Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Х. Эшкабилов, Р. Р. Кучаров, О существенном и дискретном спектрах трехчастичного оператора Шредингера на решетке, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 3, 409–422

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6775>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:49:58

© 2012 г.

Ю. Х. Эшкабилов*, Р. Р. Кучаров*

О СУЩЕСТВЕННОМ И ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРАХ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

Изучается местоположение существенного спектра одного трехчастичного оператора Шредингера H . Вычислена нижняя грань существенного спектра оператора H и доказана конечность числа собственных значений, лежащих ниже нижнего края существенного спектра в модели H .

Ключевые слова: существенный спектр, дискретный спектр, нижняя грань существенного спектра, оператор Шредингера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из важных вопросов в теории операторов Шредингера – описание существенного спектра и изучение числа собственных значений (связанных состояний), лежащих вне существенного спектра. Первые результаты о конечности дискретного спектра N -частичных гамильтонианов при $N > 2$ получил Утияма [1]–[3] в 1969 г. Он нашел достаточные условия конечности числа дискретных собственных значений операторов энергии в пространстве $L_2(\mathbb{R}^6)$ для системы двух одноименно заряженных частиц в поле неподвижного центра при наличии внешнего электромагнитного поля и без него. В 1971 г. Жислин [4] доказал конечность дискретного спектра операторов энергии в пространствах симметрии для отрицательных атомарных ионов с ядрами любой массы и молекул с бесконечно тяжелыми ядрами в предположении, что суммарный заряд рассматриваемых систем меньше -1 . Затем Яфаев [5], [6] получил условия конечности дискретного спектра трехчастичного гамильтониана. Метод работ Жислина [4], [7], [8] является развитием метода Утиямы и использует предложенное в работах [9] и [10] разбиение координатного пространства.

В моделях физики твердого тела [11]–[13], а также в решетчатой теории поля (см. [14]–[17]) естественным образом появляются дискретные операторы Шредингера. В работах [18]–[21] изучена конечность числа собственных значений дискретных операторов Шредингера, соответствующих многочастичным системам.

*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: yusup62@mail.ru, ramz3364647@yahoo.com

Пусть $\mathbb{Z}^\nu$ – ν -мерная целочисленная решетка. Рассмотрим дискретный оператор Шредингера $Q = Q_0 - Q'$, действующий в пространстве $l_2(\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu)$. Кинетическая энергия Q_0 задается сверткой с функцией общего вида:

$$(Q_0\phi)(m, n) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}^\nu} v_0(m - p, n - q)\phi(p, q),$$

а потенциальная энергия Q' равна

$$(Q'\phi)(m, n) = (v_1(m) + v_2(n))\phi(m, n).$$

Мы будем предполагать, что функции $v_0(m, n)$, $v_1(m)$ и $v_2(n)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} |v_0(m, n)| &\leq C_0 e^{-a(|m|+|n|)}, & a > 0, \\ |v_k(q)| &\leq C_k e^{-b_k|q|}, & b_k > 0, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

где $|q| = |q_1| + \dots + |q_\nu|$, $q = (q_1, \dots, q_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$, C_0, C_k – константы.

Оператор Q является частным случаем модели решетчатого гамильтониана, изученного в работах [12], [17].

Пусть T^ν – ν -мерный тор, $\mathcal{F}: l_2(\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu) \rightarrow L_2(T^\nu \times T^\nu)$ – преобразование Фурье, при котором функции $\phi(m, n)$ на решетке $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu$ переходят в функции $f(x, y)$ на $T^\nu \times T^\nu$ по правилу

$$\phi(m, n) \rightarrow f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}^\nu} \phi(p, q) e^{i[(m, x) + (n, y)]},$$

при этом оператор Q переходит (см. [17]) в оператор W , действующий в $L_2(T^\nu \times T^\nu)$ по формуле

$$Wf(x, y) = k_0(x, y)f(x, y) - (V_1 + V_2)f(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} V_1 f(x, y) &= \int_{T^\nu} k_1(x - s)f(s, y) ds, \\ V_2 f(x, y) &= \int_{T^\nu} k_2(y - t)f(x, t) dt. \end{aligned}$$

Здесь $k_0(x, y)$ – преобразование Фурье функции $v_0(m, n)$, а $k_i(\cdot)$ – преобразование Фурье функции $v_i(\cdot)$, $i = 1, 2$.

Оператор W называется P -представлением дискретного оператора Q .

В настоящей работе в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega \times \Omega)$, где $\Omega = [a, b]^\nu$, рассматривается следующий модельный оператор:

$$H = H_0 - (\gamma T_1 + \mu T_2), \quad \gamma > 0, \quad \mu > 0, \quad (1)$$

который является типичным примером оператора Шредингера W . Действия операторов H_0 , T_1 и T_2 определяются по формулам

$$\begin{aligned} H_0 f(x, y) &= k_0(x, y)f(x, y), \\ (T_1 f)(x, y) &= \int_{\Omega} \varphi_1(x) \overline{\varphi_1(s)} f(s, y) ds, \\ (T_2 f)(x, y) &= \int_{\Omega} \varphi_2(y) \overline{\varphi_2(t)} f(x, t) dt, \end{aligned}$$

где $f \in L_2(\Omega \times \Omega)$, $k_0(x, y)$ – неотрицательная непрерывная функция на $\Omega \times \Omega$, $\varphi_j(\cdot)$ – непрерывная функция на Ω и

$$\int_{\Omega} |\varphi_j(t)|^2 dt = 1, \quad j = 1, 2.$$

Через $\rho(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ обозначим соответственно резольвентное множество, спектр, существенный спектр и дискретный спектр самосопряженных операторов [22].

Операторы Шредингера вида (1), ассоциированные с системой трех частиц на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$, изучены в работах [23], [24]. В работе [23] получены достаточные условия конечности и бесконечности дискретного спектра при $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma(H_0)$, т. е. в случае, когда существенный спектр данного гамильтониана не меняется при заданном возмущении. В работе [24] доказано существование эффекта Ефимова в модели (1), причем нижняя грань существенного спектра гамильтониана H равняется нулю (т. е. $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma(H_0)$).

В настоящей работе мы изучаем существенный спектр и число собственных значений, лежащих ниже нижней грани существенного спектра в модели (1), когда функция $k_0(x, y)$ имеет вид $k_0(x, y) = u(x)u(y)$ (т. е. для исходного оператора Q , кинетическая энергия которого имеет вид $v_0(m, n) = v(m)v(n)$). Дано описание существенного спектра гамильтониана (1) и вычислена нижняя грань существенного спектра для произвольных $\gamma > 0$ и $\mu > 0$. Доказана конечность числа собственных значений, лежащих ниже нижнего края существенного спектра в модели (1).

2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $d_1 \in \mathbb{N}$, и $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$, $d_2 \in \mathbb{N}$, – компактные множества. Рассмотрим непрерывные функции $k_1(x, s, y)$ на $\Omega_1^2 \times \Omega_2$, $k_1(x, s, y) = \bar{k}_1(s, x, y)$, и $k_2(x, t, y)$ на $\Omega_1 \times \Omega_2^2$, $k_2(x, t, y) = \bar{k}_2(x, y, t)$. В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ рассмотрим частично-интегральные операторы A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} (A_1 f)(x, y) &= \int_{\Omega_1} k_1(x, s, y) f(s, y) ds, \\ (A_2 f)(x, y) &= \int_{\Omega_2} k_2(x, t, y) f(x, t) dt. \end{aligned}$$

Пусть $k_0(x, y)$ – произвольная вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega_1 \times \Omega_2$. Обозначим через V_0 оператор умножения на функцию $k_0(x, y)$, т. е.

$$(V_0 f)(x, y) = k_0(x, y) f(x, y).$$

Рассмотрим линейный ограниченный самосопряженный оператор

$$V = V_0 - A, \quad (2)$$

действующий в пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, где $A = A_1 + A_2$. Оператор V является общей моделью трехчастичного дискретного оператора Шредингера, возникающей в модели Хаббарда [25] на примесной решетке.

Существенный спектр гамильтониана V (2) изучен в [25]. В работе [26] получено достаточное условие конечности числа собственных значений, лежащих ниже нижней грани существенного спектра в модели (2), когда $k_0(x, y) \geq 0$ и ядра $k_1(x, s, y)$, $k_2(x, t, y)$ являются неотрицательными функциями двух переменных (т. е. $k_1(x, s, y) = h_1(x, s)$, $k_2(x, t, y) = h_2(y, t)$).

Определим семейство компактных операторов $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \Omega_2}$ и $\{Q_\beta\}_{\beta \in \Omega_1}$, действующих в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2)$ соответственно по правилам

$$(K_\omega \varphi)(x) = \int_{\Omega_1} k_1(x, s, \omega) \varphi(s) ds,$$

$$(Q_{\omega'} \psi)(y) = \int_{\Omega_2} k_2(\omega', t, y) \psi(t) dt.$$

Пусть $\tau \in \mathbb{C}$ – произвольное фиксированное число. Для каждого $\omega \in \Omega_2$ или $\omega' \in \Omega_1$ через $\Delta_\omega^{(1)}(\tau)$ или $\Delta_{\omega'}^{(2)}(\tau)$ соответственно мы будем обозначать детерминант Фредгольма [27] оператора $E - \tau K_\omega$ в $L_2(\Omega_1)$ или $E - \tau Q_{\omega'}$ в $L_2(\Omega_2)$ соответственно, где E – тождественный оператор. Для каждого $\tau \in \mathbb{C}$ определим непрерывные функции

$$D_1(y; \tau) = \Delta_y^{(1)}(\tau), \quad y \in \Omega_2,$$

$$D_2(x; \tau) = \Delta_x^{(2)}(\tau), \quad x \in \Omega_1.$$

Функции $D_1(\cdot; \tau)$ и $D_2(\cdot; \tau)$ называются детерминантами операторов $E - \tau A_1$ и $E - \tau A_2$ соответственно (подробнее см. [28]).

Для каждого $\lambda \in \rho(H_0)$ в пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определим частично-интегральные операторы

$$B_1(\lambda) f(x, y) = \int_{\Omega_1} \frac{k_1(x, s, y)}{k_0(s, y) - \lambda} f(s, y) ds,$$

$$B_2(\lambda) f(x, y) = \int_{\Omega_2} \frac{k_2(x, t, y)}{k_0(x, t) - \lambda} f(x, t) dt.$$

Определим множества

$$\sigma_1 = \{\lambda \in \rho(H_0) : \Delta_1(y_0; \lambda) = 0 \text{ для некоторого } y_0 \in \Omega_2\}, \quad (3)$$

$$\sigma_2 = \{\lambda \in \rho(H_0) : \Delta_2(x_0; \lambda) = 0 \text{ для некоторого } x_0 \in \Omega_1\}, \quad (4)$$

где $\Delta_1(y; \lambda)$ и $\Delta_2(x; \lambda)$ – детерминанты операторов $E - B_1(\lambda)$ и $E - B_2(\lambda)$ соответственно.

Положим $\sigma_0 = \sigma(H_0)$. Имеем $\sigma_0 = \text{Ran } k_0$ – область значений функции k_0 . В работе [29] получены следующие равенства:

$$\sigma(V_0 - A_1) = \sigma_0 \cup \sigma_1, \quad (5)$$

$$\sigma(V_0 - A_2) = \sigma_0 \cup \sigma_2. \quad (6)$$

Описание существенного спектра оператора V приведено в работе [25], где доказано, что

$$\sigma_{\text{ess}}(V) = \sigma(V_0 - A_1) \cup \sigma(V_0 - A_2).$$

Число

$$E_{\min}(V) = \inf\{\lambda: \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(V)\}$$

будем называть *нижней гранью* (или *нижним краем*) существенного спектра оператора V .

Положим $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = [a, b]^\nu$. Пусть $u(x)$ – неотрицательная непрерывная функция на Ω , $u(x_j^{\min}) = 0$, $x_j^{\min} \in \Omega$, $j = 1, 2, \dots, m$, и

$$\int_{\Omega} \frac{ds}{u(s)} < \infty.$$

В настоящей работе изучаются существенный и дискретный спектры следующего модельного оператора:

$$H = H_0 - (\gamma T_1 + \mu T_2), \quad \gamma > 0, \quad \mu > 0, \quad (7)$$

в пространстве $L_2(\Omega \times \Omega)$, где

$$H_0 f(x, y) = u(x)u(y)f(x, y).$$

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Из равенств

$$k_0(x, y) = u(x)u(y), \quad k_1(x, s, y) = \gamma \varphi_1(x) \bar{\varphi}_1(s), \quad k_2(x, t, y) = \mu \varphi_2(y) \bar{\varphi}_2(t)$$

для операторов $B_1(\lambda) = B_1(\lambda; \gamma)$ и $B_2(\lambda) = B_2(\lambda; \mu)$ получим, что

$$\begin{aligned} B_1(\lambda) f(x, y) &= \gamma \int_{\Omega} \frac{\varphi_1(x) \bar{\varphi}_1(s)}{u(s)u(y) - \lambda} f(s, y) ds, \\ B_2(\lambda) f(x, y) &= \mu \int_{\Omega} \frac{\varphi_2(y) \bar{\varphi}_2(t)}{u(x)u(t) - \lambda} f(x, t) dt, \end{aligned}$$

где $\lambda \in \rho(H_0)$. Следовательно, для детерминантов $\Delta_1(y; \lambda) = \Delta_1(y; \lambda, \gamma)$ и $\Delta_2(x; \lambda) = \Delta_2(x; \lambda, \mu)$ операторов $E - B_1(\lambda)$ и $E - B_2(\lambda)$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta_1(y; \lambda) &= \Delta_1(y; \lambda, \gamma) = 1 - \gamma \int_{\Omega} \frac{|\varphi_1(s)|^2}{u(s)u(y) - \lambda} ds, \\ \Delta_2(x; \lambda) &= \Delta_2(x; \lambda, \mu) = 1 - \mu \int_{\Omega} \frac{|\varphi_2(t)|^2}{u(x)u(t) - \lambda} dt. \end{aligned}$$

В пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим семейство $\{H_1(\alpha)\}_{\alpha \in \Omega}$ самосопряженных операторов в модели Фридрихса (см. [30])

$$H_1(\alpha) \varphi(x) = u(\alpha)u(x)\varphi(x) - \gamma \int_{\Omega} \varphi_1(x) \bar{\varphi}_1(s) \varphi(s) ds.$$

Аналогично определим семейство операторов $\{H_2(\alpha)\}_{\alpha \in \Omega}$:

$$H_2(\alpha) \varphi(y) = u(\alpha)u(y)\varphi(y) - \mu \int_{\Omega} \varphi_2(y) \bar{\varphi}_2(t) \varphi(t) dt.$$

Положим $M(\alpha) = u(\alpha)u_{\max}$, где $u_{\max} = \max_{x \in \Omega} u(x)$. В силу теоремы Вейля [31] о компактном возмущении существенного спектра имеем $\sigma_{\text{ess}}(H_k(\alpha)) = [0, M(\alpha)]$, $k = 1, 2$.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha \in \Omega$ произвольно. Число $\lambda \in (-\infty, 0)$ является собственным значением оператора $H_1(\alpha)$ или $H_2(\alpha)$ тогда и только тогда, когда число $\xi = 1$ является собственным значением компактного оператора $\gamma K_1(\alpha; \lambda)$ или $\mu K_2(\alpha; \lambda)$ соответственно, где

$$K_1(\alpha; \lambda)\varphi(x) = \int_{\Omega} \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{u(\alpha)u(x) - \lambda}} \cdot \frac{\bar{\varphi}_1(s)}{\sqrt{u(\alpha)u(s) - \lambda}} \varphi(s) ds,$$

$$K_2(\alpha; \lambda)\varphi(y) = \int_{\Omega} \frac{\varphi_2(y)}{\sqrt{u(\alpha)u(y) - \lambda}} \cdot \frac{\bar{\varphi}_2(s)}{\sqrt{u(\alpha)u(s) - \lambda}} \varphi(s) ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in \Omega$ – фиксированное число. Докажем лемму для оператора $H_1(\alpha)$ (для оператора $H_2(\alpha)$ можно доказать аналогично).

Необходимость. Допустим, что число $\lambda < 0$ является собственным значением оператора $H_1(\alpha)$. Тогда существует $f_0 \in L_2(\Omega)$, $f_0 \neq \theta$, такое, что

$$(u(\alpha)u(x) - \lambda)f_0(x) - \gamma P_1 f_0(x) = 0, \quad (8)$$

где P_1 – интегральный оператор в $L_2(\Omega)$, заданный равенством

$$P_1 \varphi(x) = \int_{\Omega} \varphi_1(x) \bar{\varphi}_1(s) \varphi(s) ds.$$

В силу обратимости оператора $U_{\alpha, \lambda}$,

$$U_{\alpha, \lambda} \varphi(x) = \sqrt{u(\alpha)u(x) - \lambda} \varphi(x),$$

из равенства (8) получим

$$U_{\alpha, \lambda} f_0 - \gamma U_{\alpha, \lambda}^{-1} P_1 f_0 = 0. \quad (9)$$

Положим $g_0(x) = U_{\alpha, \lambda} f_0(x)$. Тогда $g_0 \in L_2(\Omega)$, $g_0 \neq \theta$ и $f_0 = U_{\alpha, \lambda}^{-1} g_0 \neq \theta$. Следовательно, равенство (9) имеет вид

$$g_0 - \gamma U_{\alpha, \lambda}^{-1} P_1 (U_{\alpha, \lambda}^{-1} g_0) = 0,$$

откуда получим

$$\gamma K_1(\alpha; \lambda) g_0 = g_0,$$

т. е. число 1 является собственным значением оператора $\gamma K_1(\alpha; \lambda)$.

Достаточность доказывается аналогично.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha \in \Omega$ – произвольное число. Тогда справедливы следующие утверждения.

А. Число $\lambda \in (-\infty, 0)$ является собственным значением оператора $H_1(\alpha)$ или $H_2(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma) = 0$ или $\Delta_2(\alpha; \lambda, \mu) = 0$ соответственно.

Б. Если число $\lambda \in (-\infty, 0)$ является p -кратным собственным значением оператора $H_1(\alpha)$ или $H_2(\alpha)$, то число $\xi = 1$ является p -кратным собственным значением компактного оператора $\gamma K_1(\alpha; \lambda)$ или $\mu K_2(\alpha; \lambda)$ соответственно и наоборот.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in \Omega$ и $\lambda \in (-\infty, 0)$ фиксированны. Легко заметить, что для детерминантов Фредгольма $D_1(\alpha; \lambda, \gamma)$ и $D_2(\alpha; \lambda, \mu)$ операторов $E - \gamma K_1(\alpha; \lambda)$ и $E - \mu K_2(\alpha; \lambda)$ имеют место равенства

$$D_1(\alpha; \lambda, \gamma) = \Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma), \quad D_2(\alpha; \lambda, \mu) = \Delta_2(\alpha; \lambda, \mu).$$

Следовательно, из леммы 1 и в силу теоремы Фредгольма (см. теорему 4 на с. 34 в монографии [27]) вытекает утверждение А леммы. Доказательство утверждения Б непосредственно следует из доказательства леммы 1.

ЛЕММА 3. А. При каждом фиксированном $\gamma > 0$ ($\mu > 0$) для каждого $\alpha \in \Omega$ уравнение $\Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma) = 0$ ($\Delta_2(\alpha; \lambda, \mu) = 0$) в $(-\infty, 0)$ имеет не более одного решения.

Б. Число $\lambda = -\gamma$ ($\lambda = -\mu$) является решением уравнения $\Delta_1(x_k^{\min}; \lambda, \gamma) = 0$ ($\Delta_2(x_k^{\min}; \lambda, \mu) = 0$), $k = 1, 2, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Пусть $\gamma > 0$ и $\alpha \in \Omega$ произвольно. Имеем $u(\alpha)u(x) - \lambda > 0$ для любого $x \in \Omega$ при $\lambda < 0$. Следовательно, получаем

$$\frac{\partial \Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma)}{\partial \lambda} = -\gamma \int_{\Omega} \frac{|\varphi_1(s)|^2 ds}{(u(\alpha)u(s) - \lambda)^2} < 0, \quad \lambda < 0,$$

т. е. функция $\Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma)$ является непрерывной строго убывающей функцией по аргументу $\lambda < 0$. Поэтому при каждом фиксированном $\alpha \in \Omega$ и $\gamma > 0$ функция $\Phi_1(\lambda) = \Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma)$ может обращаться в нуль не более, чем в одной точке из $(-\infty, 0)$.

Б. В случае $\alpha = x_j^{\min}$ уравнение $\Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma) = 0$ имеет простой вид:

$$1 + \frac{\gamma}{\lambda} = 0,$$

т. е. число $\lambda = -\gamma$ является решением уравнения $\Delta_1(x_j^{\min}; \lambda, \gamma) = 0$.

Из представления интегрального оператора $K_j(\alpha; \lambda)$, $j = 1, 2$, и из утверждения Б леммы 2 получим следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha \in \Omega$. Если число $\lambda \in (-\infty, 0)$ – собственное значение оператора $H_j(\alpha)$, $j = 1, 2$, то оно является однократным (простым).

ЛЕММА 5. Функция

$$\pi_j(t) = \inf_{\|\psi\|=1} (H_j(t)\psi, \psi), \quad t \in \Omega, \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

является неположительной и непрерывной на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму для операторов $\{H_1(\alpha)\}_{\alpha \in \Omega}$ (для операторов $\{H_2(\alpha)\}_{\alpha \in \Omega}$ она доказывается аналогично).

В силу положительности интегрального оператора P_1 имеем

$$\pi_1(t) = \inf_{\|\psi\|=1} (H_1(t)\psi, \psi) = \inf_{\|\psi\|=1} [(h_t\psi, \psi) - \gamma(P_1\psi, \psi)] \leq \inf_{\|\psi\|=1} (h_t\psi, \psi) = 0, \quad t \in \Omega,$$

где оператор h_α , $\alpha \in \Omega$, действует в $L_2(\Omega)$ по формуле

$$h_\alpha\varphi(x) = u(\alpha)u(x)\varphi(x).$$

Положим $M_0 = \sup_{x,y \in \Omega} u(x)u(y) = u_{\max}^2$. Для каждого $\alpha \in \Omega$ рассмотрим оператор $\tilde{H}_1(\alpha)$:

$$\tilde{H}_1(\alpha) = H_1(\alpha) - M_0 \cdot E.$$

Имеем $\tilde{H}_1(\alpha) \leq \theta$, $\alpha \in \Omega$, т.е. $(\tilde{H}_1(\alpha)\psi, \psi) \leq 0 \ \forall \psi \in L_2(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$. Определим функцию $\tilde{\pi}_1(t)$ следующим образом:

$$\tilde{\pi}_1(t) = \inf_{\|\psi\|=1} (\tilde{H}_1(t)\psi, \psi), \quad t \in \Omega.$$

Очевидно, что

$$\tilde{\pi}_1(t) = \inf_{\|\psi\|=1} (\tilde{H}_1(t)\psi, \psi) = - \sup_{\|\psi\|=1} (-\tilde{H}_1(t)\psi, \psi) = -\|\tilde{H}_1(t)\|, \quad t \in \Omega.$$

Положим $v_1(t) = \|\tilde{H}_1(t)\|$, $t \in \Omega$. Покажем, что функция $v_1(t)$ является непрерывной на Ω . Для произвольных $t, t_0 \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} |v_1(t) - v_1(t_0)| &= \left| \|\tilde{H}_1(t)\| - \|\tilde{H}_1(t_0)\| \right| \leq \|\tilde{H}_1(t) - \tilde{H}_1(t_0)\| = \|h_t - h_{t_0}\| = \\ &= \sup_{x \in \Omega} u(x) \cdot |u(t) - u(t_0)| = u_{\max} \cdot |u(t) - u(t_0)|. \end{aligned}$$

Отсюда и из непрерывности функции $u(t)$ на Ω следует непрерывность функции $v_1(t)$. Следовательно, функция $\tilde{\pi}_1(t)$ является непрерывной на Ω . Однако имеем

$$\tilde{\pi}_1(t) = \pi_1(t) - M_0,$$

откуда вытекает непрерывность функции $\pi_1(t)$.

4. СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА H

В пространстве $L_2(\Omega \times \Omega)$ определим следующие самосопряженные операторы:

$$W_1 = H_0 - T_1, \quad W_2 = H_0 - T_2.$$

Для операторов W_1 и W_2 отсутствует дискретный спектр [26].

Положим

$$\pi_j^{\max} = \max_{t \in \Omega} \pi_j(t), \quad j = 1, 2.$$

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие равенства:*

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}(W_1) &= [-\gamma, \pi_1^{\max}] \cup [0, u_{\max}^2], \\ \sigma_{\text{ess}}(W_2) &= [-\mu, \pi_2^{\max}] \cup [0, u_{\max}^2]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу положительности операторов H_0 и T_1 для произвольного $f \in L_2(\Omega \times \Omega)$, $\|f\| = 1$, имеем

$$(W_1 f, f) = ((H_0 - \gamma T_1)f, f) = (H_0 f, f) - \gamma(T_1 f, f) \geq -\gamma(T_1 f, f) \geq -\gamma,$$

так как $\|T_1\| = 1$. Отсюда получим, что $E_{\min}(W_1) \geq -\gamma$. Однако в силу леммы 3 и по определению множества σ_1 (3) имеем $-\gamma \in \sigma_1$. С другой стороны, из положительности операторов h_α , $\alpha \in \Omega$, где $h_\alpha \varphi(x) = u(\alpha)u(x)\varphi(x)$, для функции $\pi_1(t)$ (10) имеем

$$\begin{aligned}\pi_1(t) &= \inf_{\|\psi\|=1} (H_1(t)\psi, \psi) = \inf_{\|\psi\|=1} ((h_t\psi, \psi) - \gamma(P_1\psi, \psi)) \geq \\ &\geq \inf_{\|\psi\|=1} (-\gamma(P_1\psi, \psi)) = -\gamma, \quad t \in \Omega,\end{aligned}$$

так как $\|P_1\| = 1$. Однако $\pi_1(x_j^{\min}) = -\gamma \sup_{\|\psi\|=1} (P_1\psi, \psi) = -\gamma$. Следовательно, получим, что $\pi_1^{\min} = \pi_1(x_j^{\min}) = -\gamma$ и $\pi_1^{\min} \in \sigma_{\text{ess}}(W_1)$.

Пусть $\pi_1(t_0) < 0$, $t_0 \in \Omega$. Тогда в силу принципа минимакса [26], [31] имеем $\pi_1(t_0) \in \sigma(H_1(t_0))$, и $\pi_1(t_0)$ является собственным значением оператора $H_1(t_0)$, так как $\sigma_{\text{ess}}(H_1(t_0)) = [0, M(t_0)]$. Отсюда и из леммы 2 получим $\Delta_1(t_0; \pi_1(t_0), \gamma) = 0$. Тогда по определению множества σ_1 (3) имеем $\pi_1(t_0) \in \sigma_1$. Следовательно, из равенства (5) вытекает, что $\pi_1(t_0) \in \sigma_{\text{ess}}(W_1)$, так как $\sigma_{\text{disc}}(W_1) = \emptyset$. Однако имеем $\sigma_0 = \sigma(H_0) = [0, u_{\max}^2]$. Таким образом, в силу равенства (5)

$$\sigma_{\text{ess}}(W_1) = [\pi_1^{\min}, \pi_1^{\max}] \cup [0, u_{\max}^2] = [-\gamma, \pi_1^{\max}] \cup [0, u_{\max}^2].$$

Аналогично доказывается, что

$$\sigma_{\text{ess}}(W_2) = [-\mu, \pi_2^{\max}] \cup [0, u_{\max}^2].$$

Теорема доказана.

Положим $\Omega^{\min} = \{x_1^{\min}, \dots, x_m^{\min}\}$. На множестве $\Omega \setminus \Omega^{\min}$ определим функцию $f_1(x)$ следующим образом:

$$f_1(x) = 1 - \gamma\Phi_1(x), \quad (11)$$

где

$$\Phi_1(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0-} \int_{\Omega} \frac{|\varphi_1(s)|^2 ds}{u(x)u(s) - \lambda}.$$

Очевидно, что на множестве $\Omega \setminus \Omega^{\min}$ функция $f_1(x)$ (11) будет непрерывной, так как из условия

$$\eta_1 = \int_{\Omega} \frac{|\varphi_1(s)|^2 ds}{u(s)} < \infty$$

при $x \in \Omega \setminus \Omega^{\min}$ получим

$$\Phi_1(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0-} \int_{\Omega} \frac{|\varphi_1(s)|^2 ds}{u(x)u(s) - \lambda} = \frac{\eta_1}{u(x)}.$$

Имеем $\lim_{x \rightarrow x_j^{\min}} f_1(x) = -\infty$. Следовательно, область значений функции $f_1(x)$ (11) совпадает с множеством $(-\infty, 1 - \gamma\eta_1/u_{\max}]$, т. е.

$$\text{Ran } f_1 = \left(-\infty, 1 - \frac{\gamma\eta_1}{u_{\max}} \right].$$

ТЕОРЕМА 2. А. Если $\gamma\eta_1/u_{\max} > 1$, то $\pi_1^{\max} < 0$.

Б. Если $\gamma\eta_1/u_{\max} \leq 1$, то $\pi_1^{\max} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Пусть $\gamma\eta_1/u_{\max} > 1$. Тогда при каждом $x \in \Omega \setminus \Omega^{\min}$ имеем

$$f_1(x) \leq f_1^{\max} = 1 - \gamma \cdot \frac{\eta_1}{u_{\max}} < 0,$$

где $f_1^{\max} = \max_{x \in \Omega} f_1(x)$. Следовательно, при каждом $\alpha \in \Omega \setminus \Omega^{\min}$ справедливо $\Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma) < 0$ для любого $\lambda < 0$, так как

$$f_1(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0-} \Delta_1(x; \lambda, \gamma) < 0.$$

Отсюда, а также с учетом монотонности функции $\Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma)$ по $\lambda < 0$, для любого $\alpha \in \Omega \setminus \Omega^{\min}$ получаем, что существует единственное число $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha) < 0$ такое, что $\Delta_1(\alpha; \lambda_0(\alpha), \gamma) = 0$. Согласно лемме 3 при $\alpha = x_j^{\min} \in \Omega^{\min}$ имеем $\Delta_1(\alpha; -\gamma, \gamma) = 0$, т.е. число $\lambda_0 = \lambda_0(x_j^{\min}) = -\gamma$, $j = 1, \dots, m$, является решением уравнения $\Delta_1(x_j^{\min}; \lambda, \gamma) = 0$. В силу принципа минимакса [26] и леммы 2 это решение определяется с помощью непрерывной функций $\pi_1(t)$ (10), т.е.

$$\lambda_0(t) = \pi_1(t), \quad t \in \Omega.$$

Однако $\lambda_0(\alpha) < 0$, $\alpha \in \Omega$, и, следовательно, имеем $\pi_1^{\max} < 0$.

Б. Пусть $\gamma\eta_1/u_{\max} = 1$. Очевидно, что существует $x^{\max} \in \Omega$ такое, что $u_{\max} = u(x^{\max})$. Имеем

$$f_1(x^{\max}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0-} \Delta_1(x^{\max}; \lambda, \gamma) = 1 - \frac{\gamma\eta_1}{u_{\max}} = 0.$$

Отсюда и с учетом монотонности функции $\Delta_1(x^{\max}; \lambda, \gamma)$ по $\lambda < 0$ получим, что $\Delta_1(x^{\max}; \lambda, \gamma) > 0$ для любого $\lambda < 0$. Тогда согласно лемме 2 у оператора $H_1(x^{\max})$ отсутствует собственное значение, лежащее ниже нижнего края существенного спектра оператора $H_1(x^{\max})$. В силу принципа минимакса и из равенства (10) получим, что $\pi_1^{\max} = \pi_1(x^{\max}) = E_{\min}(H_1(x^{\max})) = 0$.

Пусть $\gamma\eta_1/u_{\max} < 1$, тогда $f_1^{\max} > 0$. Пусть ε – такое достаточно малое число, что

$$O_\varepsilon(x_j^{\min}) \cap O_\varepsilon(x_i^{\min}) = \emptyset, \quad i \neq j,$$

где

$$O_\varepsilon(x_k^{\min}) = S_\varepsilon(x_k^{\min}) \cap \Omega, \quad S_\varepsilon(x_k^{\min}) = \{x \in \Omega: \|x - x_k^{\min}\| < \varepsilon\}.$$

Тогда функция $f_1(x)$ (11) на замкнутом множестве

$$\Omega(\varepsilon) = \Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m O_\varepsilon(x_j^{\min}) \right)$$

является непрерывной, и прообраз $G = f_1^{-1}(0, f_1^{\max})$ интервала $(0, f_1^{\max})$ является непустым открытым множеством в $\Omega(\varepsilon)$ [32]. Если $\alpha \in \Omega \setminus G$, выполняется неравенство $f_1(\alpha) \leq 0$, тогда для каждого $\alpha \in \Omega \setminus G$ уравнение $\Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma) = 0$ имеет единственное решение $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha) \leq 0$, т.е. $\Delta_1(\alpha; \lambda_0(\alpha), \gamma) = 0$. В силу принципа

минимакса и леммы 2 это решение определяется с помощью функций $\pi_1(t)$ (10), т.е. $\lambda_0(t) = \pi_1(t)$ для любого $t \in \Omega \setminus G$. С другой стороны, если $\alpha \in G$, имеет место неравенство $f_1(\alpha) > 0$. Тогда с учетом монотонности функции $\Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma)$ по $\lambda < 0$ имеем $\Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma) > 0$ для любого $\lambda \in (-\infty, 0)$, и уравнение $\Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma) = 0$ при $\alpha \in G$ на $(-\infty, 0)$ не имеет решения. Это означает, что операторы $H_1(\alpha)$, $\alpha \in G$, не имеют отрицательных собственных значений (см. лемму 2). Отсюда и в силу принципа минимакса имеем $\pi_1(t) = E_{\min}(H_1(t)) = 0$ для всех $t \in G$. Таким образом, получаем, что $\pi_1^{\max} = 0$.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 3. А. Если $\mu\eta_2/u_{\max} > 1$, то $\pi_2^{\max} < 0$, где

$$\eta_2 = \int_{\Omega} \frac{|\varphi_2(s)|^2 ds}{u(s)}.$$

Б. Если $\mu\eta_2/u_{\max} \leq 1$, то $\pi_2^{\max} = 0$.

В силу теоремы 3.3 из работы [25] и из теорем 2, 3 для существенного спектра оператора H (7) получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. А. Если $\gamma\eta_1/u_{\max} > 1$ и $\mu\eta_2/u_{\max} > 1$, то

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [-\gamma, \pi_1^{\max}] \cup [-\mu, \pi_2^{\max}] \cup [0, u_{\max}^2].$$

Б. Если $\gamma\eta_1/u_{\max} > 1$ и $\mu\eta_2/u_{\max} \leq 1$, то

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [-\gamma, \pi_1^{\max}] \cup [-\mu, u_{\max}^2].$$

В. Если $\gamma\eta_1/u_{\max} \leq 1$ и $\mu\eta_2/u_{\max} > 1$, то

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [-\mu, \pi_2^{\max}] \cup [-\gamma, u_{\max}^2].$$

Г. Если $\gamma\eta_1/u_{\max} \leq 1$ и $\mu\eta_2/u_{\max} \leq 1$, то

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [\min\{-\gamma, -\mu\}, u_{\max}^2].$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для нижней грани $E_{\min}(H)$ существенного спектра оператора H (7) имеет место равенство

$$E_{\min}(H) = \min\{-\gamma, -\mu\}.$$

5. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ОПЕРАТОРА H

Из положительности операторов H_0 , T_1 и T_2 для оператора H (7) имеем

$$(Hf, f) = (H_0f, f) - \gamma(T_1f, f) - \mu(T_2f, f) \leq (H_0f, f), \quad f \in L_2(\Omega \times \Omega),$$

откуда следует

$$\sup_{\|f\|=1} (Hf, f) \leq \sup_{\|f\|=1} (H_0f, f) = \|H_0\| = u_{\max}^2,$$

т. е. для верхней грани $S_{\max}(H)$ оператора H (7) имеем $S_{\max}(H) = u_{\max}^2$ (см. теорему 4). Следовательно, получаем

$$\sigma(H) \subset (-\infty, u_{\max}^2],$$

т. е. выше верхней грани существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H)$ у оператора H (7) отсутствуют собственные значения. Тогда в силу теоремы 4 дискретный спектр оператора H лежит в множестве отрицательных чисел.

Положим

$$\xi_0 = \int_{\Omega} u(x) |\varphi_1(x)|^2 dx \int_{\Omega} u(y) |\varphi_2(y)|^2 dy.$$

ТЕОРЕМА 5. *Если $\gamma > \xi_0$ и $\mu > \xi_0$, то оператор H (7) имеет отрицательное собственное значение, лежащее левее нижней грани существенного спектра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняются условия $\gamma > \xi_0$ и $\mu > \xi_0$. Положим $f_0(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$. Тогда $f_0 \in L_2(\Omega \times \Omega)$ и $\|f_0\| = 1$. Имеем

$$(Hf_0, f_0) = (H_0f_0, f_0) - \gamma(T_1f_0, f_0) - \mu(T_2f_0, f_0) = \xi_0 - \gamma - \mu.$$

Рассмотрим три случая.

1. Пусть $\gamma = \mu$. Тогда согласно теореме 4 имеем $E_{\min}(H) = -\gamma$ и из $\gamma = \mu > \xi_0$ получим, что

$$\lambda_0 = (Hf_0, f_0) < -\gamma = E_{\min}(H).$$

Отсюда и в силу принципа минимакса получаем $\lambda_0 \in \sigma_{\text{disc}}(H)$, т. е. $\lambda_0 = (Hf_0, f_0)$ – собственное значение оператора H (7).

2. Пусть $\gamma < \mu$. Тогда из теоремы 4 получим, что $E_{\min}(H) = -\mu$, а из $\xi_0 < \gamma < \mu$ вытекает, что

$$\lambda_0 = (Hf_0, f_0) < -\mu = E_{\min}(H).$$

Отсюда и в силу принципа минимакса получаем, что $\lambda_0 \in \sigma_{\text{disc}}(H)$, т. е. $\lambda_0 = (Hf_0, f_0)$ – собственное значение оператора H (7).

3. Пусть $\gamma > \mu$. Тогда $E_{\min}(H) = -\gamma$ и $\lambda_0 = (Hf_0, f_0) < -\gamma$, т. е. λ_0 – собственное значение оператора H (7).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $\gamma > \xi_0$ и $\mu > \xi_0$, то дискретный спектр оператора H (7) непуст.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть $\gamma > \xi_0$, $\mu > \xi_0$ и $\lambda_{\min}$ – наименьшее отрицательное собственное значение оператора H (7). Тогда справедливы следующие равенства:*

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{\min}}{-\gamma} = 1, \quad \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{\min}}{-\mu} = 1, \quad \lim_{\substack{\gamma \rightarrow +\infty \\ \mu \rightarrow +\infty}} \frac{\lambda_{\min}}{-(\gamma + \mu)} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma > \xi_0$, $\mu > \xi_0$ и $\lambda_{\min}$ – наименьшее отрицательное собственное значение оператора H (7). Тогда существует $f_0 \in L_2(\Omega \times \Omega)$, $\|f_0\| = 1$, такое, что $\lambda_{\min} = (Hf_0, f_0)$. Однако имеем

$$\lambda_{\min} = (H_0f_0, f_0) - \gamma(T_1f_0, f_0) - \mu(T_2f_0, f_0) \geq -\gamma(T_1f_0, f_0) - \mu(T_2f_0, f_0) \geq -(\gamma + \mu).$$

Следовательно, согласно теореме 4 получаем

$$-(\gamma + \mu) \leq \lambda_{\min} < -\gamma, \quad -(\gamma + \mu) \leq \lambda_{\min} < -\mu,$$

откуда вытекает утверждение следствия.

ТЕОРЕМА 6. *Количество собственных значений в модели (7), лежащих ниже нижней грани $E_{\min}(H)$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H)$, конечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $L_2(\Omega)$ определим компактные операторы V_1 и V_2 :

$$V_1\varphi(x) = \gamma \int_{\Omega} \varphi_1(x) \bar{\varphi}_1(s) \varphi(s) ds, \quad V_2\varphi(y) = \mu \int_{\Omega} \varphi_2(y) \bar{\varphi}_2(t) \varphi(t) dt.$$

Легко заметить, что $\sigma(V_1) = \{0, \gamma\}$, $\sigma(V_2) = \{0, \mu\}$. Тогда для существенного спектра оператора $T = \gamma T_1 + \mu T_2$ имеем [26]

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \sigma(V_1) \cup \sigma(V_2) = \{0, \gamma, \mu\}.$$

Поэтому $\eta_0 = \sup \sigma_{\text{ess}}(T) = \max\{\gamma, \mu\}$. В силу теоремы 4 для нижней грани $E_{\min}(H)$ существенного спектра получим, что $E_{\min}(H) = -\eta_0$. По определению оператора H_0 в (7) имеем $H_0 \geq \theta$, т. е. $(H_0 f, f) \geq 0$, $f \in L_2(\Omega \times \Omega)$. Следовательно, выполняется достаточное условие теоремы 4.1 из работы [26], т. е.

$$H_0 \geq (E_{\min}(H) + \eta_0)E.$$

Значит, из теоремы 4.1 работы [26] следует, что число собственных значений оператора H (7), лежащих ниже нижней грани существенного спектра, конечно.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если $\gamma\eta_1/u_{\max} \leq 1$ и $\mu\eta_2/u_{\max} \leq 1$, то дискретный спектр в модели (7) конечен.*

Список литературы

- [1] J. Uchiyama, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **5**:1 (1969), 51–63.
- [2] J. Uchiyama, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **6**:1 (1970), 189–192.
- [3] J. Uchiyama, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **6**:1 (1970), 193–200.
- [4] Г. М. Жислин, *ТМФ*, **7**:3 (1971), 332–341.
- [5] Д. Р. Яфаев, *Докл. АН СССР*, **206** (1972), 68–70.
- [6] Д. Р. Яфаев, *Точечный спектр в квантомеханической задаче трех частиц*, дис. ... канд. физ.-матем. наук, ЛГУ, Л., 1973.
- [7] Г. М. Жислин, *Докл. АН СССР*, **207** (1972), 25–28.
- [8] Г. М. Жислин, *ТМФ*, **21**:1 (1974), 60–73.
- [9] Г. М. Жислин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **33**:3 (1969), 590–649.
- [10] А. Г. Сигалов, И. М. Сигал, *ТМФ*, **5**:1 (1970), 73–93.
- [11] D. C. Mattis, *Rev. Modern Phys.*, **58**:2 (1986), 361–379.
- [12] A. I. Mogilner, “Hamiltonians in solid-state physics as multiparticle discrete Schrodinger operators: problems and results”, *Many Particle Hamiltonians: Spectra and Scattering*, Advances in Soviet Mathematics, **5**, ed. R. A. Minlos, AMS, Providence, RI, 1991, 139–194.
- [13] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 3: *Теория рассеяния*, Мир, М., 1982.

- [14] С. Н. Лакаев, Р. А. Минлос, *ТМФ*, **39**:1 (1979), 83–93.
- [15] В. А. Малышев, Р. А. Минлос, *Линейные операторы в бесконечночастичных системах*, Физматлит, М., 1994.
- [16] С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **91**:1 (1992), 51–65.
- [17] Ю. В. Жуков, *ТМФ*, **107**:1 (1996), 75–85.
- [18] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 94–108.
- [19] С. Н. Лакаев, С. М. Саматов, *ТМФ*, **129**:3 (2001), 415–431.
- [20] S. Albeverio, S. N. Lakaev, J. I. Abdullaev, *Rep. Math. Phys.*, **51**:1 (2003), 43–70.
- [21] С. Н. Лакаев, С. М. Саматов, *УМН*, **57**:1(343) (2002), 155–156.
- [22] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 1: *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.
- [23] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:4 (2007), 377–387.
- [24] Т. Х. Расулов, *ТМФ*, **163**:1 (2010), 34–44.
- [25] Ю. Х. Эшкабилов, *ТМФ*, **149**:2 (2006), 228–243.
- [26] Ю. Х. Эшкабилов, *ТМФ*, **164**:1 (2010), 78–87.
- [27] Ф. Дж. Трикоми, *Интегральные уравнения*, ИЛ, М., 1960.
- [28] Ю. Х. Эшкабилов, *Матем. труды*, **11**:2 (2008), 187–203.
- [29] Ю. Х. Эшкабилов, *Вестн. НУУз*, **2** (2006), 17–21.
- [30] Л. Д. Фаддеев, *Тр. МИАН СССР*, **73** (1964), 292–313.
- [31] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [32] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1981.

Поступила в редакцию 1.04.2011,
после доработки 1.07.2011