} \in l_2(\mathbb{Z}^d).$$

Здесь $s = (s^{(1)}, \dots, s^{(d)}) \in \mathbb{Z}^d$, $|s| = |s^{(1)}| + \dots + |s^{(d)}|$. Заметим, что $\hat{H}_0$ действует в пространстве $l_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ по формуле

$$(\hat{H}_0\hat{\psi})(x_1, x_2) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{\varepsilon}(s) [\hat{\psi}(x_1 + s, x_2) + \gamma \hat{\psi}(x_1, x_2 + s)], \quad \hat{\psi} \in l_2((\mathbb{Z}^d)^2),$$

где $\gamma = m_1/m_2 > 0$ и функция $\hat{\varepsilon}(\cdot)$ в $\mathbb{Z}^d$ определяется как

$$\hat{\varepsilon}(s) = \begin{cases} d, & s = 0, \\ -1/2, & |s| = 1, \\ 0, & |s| > 1. \end{cases}$$

Полный двухчастичный гамильтониан $\hat{H}_\mu$ описывает взаимодействие между двумя частицами и определяется как ограниченный самосопряженный оператор $\hat{H}_\mu = \hat{H}_0 + \mu\hat{V}$, действующий в гильбертовом пространстве $l_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ [15]. Здесь $\hat{V}$ – оператор умножения на функцию,

$$(\hat{V}\hat{\psi})(x_1, x_2) = \delta_{x_1 x_2} \hat{\psi}(x_1, x_2), \quad \hat{\psi} \in \ell^2((\mathbb{Z}^d)^2),$$

и $\delta_{x_1 x_2}$ – символ Кронекера.

2.2. Импульсное представление. Пусть $\mathbb{T}^d$ – d -мерный тор, т. е. куб $(-\pi, \pi]^d$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Он рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^d$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^d$. Пусть $L^2((\mathbb{T}^d)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbb{T}^d)^2$ и $\hat{\mathcal{F}}: L^2((\mathbb{T}^d)^2) \mapsto l_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ – стандартное преобразование Фурье, $L^1(\mathbb{T}^d)$ – банахово пространство интегрируемых функций на $\mathbb{T}^d$.

Двухчастичный гамильтониан в импульсном представлении определяется как ограниченный самосопряженный оператор $H_\mu = \hat{\mathcal{F}}^{-1} \hat{H}_\mu \hat{\mathcal{F}} \equiv H_0 + \mu V$, действующий в $L^2((\mathbb{T}^d)^2)$. Двухчастичный свободный гамильтониан H_0 является оператором умножения на функцию:

$$(H_0 f)(k_1, k_2) = (\varepsilon(k_1) + \gamma \varepsilon(k_2)) f(k_1, k_2), \quad f \in L^2((\mathbb{T}^d)^2),$$

где

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^d (1 - \cos p^{(i)}), \quad p = (p^{(1)}, \dots, p^{(d)}) \in \mathbb{T}^d. \quad (1)$$

Возмущение V является интегральным оператором в пространстве $L^2((\mathbb{T}^d)^2)$:

$$(Vf)(k_1, k_2) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{(\mathbb{T}^d)^2} \delta(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) f(k'_1, k'_2) dk'_1 dk'_2,$$

где $\delta(k)$ – d -мерная дельта-функция Дирака на $\mathbb{T}^d$.

Пространство $L^2((\mathbb{T}^d)^2)$ разлагается в прямой интеграл,

$$L^2((\mathbb{T}^d)^2) = \int_{K \in \mathbb{T}^d} \oplus L^2(\mathbb{T}^d) dK,$$

следовательно, оператор H_μ также разлагается в прямой интеграл,

$$H_\mu = \int_{K \in \mathbb{T}^d} \oplus H_\mu(K) dK,$$

где слойный оператор $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, действует в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{T}^d)$ по формуле $H_\mu(K) = H_0(K) + \mu V$ [3]. Невозмущенный оператор $H_0(K)$ в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{T}^d)$ есть оператор умножения на функцию $\mathcal{E}_K(\cdot)$:

$$(H_0(K)f)(q) = \mathcal{E}_K(q)f(q), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

где

$$\mathcal{E}_K(q) = \varepsilon(q) + \gamma \varepsilon(K - q), \quad (2)$$

функция $\varepsilon(\cdot)$ определяется по формуле (1). Оператор взаимодействия (возмущение) V действует в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{T}^d)$:

$$(Vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(q) dq, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d).$$

3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Возмущение V оператора умножения $H_0(K)$ является одномерным ограниченным самосопряженным оператором. Из теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при компактном возмущении следует, что существенный спектр оператора $H_\mu(K)$ совпадает со спектром оператора $H_0(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, и представляет собой интервал:

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K)) = \sigma(H_0(K)) = [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)],$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\min}(K) &= \min_{p \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_K(p) = (1 + \gamma)d - \sum_{i=1}^d \sqrt{1 + 2\gamma \cos K^{(i)} + \gamma^2}, \\ \mathcal{E}_{\max}(K) &= \max_{p \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_K(p) = (1 + \gamma)d + \sum_{i=1}^d \sqrt{1 + 2\gamma \cos K^{(i)} + \gamma^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем будем всюду предполагать, что $\gamma \neq 1$ и $d \geq 3$. При $\gamma = 1$ и $K = \vec{\pi} = (\pi, \dots, \pi) \in \mathbb{T}^d$ существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$ оператора $H_\mu(K)$ вырождается, т. е. превращается в точку $\mathcal{E}_{\min}(\vec{\pi}) = \mathcal{E}_{\max}(\vec{\pi}) = 2d$, и поэтому существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$ оператора $H_\mu(K)$ не является абсолютно непрерывным при всех $K \in \mathbb{T}^d$.

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Для любого $K \in \mathbb{T}^d$ определим аналитическую функцию $\nu(K, \cdot)$ в $\mathbb{C} \setminus [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)]$ по формуле

$$\nu(K, z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{z - \mathcal{E}_K(q)}. \quad (4)$$

Пусть $V^{1/2}$ – квадратный корень из положительного оператора V и $G_\mu(K, z)$ – интегральный оператор Бирмана–Швингера ранга 1 в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{T}^d)$ с ядром $(\mu/(2\pi)^d)\nu(K, z)$, $K \in \mathbb{T}^d$, $z > \mathcal{E}_{\max}(K)$. Следующее утверждение – хорошо известный принцип Бирмана–Швингера – доказан для широкого класса операторов на решетке в работе [15].

ЛЕММА 1. Пусть $z > \mathcal{E}_{\max}(K)$. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если функция $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ является решением уравнения $H_\mu(K)f = zf$, то функция $\varphi = V^{1/2}f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ является решением уравнения $\varphi = G_\mu(K, z)\varphi$;
- 2) если функция $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ является решением уравнения $\varphi = G_\mu(K, z)\varphi$, то $f = [z - H_0(K)]^{-1}V^{1/2}\varphi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ является решением уравнения $H_\mu(K)f = zf$;
- 3) число z является m -кратным собственным значением оператора $H_\mu(K)$ тогда и только тогда, когда число 1 является m -кратным собственным значением оператора $G_\mu(K, z)$;
- 4) с учетом кратности число собственных значений оператора $H_\mu(K)$, меньших z , равно числу собственных значений оператора $G_\mu(K, z)$, больших 1.

Для любого $K \in \mathbb{T}^d$ функция $\mathcal{E}_K(\cdot)$ имеет невырожденный максимум в точке $p = \vec{\pi} + p(K)$, поэтому существует интеграл

$$\int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(q)}$$

и определен предельный интегральный оператор Бирмана–Швингера

$$G_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(K)) = \mu V^{1/2}(\mathcal{E}_{\max}(K) - H_0(K))^{-1}V^{1/2}$$

с ядром $(\mu/(2\pi)^d)\nu(K, \mathcal{E}_{\max}(K))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $K \in \mathbb{T}^d$. Оператор $H_\mu(K)$ имеет собственное значение $z \geq \mathcal{E}_{\max}(K)$, т. е. $\text{Ker}(H_\mu(K) - zI) \neq 0$, тогда и только тогда, когда компактный оператор $G_\mu(K, z)$, действующий в $L^2(\mathbb{T}^d)$, имеет собственное значение 1 и существует функция $\psi \in \text{Ker}(G_\mu(K, z) - I)$ такая, что функция

$$f(p) = \frac{(V^{1/2}\psi)(p)}{z - \mathcal{E}_K(p)}, \quad p \in \mathbb{T}^d,$$

принадлежит пространству $L^2(\mathbb{T}^d)$. В этом случае $f \in \text{Ker}(H_\mu(K) - zI)$. Кроме того, если $z > \mathcal{E}_{\max}(K)$, то

$$\dim \text{Ker}(H_\mu(K) - zI) = \dim \text{Ker}(G_\mu(K, z) - I) \quad (5)$$

и

$$\text{Ker}(H_\mu(K) - zI) = \left\{ f: f(\cdot) = \frac{(V^{1/2}\psi)(\cdot)}{z - \mathcal{E}_K(\cdot)}, \psi \in \text{Ker}(G_\mu(K, z) - I) \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $z = \mathcal{E}_{\max}(K)$, то равенство (5) может не выполняться. В этом случае его нужно заменить на следующее неравенство:

$$\dim \text{Ker}(H_\mu(K) - \mathcal{E}_{\max}(K)I) \leq \dim \text{Ker}(G_\mu(K, z) - I);$$

если ψ является собственной функцией оператора $G_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(K))$, соответствующей собственному значению 1, то функция

$$f(\cdot) = \frac{\mu(V^{1/2}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(\cdot)}$$

является решением уравнения $H_\mu(K)f = \mathcal{E}_{\max}(K)f$. Однако данная функция не принадлежит пространству $L^2(\mathbb{T}^d)$, если $d = 3, 4$ и $(V^{1/2}\psi)(\vec{\pi} + p(K)) \neq 0$, где $p(K) = (p(K^{(1)}), \dots, p(K^{(d)}))$ и

$$p(K^{(i)}) = \arcsin \frac{\gamma \sin K^{(i)}}{\sqrt{1 + 2\gamma \cos K^{(i)} + \gamma^2}}, \quad K^{(i)} \in \mathbb{T}^1, \quad i = 1, \dots, d. \quad (6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $d = 3, 4$. Будем говорить, что оператор $H_\mu(K)$ имеет *виртуальный уровень* на правом краю (в точке $z = \mathcal{E}_{\max}(K)$) существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$, если число 1 является простым собственным значением оператора

$$G_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(K)) = \mu V^{1/2}(\mathcal{E}_{\max}(K) - H_0(K))^{-1} V^{1/2}$$

и соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию

$$(V^{1/2}\psi)(\vec{\pi} + p(K)) \neq 0.$$

Мы всегда можем считать, что $(V^{1/2}\psi)(\vec{\pi} + p(K)) = 1$.

Введем обозначение $\nu(K) = \nu(K, \mathcal{E}_{\max}(K))$ и для любого $\mu > 0$ определим следующие множества:

$$M_{<}(\mu) = \{K \in \mathbb{T}^d : 1 - \mu\nu(K) < 0\},$$

$$M_{=}(\mu) = \{K \in \mathbb{T}^d : 1 - \mu\nu(K) = 0\},$$

$$M_{>}(\mu) = \{K \in \mathbb{T}^d : 1 - \mu\nu(K) > 0\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Функция $\nu(K)$ (см. лемму 2 ниже) является аналитической на торе $\mathbb{T}^d$, и поэтому подмножество $M_{=}(\mu)$ – многообразие коразмерности 1 в $\mathbb{T}^d$. Более того, $M_{<}(\mu)$ и $M_{>}(\mu)$ – открытые связные множества в $\mathbb{T}^d$.

Отметим (см. лемму 3 ниже), что в силу аналитичности функции $\nu(K)$ и компактности пространства $\mathbb{T}^d$ справедливы неравенства $0 < \nu(0) \leq \nu(K) \leq \nu(\vec{\pi})$ при всех $K \in \mathbb{T}^d$.

Основные результаты настоящей работы формулируются в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $0 < \mu < 1/\nu(\vec{\pi})$, тогда $M_{<}(\mu) = \emptyset$, $M_{=}(\mu) = \emptyset$ и $M_{>}(\mu) = \mathbb{T}^d$.
2. Пусть $\mu = 1/\nu(\vec{\pi})$, тогда $M_{<}(\mu) = \emptyset$, $M_{=}(\mu) = \{\vec{\pi}\}$ и $M_{>}(\mu) = \mathbb{T}^d \setminus \{\vec{\pi}\}$.
3. Пусть $1/\nu(\vec{\pi}) < \mu < 1/\nu(0)$, тогда каждое из множеств $M_{<}(\mu)$, $M_{=}(\mu)$ и $M_{>}(\mu)$ является непустым.
4. Пусть $\mu = 1/\nu(0)$, тогда $M_{<}(\mu) = \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$, $M_{=}(\mu) = \{0\}$ и $M_{>}(\mu) = \emptyset$.
5. Пусть $\mu > 1/\nu(0)$, тогда $M_{<}(\mu) = \mathbb{T}^d$, $M_{=}(\mu) = \emptyset$ и $M_{>}(\mu) = \emptyset$.

ТЕОРЕМА 2. 1. Пусть $\mu > 0$ и $K \in M_{<}(\mu)$. Тогда оператор $H_\mu(K)$ имеет единственное собственное значение $E_\mu(K)$, лежащее правее существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$. Соответствующее собственное состояние

$$\psi_{\mu,K}(\cdot) = c \cdot \frac{\mu}{E_\mu(K) - \mathcal{E}_K(\cdot)},$$

где $c \neq 0$ – нормировочный множитель, принадлежит пространству $L^2(\mathbb{T}^d)$ и является вещественно-аналитической функцией. Кроме того, $E_\mu(K)$ – четная вещественно-аналитическая функция на $M_{<}(\mu)$. Отображение $\psi_\mu: M_{<}(\mu) \mapsto L^2(\mathbb{T}^d)$

такое, что $K \mapsto \psi_{\mu,K}(\cdot)$, является векторнозначным аналитическим отображением. Если $0 < \mu \leq 1/\nu(0)$, то для собственного значения $E_\mu(K)$, $K \in M_<(\mu)$, выполняются неравенства $\mathcal{E}_{\max}(K) < E_\mu(K) < \mathcal{E}_{\max}(0)$; если $\mu > 1/\nu(0) > 0$, то собственное значение $E_\mu(K)$, $K \in M_<(\mu)$, удовлетворяет неравенствам

$$\mathcal{E}_{\max}(0) < E_\mu(0), \quad \mathcal{E}_{\max}(K) < E_\mu(K) < E_\mu(0).$$

2. Пусть $\mu > 0$ и $K \in M_=(\mu)$. При $d = 3, 4$ правый край $\mathcal{E}_{\max}(K)$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$ является виртуальным уровнем оператора $H_\mu(K)$. Соответствующее виртуальное состояние

$$\psi_{\mu,K}(\cdot) = c \cdot \frac{\mu}{\mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(\cdot)},$$

где $c \neq 0$ – нормировочный множитель, принадлежит $L^1(\mathbb{T}^d) \setminus L^2(\mathbb{T}^d)$. При $d \geq 5$ и $K \in M_=(\mu)$ правый край $\mathcal{E}_{\max}(K)$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$ является собственным значением оператора $H_\mu(K)$. Соответствующее собственное состояние имеет вид

$$\psi_{\mu,K}(\cdot) = c \cdot \frac{\mu}{\mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(\cdot)},$$

где $c \neq 0$ – нормировочный множитель, и принадлежит пространству $L^2(\mathbb{T}^d)$.

3. Пусть $\mu > 0$ и $K \in M_>(\mu)$. Тогда оператор $H_\mu(K)$ не имеет собственного значения, лежащего правее существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Множество $M_<(\mu)$ возрастает (расширяется) от пустого множества до тора $\mathbb{T}^d$ при возрастании константы связи $\mu > 0$. Множество пороговых значений квазиимпульса $M_=(\mu)$ характеризуется тем, что для любой точки $K_0 \in M_=(\mu)$ и для любой ее окрестности $W(K_0) \subset \mathbb{T}^d$ найдутся точки $K'_0 \in M_<(\mu)$ и $K''_0 \in M_>(\mu)$ такие, что число собственных значений операторов $H_\mu(K'_0)$ и $H_\mu(K''_0)$ отличается на единицу.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Как следует из утверждения 2 теоремы 2, виртуальное состояние $\psi_{\mu,K}(\cdot)$, соответствующее пороговому виртуальному уровню, или пороговое собственное состояние, соответствующее пороговому собственному значению, не являются даже непрерывными функциями на $\mathbb{T}^d$. Однако собственное состояние, соответствующее собственному значению, которое лежит вне существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$ оператора $H_\mu(K)$, является аналитической функцией на $\mathbb{T}^d$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из свойств интеграла Лебега от неотрицательных функций следует, что множества $M_<(\mu)$, $M_=(\mu)$ и $M_>(\mu)$ можно определить также следующим эквивалентным способом:

$$\begin{aligned} M_<(\mu) &= \{K \in \mathbb{T}^d: \mu > \mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(q), q \in \mathbb{T}^d\}, \\ M_=(\mu) &= \{K \in \mathbb{T}^d: \mu = \mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(q), q \in \mathbb{T}^d\}, \\ M_>(\mu) &= \{K \in \mathbb{T}^d: \mu < \mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(q), q \in \mathbb{T}^d\}. \end{aligned}$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Предварительно докажем несколько лемм.

Функцию $\mathcal{E}_K(p)$, определенную формулой (2), можно представить в виде

$$\mathcal{E}_K(p) = (1 + \gamma)d - \sum_{i=1}^d \sqrt{1 + 2\gamma \cos K^{(i)} + \gamma^2 \cos(p^{(i)} - p(K^{(i)}))}, \quad (7)$$

где $p(K^{(i)})$ заданы в (6). Положим

$$a(K^{(i)}) = \sqrt{1 + 2\gamma \cos K^{(i)} + \gamma^2} \geq 0. \quad (8)$$

Отсюда немедленно вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы следующие соотношения: для всех $i = 1, \dots, d$*

$$a(K^{(i)}) = a(-K^{(i)}), \quad K^{(i)} \in \mathbb{T}^1, \quad (9a)$$

$$a(K^{(i)}) > \min_{K^{(i)} \in \mathbb{T}^1} a(K^{(i)}) = |1 - \gamma|, \quad K^{(i)} \neq \pi, \quad (9б)$$

$$a(K^{(i)}) < \max_{K^{(i)} \in \mathbb{T}^1} a(K^{(i)}) = 1 + \gamma, \quad K^{(i)} \neq 0. \quad (9в)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\mathcal{E}_{\min}(K) > \min_{K \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_{\min}(K) = \mathcal{E}_{\min}(0) = 0, \quad K \neq 0, \quad (10a)$$

$$\mathcal{E}_{\min}(K) < \max_{K \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_{\min}(K) = \mathcal{E}_{\min}(\vec{\pi}) = (1 + \gamma - |1 - \gamma|)d, \quad K \neq \vec{\pi}, \quad (10б)$$

$$\mathcal{E}_{\max}(K) > \min_{K \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_{\max}(K) = (1 + \gamma + |1 - \gamma|)d, \quad K \neq \vec{\pi}, \quad (10в)$$

$$\mathcal{E}_{\max}(K) < \max_{K \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_{\max}(K) = \mathcal{E}_{\max}(0) = 2(1 + \gamma)d, \quad K \neq 0. \quad (10г)$$

Кроме того, при $\gamma \rightarrow 0$

$$\mathcal{E}_{\min}(K) \rightarrow 0, \quad \mathcal{E}_{\max}(K) \rightarrow 2d. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опираясь на утверждения (9б) и (9в) предложения 1, получим соотношения (10а) и (10б): при $K \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\min}(K) &= (1 + \gamma)d - \sum_{i=1}^d a(K^{(i)}) > \min_{K \in \mathbb{T}^d} \left[(1 + \gamma)d - \sum_{i=1}^d a(K^{(i)}) \right] = \\ &= (1 + \gamma)d - \sum_{i=1}^d \max_{K^{(i)}} a(K^{(i)}) = (1 + \gamma)d - \sum_{i=1}^d (1 + \gamma) = 0; \end{aligned}$$

при $K \neq \vec{\pi}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\min}(K) &= (1 + \gamma)d - \sum_{i=1}^d a(K^{(i)}) < \max_{K \in \mathbb{T}^d} \left[(1 + \gamma)d - \sum_{i=1}^d a(K^{(i)}) \right] = \\ &= (1 + \gamma)d - \sum_{i=1}^d \min_{K^{(i)}} a(K^{(i)}) = (1 + \gamma)d - \sum_{i=1}^d |1 - \gamma| = \\ &= (1 + \gamma - |1 - \gamma|)d. \end{aligned}$$

Формулы (10в) и (10г) доказываются аналогично. Утверждение (11) вытекает из формул (3) для $\mathcal{E}_{\max}(K)$ и $\mathcal{E}_{\min}(K)$.

ЛЕММА 2. Пусть $K \in \mathbb{T}^d$. Тогда существует предел $\lim_{z \rightarrow \mathcal{E}_{\max}(K)} \nu(K, z) < +\infty$. Более того, равенство

$$\nu(K) = \nu(K, \mathcal{E}_{\max}(K)) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(q)}$$

задает аналитическую функцию на торе $\mathbb{T}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (7) следует, что функция $\mathcal{E}_K(\cdot)$ имеет невырожденный максимум в точке $p := \vec{\pi} + p(K)$. Функцию $\nu(K, z)$, определенную по формуле (4), представим в виде

$$\nu(K, z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dp}{z - \mathcal{E}_{\max}(K) + \sum_{i=1}^d a(K^{(i)})[1 + \cos(p^{(i)} - p(K^{(i)}))]}.$$

Заменяя в этом интеграле переменную $p := q + p(K)$ на q , получим

$$\nu(K, z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{z - \mathcal{E}_{\max}(K) + \sum_{i=1}^d a(K^{(i)})(1 + \cos q^{(i)})},$$

при этом точка $q = \vec{\pi}$ является единственной невырожденной точкой минимума функции $\sum_{i=1}^d a(K^{(i)})(1 + \cos q^{(i)})$.

Пусть $W_\theta(0)$ – шар достаточно малого радиуса $\theta > 0$ с центром в точке $y = 0$. Рассмотрим отображение $\phi_K: W_\theta(0) \mapsto \widetilde{W}(\vec{\pi})$ такое, что

$$q^{(i)} \mapsto 2 \arccos \frac{y_i}{\sqrt{2a(K^{(i)})}}, \quad K^{(i)} \in \mathbb{T}^1, \quad i = 1, \dots, d,$$

где $\widetilde{W}(\vec{\pi}) := \phi_K(W_\theta(0))$ – образ шара $W_\theta(0)$. Функцию $\nu(K, z)$ представим в виде суммы двух функций:

$$\begin{aligned} \nu(K, z) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\widetilde{W}(\vec{\pi})} \frac{dq}{z - \mathcal{E}_{\max}(K) + \sum_{i=1}^d a(K^{(i)})(1 + \cos q^{(i)})} + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d \setminus \widetilde{W}(\vec{\pi})} \frac{dq}{z - \mathcal{E}_{\max}(K) + \sum_{i=1}^d a(K^{(i)})(1 + \cos q^{(i)})} = \\ &= \nu_1(K, z) + \nu_2(K, z). \end{aligned} \quad (12)$$

При всех $K \in \mathbb{T}^d$ и $z \geq \mathcal{E}_{\max}(K)$ функция

$$z - \mathcal{E}_{\max}(K) + \sum_{i=1}^d a(K^{(i)})(1 + \cos q^{(i)})$$

в замкнутой области $\mathbb{T}^d \setminus \widetilde{W}(\vec{\pi})$ строго положительна, поэтому функции $\nu_2(\cdot, z)$ при $z \geq \mathcal{E}_{\max}(\cdot)$ и $\nu_2(K, \cdot)$ при $K \in \mathbb{T}^d$ являются вещественно-аналитическими функциями на торе $\mathbb{T}^d$ и на полубесконечном интервале $(\mathcal{E}_{\max}(\cdot), +\infty)$ соответственно. В первом интеграле равенства (12), заменяя переменную $q := \phi_K(y)$ на y , получим

$$\nu_1(K, z) = \int_{W_\theta(0)} \frac{J(\phi_K(y), K)}{z - \mathcal{E}_{\max}(K) + \sum_{i=1}^d y_i^2} dy. \quad (13)$$

Якобиан $J(\phi_K(y), K)$ преобразования $\phi_K(y)$ равен

$$J(\phi_K(y), K) = 2^d \prod_{i=1}^d \frac{1}{\sqrt{2a(K^{(i)}) - y_i^2}}.$$

Перейдем к сферическим координатам $y = r\omega$ в интеграле (13), получим

$$\nu_1(K, z) = \int_0^\theta \frac{r^{d-1}}{z - \mathcal{E}_{\max}(K) + r^2} \left\{ \int_{\Omega_{d-1}} J(\phi_K(r\omega), K) d\omega \right\} dr, \quad (14)$$

где Ω_{d-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^{d-1}$ и $d\omega$ – элемент площади единичной сферы. При $d \geq 3$, используя соотношение (14), имеем

$$\nu_1(K, \mathcal{E}_{\max}(K)) = \int_0^\theta r^{d-3} \left\{ \int_{\Omega_{d-1}} J(\phi_K(r\omega), K) d\omega \right\} dr,$$

где $J(\phi(\cdot)(r\omega), \cdot)$ – аналитическая функция на $\mathbb{T}^d$. Следовательно, $\nu_1(\cdot, \mathcal{E}_{\max}(\cdot))$ является аналитической функцией на $\mathbb{T}^d$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $K \in \mathbb{T}^d$. Если $d = 3, 4$, то функция

$$f(\cdot) = \frac{\mu(V^{1/2}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(\cdot)}$$

принадлежит $L^1(\mathbb{T}^d) \setminus L^2(\mathbb{T}^d)$. Если $d \geq 5$, то эта функция принадлежит пространству $L^2(\mathbb{T}^d)$.

Для доказательства достаточно заметить, что $(V^{1/2}\psi)(p) = c \neq 0$ и воспользоваться доказательством леммы 2.

ЛЕММА 3. 1. Функция $\nu(K) = \nu(K_1, \dots, K_d)$ является четной на $\mathbb{T}^d$ и для любого фиксированного $(K^{(1)}, \dots, K^{(i-1)}, K^{(i+1)}, \dots, K^{(d)}) \in \mathbb{T}^{d-1}$ монотонно возрастает (монотонно убывает) при $K^{(i)} \in (0, \pi)$ (соответственно при $K^{(i)} \in (-\pi, 0)$) для всех $i = 1, \dots, d$.

2. Пусть $K \in \mathbb{T}^d$. Тогда имеют место соотношения

$$\min_{K \in \mathbb{T}^d} \nu(K) = \nu(0) \leq \nu(K) \leq \nu(\vec{\pi}) = \max_{K \in \mathbb{T}^d} \nu(K).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из следующего представления функции $\nu(K)$:

$$\nu(K) = \nu(K, \mathcal{E}_{\max}(K)) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\sum_{i=1}^d a(K^{(i)})(1 + \cos q^{(i)})}.$$

В самом деле, $a_\gamma(K^{(i)})$ – четная функция переменной $K^{(i)} \in \mathbb{T}^1$, $i = 1, \dots, d$, следовательно, функция $\nu(K)$ является четной. Функция $a(K^{(i)})$, $K^{(i)} \in \mathbb{T}^1$, $i = 1, \dots, d$, монотонно убывает (монотонно возрастает) на интервале $(0, \pi)$ (соответственно на интервале $(-\pi, 0)$). Из монотонности интеграла Лебега вытекает, что для любого фиксированного $(K^{(1)}, \dots, K^{(i-1)}, K^{(i+1)}, \dots, K^{(d)}) \in \mathbb{T}^{d-1}$ функция $\nu(K)$ монотонно возрастает (монотонно убывает) на интервале $(0, \pi)$ (соответственно на интервале $(-\pi, 0)$).

2. В силу предложения 1 верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \nu(K) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\sum_{i=1}^d \sqrt{1 + 2\gamma \cos K^{(i)} + \gamma^2(1 + \cos q^{(i)})}} \geq \\ &\geq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\sum_{i=1}^d \max_K a(K^{(i)})(1 + \cos q^{(i)})} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 + \gamma} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\sum_{i=1}^d (1 + \cos q^{(i)})} = \nu(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu(K) &\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\sum_{i=1}^d \min_K a(K^{(i)})(1 + \cos q^{(i)})} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{|1 - \gamma|} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\sum_{i=1}^d (1 + \cos q^{(i)})} = \nu(\vec{\pi}).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для любых $K \in \mathbb{T}^d$ и $z \in \mathbb{C} \setminus [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)]$ определитель Фредгольма, ассоциированный с оператором $H_\mu(K)$, равен $\Delta_\mu(K, z) = 1 - \mu\nu(K, z)$. Заметим, что $\Delta_\mu(K, z)$ – вещественно-аналитическая функция в $\mathbb{T}^d \times (\mathbb{C} \setminus [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)])$.

Следующая лемма является простым следствием принципа Бирмана–Швингера и теоремы Фредгольма. Мы приведем ее доказательство, чтобы установить общий вид собственной функции.

ЛЕММА 4. Пусть $K \in \mathbb{T}^d$. Точка $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$ является собственным значением оператора $H_\mu(K)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(K, z) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $z = E_\mu(K) \in \mathbb{C} \setminus [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)]$ является собственным значением оператора $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, и $0 \neq \psi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ – соответствующая собственная функция, т. е.

$$(E_\mu(K) - \mathcal{E}_K(q))\psi(q) = \frac{\mu}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \psi(t) dt.$$

Отсюда заключаем, что собственная функция $\psi(\cdot) \equiv \psi_{\mu, K}(\cdot)$ имеет вид

$$\psi_{\mu, K}(q) = c \cdot \frac{\mu}{E_\mu(K) - \mathcal{E}_K(q)}, \quad (15)$$

где $c \neq 0$ – нормировочный множитель. Проинтегрировав и умножив на $(2\pi)^{-d}$ обе части последнего равенства, получим

$$c = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \psi_{\mu, K}(t) dt = \frac{c\mu}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dt}{z - \mathcal{E}_K(t)},$$

таким образом, $c\Delta_\mu(K, z) = 0$.

Пусть уравнение $\Delta_\mu(K, z) = 0$ имеет решение $z = E_\mu(K) \in \mathbb{C} \setminus [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)]$, тогда для любого $c \neq 0$ функция ψ , определенная по формуле (15), принадлежит пространству $L^2(\mathbb{T}^d)$ и удовлетворяет уравнению $H_\mu(K)\psi = z\psi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1. Подмножество $M_{<}(\mu)$ (подмножество $M_{>}(\mu)$) симметрично, т. е. если $K \in M_{<}(\mu)$ (соответственно $K \in M_{>}(\mu)$), то $-K \in M_{<}(\mu)$ (соответственно $-K \in M_{>}(\mu)$).

2. Если $\mu' < \mu''$, то $M_{<}(\mu') \subset M_{<}(\mu'')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из четности функции $\nu(\cdot)$ на торе $\mathbb{T}^d$. Докажем второе утверждение.

Пусть $\mu' < \mu''$ и $K \in M_{<}(\mu')$. Функция $1 - \mu\nu(K)$ как функция переменной μ монотонно убывает, поэтому из неравенства $1 - \mu'\nu(K) < 0$ следует неравенство $1 - \mu''\nu(K) < 0$, т. е. $M_{<}(\mu') \subset M_{<}(\mu'')$.

ЛЕММА 5. Пусть $d = 3, 4$ и $K \in \mathbb{T}^d$. Следующие утверждения эквивалентны:

1) число $z = \mathcal{E}_{\max}(K)$ является виртуальным уровнем оператора $H_\mu(K)$, и соответствующее виртуальное состояние имеет вид

$$\psi_{\mu,K}(\cdot) = c \cdot \frac{\mu}{\mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(\cdot)} \in L^1(\mathbb{T}^d) \setminus L^2(\mathbb{T}^d),$$

где $c \neq 0$ – нормировочный множитель;

2) $\Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(K)) = 1 - \mu\nu(K) = 0$;

3) $\mu = 1/\nu(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Пусть $d = 3, 4$ и число $z = \mathcal{E}_{\max}(K)$ – виртуальный уровень оператора $H_\mu(K)$. Согласно определению виртуального уровня (см. раздел 3) число 1 является собственным значением оператора $G_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(K))$, т. е. уравнение

$$\varphi(p) = \frac{\mu}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dt}{\mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(t)} \varphi(q) dq \quad (16)$$

имеет ненулевое решение. Единственная функция $\varphi(p) = c \neq 0$ является решением этого уравнения, поэтому из (16) следует равенство

$$c \left(1 - \frac{\mu}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(q)} \right) = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(K)) = 1 - \frac{\mu}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(q)} = 0,$$

т. е. $\mu = 1/\nu(K)$.

Пусть $\mu = 1/\nu(K)$. Тогда $\Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(K)) = 0$, и $\varphi(p) = c \neq 0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$ является нетривиальным решением уравнения $G_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(K))\varphi = \varphi$. По определению число $z = \mathcal{E}_{\max}(K)$ есть виртуальный уровень оператора $H_\mu(K)$, и соответствующее виртуальное состояние

$$\psi_{\mu,K}(\cdot) = c \cdot \frac{\mu}{\mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(\cdot)}$$

согласно следствию из леммы 2 принадлежит $L^1(\mathbb{T}^d) \setminus L^2(\mathbb{T}^d)$.

Аналогично предыдущей доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 6. Пусть $d \geq 5$ и $K \in \mathbb{T}^d$. Следующие утверждения эквивалентны:

1) число $z = \mathcal{E}_{\max}(K)$ является собственным значением оператора $H_\mu(K)$, и соответствующее собственное состояние имеет вид

$$\psi_{\mu,K}(\cdot) = c \cdot \frac{\mu}{\mathcal{E}_{\max}(K) - \mathcal{E}_K(\cdot)} \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

где c – нормировочный множитель;

2) $\Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(K)) = 1 - \mu\nu(K) = 0$;

3) $\mu = 1/\nu(K)$.

ЛЕММА 7. 1. При всех $K \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ и $z \geq \mathcal{E}_{\max}(0)$ имеет место неравенство $\nu(0, z) > \nu(K, z)$.

2. Пусть $\mu = 1/\nu(0)$. Тогда $\Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(0)) > 0$ для любого $K \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из определения $\nu(K, z)$ получим, что

$$\begin{aligned}\nu(0, z) - \nu(K, z) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{1}{z - \mathcal{E}_0(q)} - \frac{1}{z - \mathcal{E}_K(q)} \right) dq = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{1}{z - (1 + \gamma)\varepsilon(q)} - \frac{1}{z - (\varepsilon(q) + \gamma\varepsilon(K - q))} \right) dq = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\gamma[\varepsilon(q) - \varepsilon(K - q)]}{[z - (1 + \gamma)\varepsilon(q)][z - (\varepsilon(q) + \gamma\varepsilon(K - q))]} dq.\end{aligned}$$

Заменяя переменную $q := K/2 - p$ на p и учитывая равенство $\nu(-K, z) = \nu(K, z)$, представим разность $\nu(0, z) - \nu(K, z)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\nu(0, z) - \nu(K, z) &= \frac{\nu(0, z) - \nu(-K, z) + \nu(0, z) - \nu(K, z)}{2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \gamma \left[\varepsilon\left(\frac{K}{2} - p\right) - \varepsilon\left(\frac{K}{2} + p\right) \right]^2 F_z(K, p) Q_z(K, p) dp,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}F_z(K, p) &= \frac{2z - \mathcal{E}_K(K/2 - p) - \mathcal{E}_K(K/2 + p)}{[z - \mathcal{E}_K(K/2 - p)][z - \mathcal{E}_K(K/2 + p)]} > 0, \\ Q_z(K, p) &= \frac{1}{[z - (1 + \gamma)\varepsilon(K/2 - p)][z - (1 + \gamma)\varepsilon(K/2 + p)]} > 0.\end{aligned}$$

Таким образом, при всех $K \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ и $z \geq \mathcal{E}_{\max}(0)$ неравенство $\nu(0, z) - \nu(K, z) > 0$ доказано.

2. Пусть $\mu = 1/\nu(0)$. Тогда в силу лемм 5 и 6 получим, что $\Delta_\mu(0, \mathcal{E}_{\max}(0)) = 0$. Из первого утверждения доказываемой леммы следует, что

$$\nu(0, \mathcal{E}_{\max}(0)) > \nu(K, \mathcal{E}_{\max}(0)),$$

отсюда

$$\Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(0)) = 1 - \mu\nu(K, \mathcal{E}_{\max}(0)) > 1 - \mu\nu(0, \mathcal{E}_{\max}(0)) = 0.$$

Таким образом, при всех $K \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ неравенство $\Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(0)) > 0$ доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем утверждение 1. Пусть $0 < \mu < 1/\nu(\vec{\pi})$. Тогда в силу второго утверждения леммы 3 получим следующие соотношения:

$$1 - \mu\nu_\gamma(K) > 1 - \frac{\nu_\gamma(K)}{\nu(\vec{\pi})} \geq 0, \quad K \in \mathbb{T}^d.$$

Следовательно, $M_<(\mu) = \emptyset$ и $M_=(\mu) = \emptyset$ и $M_>(\mu) = \mathbb{T}^d$.

Доказательство утверждений 2 и 4 теоремы также вытекает из второго утверждения леммы 3.

Докажем утверждение 3 теоремы. Пусть $1/\nu(\vec{\pi}) < \mu < 1/\nu(0)$. Тогда из непрерывности функции $\nu(K)$ следует существование таких $K', K'', K_0 \in \mathbb{T}^d \setminus \{0, \vec{\pi}\}$, что $1 - \mu\nu(K') < 0$, $1 - \mu\nu(K'') > 0$ и $1 - \mu\nu(K_0) = 0$. Следовательно, каждое из множеств $M_<(\mu)$, $M_>(\mu)$ и $M_=(\mu)$ является непустым. Из непрерывности функции $\nu(K)$ следует, что $M_<(\mu)$ и $M_>(\mu)$ – открытые связные подмножества тора $\mathbb{T}^d$. Из второго утверждения леммы 3 вытекает, что если множество $M_>(\mu)$ непусто, то $K = 0 \in M_>(\mu)$.

Утверждение 5 теоремы доказывается аналогично утверждению 1. Теорема 1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем утверждение 1.

Пусть $\mu > 0$ и $K \in M_{<}(\mu)$. Тогда из определения множества $M_{<}(\mu)$ получим, что $1 - \mu\nu(K) < 0$, т.е. выполняется неравенство $\Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(K)) < 0$. В силу непрерывности и монотонности функции $\Delta_\mu(K, \cdot)$ существует единственное число $E_\mu(K) \in (\mathcal{E}_{\max}(K), +\infty)$ такое, что $\Delta_\mu(K, E_\mu(K)) = 0$. В силу леммы 4 оператор $H_\mu(K)$ имеет собственное значение на интервале $(\mathcal{E}_{\max}(K), +\infty)$. Соответствующее собственное состояние определяется по формуле (15).

Функции $\Delta_\mu(\cdot, z)$ при $z \in \mathbb{C} \setminus [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)]$ и $\Delta_\mu(K, \cdot)$ при $K \in \mathbb{T}^d$ являются вещественно-аналитическими функциями на $\mathbb{T}^d$ и $\mathbb{C} \setminus [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)]$ соответственно. Уравнение $\Delta_\mu(K, z) = 0$ имеет единственное решение $E_\mu(K)$. Следовательно, в силу теоремы о неявной функции $E_\mu(\cdot)$ является аналитической функцией на торе $\mathbb{T}^d$. Функция $\mathcal{E}_K(\cdot)$ аналитическая, причем $E_\mu(K) - \mathcal{E}_K(\cdot) \neq 0$ на $\mathbb{T}^d$. Следовательно, собственное состояние (15) есть аналитическая функция на $\mathbb{T}^d$. Аналитичность отображения ψ_μ вытекает из аналитичности вектор-функции

$$\psi_{\mu,K}(q) = c \cdot \frac{\mu}{E_\mu(K) - \mathcal{E}_K(q)}$$

как функции двух переменных $K, q \in \mathbb{T}^d$.

Очевидно, что для любых $K \in \mathbb{T}^d$ и $z \in (\mathcal{E}_{\max}(K), +\infty)$ имеет место равенство $\Delta_\mu(-K, z) = \Delta_\mu(K, z)$. Отсюда и из единственности решения уравнения $\Delta_\mu(K, z)$ следует, что $\Delta_\mu(-K, E_\mu(-K)) = \Delta_\mu(K, E_\mu(K)) = 0$, и это доказывает четность $E_\mu(\cdot)$ как функции $K \in M_{<}(\mu)$.

В силу утверждения 2 леммы 7 при всех $K \neq 0$ и $\mu = 1/\nu(0)$ выполняется неравенство $\Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(0)) > 0$. Функция $\Delta_\mu(K, z)$ монотонно убывает по переменной $\mu > 0$, поэтому при всех $0 < \mu \leq 1/\nu(0)$ выполняется неравенство $\Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(0)) > 0$. Для любого $K \in M_{<}(\mu)$ функция $\Delta_\mu(K, \cdot)$ монотонно возрастает на интервале $(\mathcal{E}_{\max}(K), +\infty)$, и выполняются соотношения

$$\Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(K)) < \Delta_\mu(K, E_\mu(K)) = 0 < \Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(0)).$$

Следовательно, при $\mu \leq 1/\nu(0)$ и $K \in M_{<}(\mu)$ собственное значение $E_\mu(K)$ оператора $H_\mu(K)$ лежит в интервале $(\mathcal{E}_{\max}(K), \mathcal{E}_{\max}(0))$.

Пусть $\mu > 1/\nu(0)$. Из утверждения 1 леммы 7 при всех $K \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ и $z \geq \mathcal{E}_{\max}(0)$ получим, что $\Delta_\mu(0, z) < \Delta_\mu(K, z)$. Для любого $K \in \mathbb{T}^d$ функция $\Delta_\mu(K, \cdot)$ монотонно возрастает, и имеют место соотношения

$$\Delta_\mu(K, E_\mu(K)) = 0 = \Delta_\mu(0, E_\mu(0)) < \Delta_\mu(K, E_\mu(0)).$$

Следовательно, $\mathcal{E}_{\max}(K) < E_\mu(K) < E_\mu(0)$ при всех ненулевых $K \in M_{<}(\mu)$.

Докажем утверждение 2 теоремы. Пусть $\mu > 0$ и $K \in M_{\leq}(\mu)$. В силу лемм 5 и 6 с учетом определения множества $M_{\leq}(\mu)$ имеем, что при $d = 3, 4$ правый край $z = \mathcal{E}_{\max}(K)$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$ является виртуальным уровнем, а при $d \geq 5$ — собственным значением оператора $H_\mu(K)$.

Докажем утверждение 3 теоремы. Пусть $\mu > 0$ и $K \in M_{>}(\mu)$. Тогда по определению множества $M_{>}(\mu)$ получим, что $1 - \mu\nu(K) > 0$, т.е. выполняется неравенство $\Delta_\mu(K, \mathcal{E}_{\max}(K)) > 0$. Следовательно, функция $\Delta_\mu(K, \cdot)$ не имеет нулей на множестве $(\mathcal{E}_{\max}(K), +\infty)$, поэтому оператор $H_\mu(K)$ не имеет собственного значения, лежащего правее существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$. Теорема 2 полностью доказана.

Благодарности. Авторы приносят глубокую благодарность Р. А. Минлосу за ценные советы. Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований Республики Узбекистан.

Список литературы

- [1] A. I. Mogilner, “Hamiltonians in solid-state physics as multiparticle discrete Schrodinger operators: problems and results”, *Many Particle Hamiltonians: Spectra and Scattering*, Advances in Soviet Mathematics, **5**, ed. R. A. Minlos, AMS, Providence, RI, 1991, 139–194.
- [2] D. C. Mattis, *Rev. Mod. Phys.*, **58**:2 (1986), 361–379.
- [3] S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov, *Commun. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 91–115, arXiv:math-ph/0501013.
- [4] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, *Ann. Inst. H. Poincaré A (N. S.)*, **37**:1 (1982), 1–28.
- [5] С. Н. Лакаев, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:3 (1993), 15–28.
- [6] J. Rauch, *J. Funct. Anal.*, **35**:3 (1980), 304–315.
- [7] H. Tamura, *Nagoya Math. J.*, **130** (1993), 55–83.
- [8] Д. Р. Яфаев, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 567–593.
- [9] S. Albeverio, R. Høegh-Krohn, T. T. Wu, *Phys. Lett. A*, **83**:3 (1971), 105–109.
- [10] Yu. N. Ovchinnikov, I. M. Sigal, *Ann. Physics*, **123**:2 (1989), 274–295.
- [11] A. V. Sobolev, *Commun. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126.
- [12] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Ann. Henri Poincaré*, **5**:4 (2004), 743–772.
- [13] K. Winkler, G. Thalhammer, F. Lang, R. Grimm, J. Hesker Denschlag, K. J. Daley, A. Kantian, H. P. Büchler, P. Zoller, *Nature*, **441**:7095 (2006), 853–856, arXiv:cond-mat/0605196.
- [14] P. A. F. da Veiga, L. Ioriatti, M. O’Carroll, *Phys. Rev. E*, **66**:1 (2002), 016130, 9 pp.
- [15] V. Bach, P. W. De Siqueira, S. N. Lakaev, *Bounds on the discrete spectrum of lattice Schrödinger operators*, Preprint mp-arc 10-143, 2010, 45 pp.

Поступила в редакцию 1.03.2011