Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гвоздев, Е. В. Осокина, Нейтринные процессы
во внешнем магнитном поле в формализме матрицы
плотности, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 3, 423–447

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6776>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:48:56

© 2012 г.

А. А. Гвоздев*, Е. В. Осокина*

НЕЙТРИННЫЕ ПРОЦЕССЫ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ФОРМАЛИЗМЕ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

В формализме матрицы плотности заряженной спинорной частицы, находящейся в постоянном однородном магнитном поле, развита техника вычисления скорости реакции и 4-импульса, уносимого нейтрино из плазмы, в одновершинных нейтринных процессах. С применением данной техники воспроизведены результаты для светимости в процессах нейтринного синхротронного излучения электроном (позитроном) и аннигиляции электрона и позитрона в пару нейтрино.

Ключевые слова: нейтринные процессы, магнитное поле, матрица плотности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время исследование нейтринных процессов в сильном магнитном поле и плотной горячей плазме – один из интенсивно развиваемых разделов космофизики. Интерес к данной тематике, в частности, связан с численным расчетом асимметричного взрыва сверхновой с коллапсом центральной части прежде всего в магниторотационной модели взрыва [1]. В этой модели напряженность магнитного поля в областях оболочки сверхновой с сильной магниторотационной неустойчивостью может достигать $B \sim 10^{16}$ Гс за типичные времена в несколько секунд [2].

Вследствие нарушения P -четности в процессах нейтринного излучения остатка взрыва с сильным магнитным полем формирующемуся пульсару может быть передан существенный импульс вдоль вектора напряженности магнитного поля. Различные аспекты идеи о связи асимметрии вылета нейтрино с аномально большими скоростями пульсаров, высказанной в работе [3], интенсивно развивались в последующих исследованиях [4]–[9]. В работах [10], [11] исследовался механизм генерации тороидального поля в процессах нейтринного переизлучения оболочки при магниторотационном взрыве сверхновой. Показано, что этот механизм эффективен и может привести к одностороннему взрыву сверхновой.

* Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия.
E-mail: gvozdev@uniyar.ac.ru

Другими астрофизическими объектами, у которых предполагается наличие сильного магнитного поля, являются две родственные по наблюдательным данным группы одиночных нейтронных звезд – источники мягких повторяющихся гамма-всплесков (SGR) и аномальные рентгеновские пульсары (AXP). Если считать, что основная потеря вращательного момента этих звезд происходит за счет магнитодипольного излучения, то напряженность магнитного поля на их поверхности должна составлять $B_0 \sim 10^{14}–10^{15}$ Гс [12]. Для описания наблюдательных данных была предложена магнитарная модель [13], [14], в рамках которой исследовались рентгеновское и гамма-излучение SGR как в “спокойном” состоянии [15], так и в период гигантских вспышек [16]. В гигантских вспышках SGR за типичные времена $\Delta t \sim 100$ с излучается громадная энергия $\Delta E \sim 10^{44}–10^{46}$ эрг [12]. Предполагается, что источник такой энергии – клубок плазмы, удерживаемый сильным магнитным полем звезды [16]. Детальный анализ потерь энергии плазмы на нейтринное излучение позволяет получить ограничение на напряженность магнитного поля магнитара [17].

В условиях оболочки сверхновой с коллапсом центральной части доминирующими процессами переизлучения электронных нейтрино являются URCA-процессы [18]:

$$e^- + p \rightleftharpoons \nu_e + n, \quad (1)$$

$$e^+ + n \rightleftharpoons \bar{\nu}_e + p, \quad (2)$$

$$n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (3)$$

последний из которых, β -распад нейтрона, кинематически подавлен. Основными процессами рождения нейтрино произвольных ароматов и их диффузии в среде оболочки являются: процесс аннигиляции электрон-позитронной пары в пару нейтрино произвольного аромата ($i = e, \mu, \tau$):

$$e^+ + e^- \rightarrow \nu_i + \bar{\nu}_i; \quad (4)$$

упругое рассеяние нейтрино (антинейтрино) на электронах (позитронах) среды:

$$\nu_i(\bar{\nu}_i) + e^\mp \rightarrow \nu_i(\bar{\nu}_i) + e^\mp; \quad (5)$$

упругий процесс рассеяния нейтрино (антинейтрино) на нуклонах ($N = n, p$):

$$\nu_i(\bar{\nu}_i) + N \rightarrow \nu_i(\bar{\nu}_i) + N. \quad (6)$$

Результаты детального исследования этих процессов в условиях оболочки сверхновой без магнитного поля содержатся, например, в обзоре [19]. В присутствии магнитного поля необходимо учесть не только изменение фазового объема заряженных частиц, но и модификацию S -матричных элементов процессов (1)–(6) с заряженными частицами, которые вследствие нарушения P -четности в слабых взаимодействиях содержат асимметрию по отношению к направлению магнитного поля. Кроме того, в магнитном поле становятся кинематически возможными новые нейтринные процессы, наиболее существенными из которых в условиях оболочки сверхновой являются процесс синхротронного излучения пары нейтрино ($i = e, \mu, \tau$):

$$e^\mp \xrightarrow{B} e^\mp + \nu_i \bar{\nu}_i, \quad (7)$$

а также обратный к нему процесс рождения одиночным нейтрино (антинейтрино) электрон-позитронной пары:

$$\nu_i(\bar{\nu}_i) \xrightarrow{B} \nu_i(\bar{\nu}_i) + e^+ + e^-. \quad (8)$$

В реакциях (7) и (8) символ B над стрелкой подчеркивает, что данные процессы индуцированы магнитным полем.

Отметим, что электрон-позитронная плазма, порождающая гигантскую вспышку SGR в магнитарной модели [16], прозрачна для нейтрино. Как показано в работе [17], основными процессами ее нейтринного излучения в сильном магнитном поле магнитара являются реакции (4) и (7).

Исследование указанных выше нейтринных процессов в постоянном однородном магнитном поле, а также в электромагнитных полях других конфигураций, имеет довольно продолжительную историю. В частности, вероятность β -распада нейтрона в постоянном однородном магнитном поле и угловое распределение излученного в распаде антинейтрино были впервые исследованы в работах [20], [21]. Через несколько лет эта же вероятность была независимо получена в работах [22], [23], однако распределение антинейтрино по углам вылета в этих работах не обсуждается. История развития исследования β -процессов в электромагнитных полях различных конфигураций и современное состояние теории рассмотрены в обзорной статье [24]. Наиболее общие результаты исследований URCA-процессов (1)–(3) в магнитном поле, обсуждаемых и в настоящей работе, по нашему мнению, содержатся в работах [24], [25]. В работе [25] получено релятивистское выражение для квадрата матричного элемента β -распада (пригодное для описания любых URCA-процессов) и вычислена полная вероятность процесса с учетом отдачи нуклона. Вычисление сечения захвата нейтрино релятивистским нейтроном с учетом отдачи релятивистского протона и аномальных магнитных моментов нуклонов содержится в работе [24]. Историю исследований и детальный анализ нейтрино-лептонных процессов (4) и (7) можно найти в обзорах [26], [27], а процесса (8) – в книге [28].

Наибольший интерес для астрофизики представляют такие характеристики, как скорость процесса (число переходов в единичном объеме за единицу времени):

$$\Gamma = \frac{1}{V} \prod_i \sum dn_i f_i \prod_f \sum dn_f (1 - f_f) \frac{|S_{if}|^2}{\mathcal{T}}, \quad (9)$$

а также 4-импульс, уносимый в реакции нейтрино из единичного объема среды в единицу времени:

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{1}{V} \prod_i \sum dn_i f_i \prod_f \sum dn_f (1 - f_f) k_\alpha \frac{|S_{if}|^2}{\mathcal{T}}. \quad (10)$$

Здесь dn_i и dn_f – элементы фазового объема начальных (i) и конечных (f) частиц, участвующих в реакции, f_i и f_f – их функции распределения, $|S_{if}|^2/\mathcal{T}$ – квадрат S -матричного элемента процесса в единицу времени, k_α – 4-импульс, уносимый нейтрино в реакции, V – нормировочный объем, а символ $\sum$ означает суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным числам заполнения частицы. Скорость процесса (9) позволяет вычислить среднее время пробега нейтрино в среде

в нейтринопоглощающих реакциях:

$$\bar{\tau}_\nu = \frac{n_\nu}{\Gamma}, \quad (11)$$

где n_ν – концентрация нейтрино. Нуль-компонента 4-вектора (10) определяет нейтринную светимость, а компонента вектора (10) вдоль направления магнитного поля – асимметрию в процессах переизлучения нейтрино [11]. Отметим также, что в низкоэнергетическом пределе ($|q^2| \ll m_W^2$, где q^2 – квадрат переданного в реакции 4-импульса, m_W – масса W -бозона), который хорошо выполняется практически во всех астрофизических приложениях, указанные выше нейтринные процессы являются одновершинными, поскольку описываются в этом пределе эффективной локальной $(V - A)$ -теорией.

В настоящей работе рассмотрена техника вычисления характеристик (9) и (10) в одновершинных нейтринных процессах с использованием матрицы плотности заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле. Привлекательность такого способа вычисления заключается в том, что он подобен технике вычисления фейнмановских диаграмм в вакууме. Матрица плотности заряженной релятивистской частицы в постоянном однородном магнитном поле давно привлекала интерес исследователей [29]. Один из вариантов ее введения предложен в работе [30]. Заметим, что в импульсном пространстве эту матрицу естественно определить так, чтобы в бесполе пределе при суммировании по поляризациям заряженной частицы с положительной (отрицательной) энергией получить хорошо известный результат

$$\rho^{(\pm)}(p) = \hat{p} \pm m,$$

где $\hat{p} = p_\mu \gamma^\mu$, γ^μ – матрицы Дирака. Насколько нам известно, выражение для матрицы плотности, обладающей указанной асимптотикой, отсутствует в литературе.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 получена матрица плотности заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле. В разделе 3 изложена техника вычисления квадрата S -матричного элемента одновершинных нейтринных процессов. В качестве примера приложения техники в разделе 4 вычисляется нейтринная светимость в процессе синхротронного излучения пары нейтрино. В разделе 5 суммируются полученные в работе результаты.

В работе используется система единиц $c = \hbar = k = 1$.

2. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОСТОЯННОМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим спинорную частицу с массой m и зарядом qe ($q = \pm 1$ – знак заряда, $e > 0$), находящуюся в постоянном однородном магнитном поле. Выберем ось Oz вдоль вектора напряженности магнитного поля $\vec{B}$, а векторный потенциал – в виде

$$A^\mu = (0, 0, xB, 0). \quad (12)$$

Для описания спиновых свойств частицы воспользуемся проекцией оператора магнитной поляризации спина $\hat{\vec{\mu}}$ на направление магнитного поля [31]

$$\hat{\mu}_3 = m\Sigma_3 + \rho_2[\vec{\Sigma} \times \vec{P}]_3, \quad (13)$$

где $\vec{\Sigma}$ – оператор дираковского спина, $\vec{P} = \vec{p} - \varrho e\vec{A}$, $\vec{p}$ – оператор кинематического импульса,

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Решение уравнения Дирака с собственными значениями $s = \pm 1$ оператора $\hat{\mu}_3$ широко используется в литературе и может быть найдено в калибровке (12), например, в работе [24]. Такое решение с положительной энергией для частицы с произвольным знаком заряда ϱ может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\mathbf{x}) &= \frac{e^{-i(E_n t - p_2 y - p_3 z)}}{\sqrt{2E_n L_y L_z}} U_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\eta), \\ U_{n,p_2,p_3,s=\varrho}^{(+)}(\eta) &= W_s \chi_n(\eta) - V_{-s} \chi_{n-1}(\eta), \\ U_{n,p_2,p_3,s=-\varrho}^{(+)}(\eta) &= V_{-s} \chi_n(\eta) + W_s \chi_{n-1}(\eta), \end{aligned} \quad (15)$$

где $E_n = \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2eBn}$ – энергия, квантовое число $n = 0, 1, 2, \dots$ нумерует уровни Ландау, p_2 и p_3 – проекции импульса частицы, $x^\mu = (t, x, y, z)$, L_y и L_z – нормировочные длины вдоль осей Oy и Oz , $\eta = \sqrt{eB} (x - \varrho p_2 / eB)$. Решение (15) выражается через нормированные функции одномерного осциллятора (функции Эрмита)

$$\chi_k(\eta) = \frac{(eB)^{1/4} e^{-\eta^2/2}}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} H_k(\eta), \quad H_k(\eta) = (-1)^k e^{\eta^2} \frac{d^k}{d\eta^k} e^{-\eta^2}, \quad (16)$$

где $H_k(\eta)$ – полиномы Эрмита, и биспиноры

$$W_{-} = \sqrt{\frac{\tilde{p}_{\perp} + m}{2\tilde{p}_{\perp}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_n + \tilde{p}_{\perp}} \\ 0 \\ -p_3 / \sqrt{E_n + \tilde{p}_{\perp}} \end{pmatrix}, \quad W_{+} = \sqrt{\frac{\tilde{p}_{\perp} + m}{2\tilde{p}_{\perp}}} \begin{pmatrix} \sqrt{E_n + \tilde{p}_{\perp}} \\ 0 \\ p_3 / \sqrt{E_n + \tilde{p}_{\perp}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$V_{-} = i \sqrt{\frac{\tilde{p}_{\perp} - m}{2\tilde{p}_{\perp}}} \begin{pmatrix} 0 \\ -p_3 / \sqrt{E_n + \tilde{p}_{\perp}} \\ 0 \\ \sqrt{E_n + \tilde{p}_{\perp}} \end{pmatrix}, \quad V_{+} = i \sqrt{\frac{\tilde{p}_{\perp} - m}{2\tilde{p}_{\perp}}} \begin{pmatrix} p_3 / \sqrt{E_n + \tilde{p}_{\perp}} \\ 0 \\ \sqrt{E_n + \tilde{p}_{\perp}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Здесь $\tilde{p}_{\perp} = \sqrt{2eBn + m^2}$, p_3 – компонента импульса частицы вдоль вектора напряженности магнитного поля, m – масса заряженной частицы.

Решение уравнения Дирака с отрицательной энергией может быть получено из формул (15) формальной заменой $E_n \rightarrow -E_n$, $p_2 \rightarrow -p_2$, $p_3 \rightarrow -p_3$, что эквивалентно заменам $m \rightarrow -m$ и $V_s \rightarrow -V_s$ в биспиноре $U_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\eta)$. Таким образом, отрицательно-частотное решение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \psi_{n,p_2,p_3,s}^{(-)}(\mathbf{x}) &= \frac{e^{i(E_n t - p_2 y - p_3 z)}}{\sqrt{2E_n L_y L_z}} U_{n,p_2,p_3,s}^{(-)}(\tilde{\eta}), \\ U_{n,p_2,p_3,s=\varrho}^{(-)}(\tilde{\eta}) &= \tilde{W}_s \chi_n(\tilde{\eta}) + \tilde{V}_{-s} \chi_{n-1}(\tilde{\eta}), \\ U_{n,p_2,p_3,s=-\varrho}^{(-)}(\tilde{\eta}) &= -\tilde{V}_{-s} \chi_n(\tilde{\eta}) + \tilde{W}_s \chi_{n-1}(\tilde{\eta}), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\widetilde{W}_s = W_s(m \rightarrow -m)$, $\widetilde{V}_s = V_s(m \rightarrow -m)$, $\tilde{\eta} = \sqrt{eB} (x + \varrho p_2 / eB)$ и подразумевается, что знак заряда ϱ для решения с отрицательной энергией тот же, что и для решения с положительной энергией.

Матрица плотности $\rho_{n,s}^{(+)}(p)$ дираковской частицы заряда ϱe в импульсном пространстве, соответствующая решению (15) уравнения Дирака с положительной энергией и собственным значением s оператора (13), определяется из соотношения

$$\psi_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(x) \bar{\psi}_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(x') = \frac{e^{i\varrho\Phi(x,x')}}{2E_n L_y L_z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(x-x')} \rho_{n,s}^{(+)}(p) \frac{dp_1}{2\pi}, \quad (20)$$

где $p(x - x') = p_\mu(x - x')^\mu$, $p^\mu = (E_n, p_1, p_2, p_3)$ может интерпретироваться как 4-импульс частицы, и трансляционно-неинвариантная фаза

$$\Phi(x, x') = \frac{eB}{2} (x + x')(y - y'). \quad (21)$$

Матрицу плотности $\rho_{n,s}^{(+)}(p)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho_{n,s=\rho}^{(+)}(p) = & (-1)^n e^{-u/2} \left\{ \left[\left(1 + \frac{m}{\tilde{p}_\perp} \right) \hat{p}_\parallel + \tilde{p}_\perp + m \right] \Pi_\varrho L_n(u) - \right. \\ & \left. - \left[\left(1 - \frac{m}{\tilde{p}_\perp} \right) \hat{p}_\parallel - \tilde{p}_\perp + m \right] \Pi_{-\varrho} L_{n-1}(u) + 2 \left[\hat{p}_\perp - i\varrho \frac{\hat{p}_\parallel}{\tilde{p}_\perp} (p\varphi\gamma) \right] L_{n-1}^1(u) \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \rho_{n,s=-\rho}^{(+)}(p) = & (-1)^n e^{-u/2} \left\{ \left[\left(1 - \frac{m}{\tilde{p}_\perp} \right) \hat{p}_\parallel - \tilde{p}_\perp + m \right] \Pi_\varrho L_n(u) - \right. \\ & \left. - \left[\left(1 + \frac{m}{\tilde{p}_\perp} \right) \hat{p}_\parallel + \tilde{p}_\perp + m \right] \Pi_{-\varrho} L_{n-1}(u) + 2 \left[\hat{p}_\perp + i\varrho \frac{\hat{p}_\parallel}{\tilde{p}_\perp} (p\varphi\gamma) \right] L_{n-1}^1(u) \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\hat{p}_\parallel = (p\tilde{\Lambda}\gamma) = E_n\gamma_0 - p_3\gamma_3$, $\hat{p}_\perp = (p\Lambda\gamma) = p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2$, $(p\varphi\gamma) = p_2\gamma_1 - p_1\gamma_2$, $\varphi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}/B$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}/B$ – безразмерные тензор и дуальный тензор электромагнитного поля, $\Lambda_{\mu\nu} = (\varphi\varphi)_{\mu\nu}$, $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\mu\nu}$, Π_ϱ – оператор проекции спина частицы на направление магнитного поля (см. формулу (90) в приложении А). Отметим, что входящие в выражения (22) и (23) структуры $\hat{p}_\parallel$, $\hat{p}_\perp$, $(p\varphi\gamma)$, $\tilde{p}_\perp$, Π_ϱ , а также аргумент полиномов Лагерра $u = 2p_\perp^2/eB = 2(p_1^2 + p_2^2)/eB$ являются инвариантами относительно преобразований Лоренца вдоль вектора напряженности магнитного поля. Эффективное разбиение 4-мерного пространства в постоянном однородном магнитном поле на два ортогональных подпространства – параллельное ($\parallel$) и перпендикулярное ($\perp$), а также алгебра матриц Дирака в этих подпространствах приведены в приложении А. Подробный вывод формул (22) и (23) содержится в приложении Б.

После суммирования по поляризациям s матрица плотности приводится к виду

$$\begin{aligned} \rho_n^{(+)}(p) = & \sum_{s=\pm\rho} \rho_{n,s}^{(+)}(p) = (-1)^n 2e^{-u/2} \times \\ & \times [(\hat{p}_\parallel + m)(\Pi_\varrho L_n(u) - \Pi_{-\varrho} L_{n-1}(u)) + 2\hat{p}_\perp L_{n-1}^1(u)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Отметим, что выражение для $\rho_n^{(+)}(p)$ может быть получено при использовании любого из проектирующих операторов, обсуждаемых подробно в книге [31], поскольку

не содержит информации о спиновых свойствах заряженной дираковской частицы. При “наивном” суммировании матрицы плотности (24) по n , т. е. в предположении, что в пределе слабого поля ($B \rightarrow 0$) дискретный спектр энергий заряженной частицы переходит в непрерывный ($E_n \rightarrow E = \sqrt{p^2 + m^2}$), получаем стандартное вакуумное выражение:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^{(+)}(p) &= 2e^{-u/2}(\hat{p}_{\parallel} + m) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [\Pi_{\varrho} L_n(u) - \Pi_{-\varrho} L_{n-1}(u)] + \\ &+ 4e^{-u/2} \hat{p}_{\perp} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_{n-1}^1(u) = \hat{p}_{\parallel} + m - \hat{p}_{\perp} = \hat{p} + m, \end{aligned} \quad (25)$$

где было использовано правило суммирования обобщенных полиномов Лагерра [32]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+k)!}{n! k!} L_{n+k}^m(2x) = \frac{e^x}{2^{k+m+1}} L_k^m(x) \quad (26)$$

при значениях $k = 0$ и $m = 0, 1$.

В случае нерелятивистской частицы, пренебрегая всеми поперечными к полю компонентами импульса и полагая $\hat{p}_{\parallel} = m\hat{v}_{\parallel}$, из формул (22) и (23) получим

$$\begin{aligned} \rho_{n,s=\varrho}^{(+)}(p) &= (-1)^n 2e^{-u/2} L_n(u) m(1 + \hat{v}_{\parallel}) \Pi_{\varrho}, \\ \rho_{n,s=-\varrho}^{(+)}(p) &= (-1)^{n+1} 2e^{-u/2} L_{n-1}(u) m(1 + \hat{v}_{\parallel}) \Pi_{-\varrho}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $v^{\mu} = (1, 0, 0, v)/\sqrt{1 - v^2}$ – 4-скорость движения среды вдоль направления поля. Нетрудно убедиться, что матрица плотности (27) описывает состояние с определенной проекцией оператора дираковского спина Σ_3 на направление магнитного поля.

Поскольку волновая функция нерелятивистской заряженной частицы с аномальным магнитным моментом, например протона, не зависит от аномального момента, приведенные выражения описывают матрицу плотности с определенной поляризацией также и в этом случае. Отметим, что учет взаимодействия аномального магнитного момента с магнитным полем снимает вырождение энергии по уровням Ландау:

$$E_{n,s} = m + \frac{p_3^2}{2m} + \frac{eBn}{m} - \tilde{g}\varrho \frac{eBs}{2m}, \quad (28)$$

где число n нумерует уровни Ландау, $\tilde{g}$ – аномальный магнитный момент в ядерных магнетонах для нуклонов и магнетонах Бора для электронов.

Просуммированная по s матрица плотности, соответствующая решению уравнения Дирака с отрицательной энергией (19), получается из соотношения (20) формальной заменой $p^{\mu} \rightarrow -p^{\mu}$, что приводит к выражению

$$\begin{aligned} \sum_{s=\pm 1} \psi_{n,p_2,p_3,s}^{(-)}(x) \bar{\psi}_{n,p_2,p_3,s}^{(-)}(x') &= \frac{e^{-i\varrho\Phi(x,x')}}{2E_n L_y L_z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-x')} \rho_n^{(-)}(p) \frac{dp_1}{2\pi}, \\ \rho_n^{(-)}(p) &= (-1)^n 2e^{-u/2} \{(\hat{p}_{\parallel} - m) [\Pi_{\varrho} L_n(u) - \Pi_{-\varrho} L_{n-1}(u)] + 2\hat{p}_{\perp} L_{n-1}^1(u)\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь знак заряда ϱ такой же, как и для положительно-частотного решения.

Для полноты изложения приведем известные матрицы плотности для безмассового нейтрино левой спиральности с 4-импульсом $k^\mu = (\omega, \vec{k})$:

$$\psi_k^{(\nu)}(x) \bar{\psi}_k^{(\nu)}(x') = \frac{e^{-ik(x-x')}}{2\omega V} \rho^{(\nu)}(k), \quad \rho^{(\nu)}(k) = \frac{1}{2} \hat{k} (1 - \gamma_5), \quad (30)$$

и для электронейтральной частицы с массой m_N и 4-импульсом $P^\mu = (E, \vec{P})$:

$$\sum_{s=\pm 1} \psi_{P,s}^{(N)}(x) \bar{\psi}_{P,s}^{(N)}(x') = \frac{e^{-iP(x-x')}}{2EV} \rho^{(N)}(P), \quad \rho^{(N)}(P) = \hat{P} + m_N, \quad (31)$$

где $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ и $V = L_x L_y L_z$ – нормировочный объем. В нерелятивистском пределе матрица плотности поляризованной электронейтральной частицы имеет вид

$$\rho_s^{(N)}(P) = m_N (1 + \hat{v}_\parallel) \Pi_s, \quad (32)$$

не меняющийся и при учете магнитного момента частицы, например нейтрона. Однако в этом случае энергия частицы явно зависит от ее поляризации и определяется выражением

$$E_s = m_N + \frac{\vec{P}^2}{2m_N} - g \frac{eBs}{2m_N}, \quad (33)$$

где g – магнитный момент нейтрона в ядерных магнетонах.

3. СЛАБЫЕ ОДНОВЕРШИННЫЕ ПРОЦЕССЫ

В этом разделе мы покажем, как работает формализм матрицы плотности, на следующих примерах: процессы рассеяния нейтрино на электронах (5) и нуклонах (6), а также URCA-процесс (1). S -матричные элементы и их квадраты для кроссинг-симметричных процессов могут быть получены соответствующими заменами 4-импульсов частиц.

В низкоэнергетическом пределе, когда переданные в реакции энергия и импульс много меньше массы W -бозона ($m_W \simeq 80$ ГэВ [33]), локальный эффективный лагранжиан процессов (5) и (6) может быть записан единообразно:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(1)}(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}^{(Q)}(x) \gamma_\alpha (c_v + c_a \gamma_5) \psi^{(Q)}(x)] [\bar{\psi}^{(\nu)}(x) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi^{(\nu)}(x)], \quad (34)$$

где G_F – константа Ферми, $\psi^{(Q)}(x)$ – оператор электрона (нуклона), $\psi^{(\nu)}(x)$ – оператор нейтринного поля, c_v и c_a – векторные и аксиальные константы эффективных нейтральных слабых токов. Отметим, что в рассматриваемом пределе значения этих констант для процесса (5) зависят от аромата нейтрино [28]:

$$\begin{aligned} c_v^{(e)} &= +\frac{1}{2} + 2\sin^2 \theta_W, & c_a^{(e)} &= +\frac{1}{2}, & \nu &= \nu_e, \\ c_v^{(x)} &= -\frac{1}{2} + 2\sin^2 \theta_W, & c_a^{(x)} &= -\frac{1}{2}, & \nu_x &= \nu_\mu, \nu_\tau, \end{aligned} \quad (35)$$

где θ_W – угол Вайнберга ($\sin^2 \theta_W \simeq 0.23$ [33]), тогда как для процессов вида (6) константы слабых токов зависят от типа нуклона [34]:

$$\begin{aligned} c_v^{(p)} &= \frac{0.07}{2}, & c_a^{(p)} &= \frac{1.09}{2}, & Q &= p \text{ (протон)}, \\ c_v^{(N)} &= -\frac{1}{2}, & c_a^{(N)} &= -\frac{0.91}{2}, & Q &= N \text{ (нейтрон)}. \end{aligned} \quad (36)$$

В низкоэнергетическом пределе локальный эффективный лагранжиан URCA-процесса (1) может быть представлен в виде [26]

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)}(x) = \frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}^{(N)}(x) \gamma_\alpha (g_v + g_a \gamma_5) \psi^{(p)}(x)] [\bar{\psi}^{(\nu)}(x) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi^{(e)}(x)], \quad (37)$$

где θ_C – угол Кабиббо ($\sin \theta_C \simeq 0.22$ [33]), $\psi^{(N)}(x)$, $\psi^{(p)}(x)$, $\psi^{(e)}(x)$, $\psi^{(\nu)}(x)$ – операторы нейтронного, протонного, электронного, нейтринного полей соответственно, $g_v \simeq 1$ и $g_a \simeq 1.26$ – векторная и аксиальная константы заряженного нуклонного тока. S -матричные элементы процессов (5) и (6), составленные по локальному эффективному лагранжиану (34), могут быть записаны в виде

$$S_{\text{if}}^{(1)} = \frac{iG_1}{\sqrt{2}} \int [\bar{\psi}_{n',p'_2,p'_3,s'}^{(Q)}(x) \tilde{O}_\alpha(c) \psi_{n,p_2,p_3,s}^{(Q)}(x)] [\bar{\psi}_{k'}^{(\nu)}(x) O_\alpha \psi_k^{(\nu)}(x)] d^4x, \quad (38)$$

$$\tilde{O}_\alpha(c) = \gamma_\alpha (1 + c\gamma_5), \quad O_\alpha = \gamma_\alpha (1 + \gamma_5), \quad (39)$$

где $G_1 = G_F c_v$, $c = c_a/c_v$, $\psi_{n,p_2,p_3,s}^{(Q)}(x)$, $\psi_{n',p'_2,p'_3,s'}^{(Q)}(x)$, $\psi_k^{(\nu)}(x)$, $\psi_{k'}^{(\nu)}(x)$ – волновые функции нуклона и нейтрино в начальном и конечном состояниях и интегрирование ведется по 4-мерному нормировочному объему $\Omega = TL_x L_y L_z$.

S -матричный элемент процесса (1), соответствующий локальному эффективному лагранжиану (37), запишется в виде

$$S_{\text{if}}^{(2)} = \frac{iG_2}{\sqrt{2}} \int [\bar{\psi}_{P',s'}^{(N)}(x) \tilde{O}_\alpha(g) \psi_{m,P_2,P_3,s}^{(p)}(x)] [\bar{\psi}_{q'}^{(\nu)}(x) O_\alpha \psi_{m',q_2,q_3,s''}^{(e)}(x)] d^4x, \quad (40)$$

где $G_2 = G_F g_v \cos \theta_C$, $g = g_a/g_v \simeq 1.26$, $\psi_{m,P_2,P_3,s}^{(p)}(x)$ и $\psi_{m',q_2,q_3,s''}^{(e)}(x)$ – волновые функции протона и электрона, $\psi_{P',s'}^{(N)}(x)$ – нейтрона, $\psi_{q'}^{(\nu)}(x)$ – нейтрино.

При использовании формализма матрицы плотности квадраты S -матричных элементов, просуммированные по поляризациям частиц, представляются в виде

$$\begin{aligned} \sum_{s,s'=\pm 1} |S_{\text{if}}^{(1)}|^2 &= \frac{G_1^2}{2} \int \frac{dp_1 dp'_1}{4\pi^2} \text{Sp}[\rho_{n'}^{(Q)}(p') \tilde{O}_\alpha(c) \rho_n^{(Q)}(p) \tilde{O}_\beta(c)] \times \\ &\times \text{Sp}[\rho^{(\nu)}(k') O_\alpha \rho^{(\nu)}(k) O_\beta] \int d^4x d^4x' \frac{e^{-i(p+k-p'-k')(x-x')}}{16\varepsilon_n \omega \varepsilon'_n \omega' L_y^2 L_z^2 V^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $p^{(\nu)\mu} = (\varepsilon_{n^{(\nu)}}^{(\nu)}, \vec{p}^{(\nu)})$, $k^{(\nu)\mu} = (\omega^{(\nu)}, \vec{k}^{(\nu)})$ – 4-импульсы заряженных частиц и нейтрино в начальном (конечном) состоянии,

$$\begin{aligned} \sum_{s,s',s''=\pm 1} |S_{\text{if}}^{(2)}|^2 &= \frac{G_2^2}{2} \int \frac{dq_1 dP_1}{4\pi^2} \text{Sp}[\rho^{(N)}(P') \tilde{O}_\alpha(g) \rho_m^{(p)}(P) \tilde{O}_\beta(g)] \times \\ &\times \text{Sp}[\rho^{(\nu)}(q') O_\alpha \rho_{m'}^{(e)}(q) O_\beta] \int d^4x d^4x' \frac{e^{-i(P+q-P'-q')(x-x')}}{16E_m \varepsilon_{m'} E' q'_0 L_y^2 L_z^2 V^2}, \end{aligned} \quad (42)$$

где $P^\mu = (E_m, \vec{P})$, $q^\mu = (\varepsilon_{m'}, \vec{q})$, $P'^\mu = (E', \vec{P}')$ и $q'^\mu = (q'_0, \vec{q}')$ – 4-импульсы протона, электрона, нейтрона и нейтрино.

Интегрирование квадратов S-матричных элементов по x и x' тривиально и приводит к следующим результатам:

$$\sum_{s,s'=\pm 1} |S_{\text{if}}^{(1)}|^2 = \frac{(-1)^{n+n'} \pi^2 G_1^2 \mathcal{T}}{2\varepsilon_n \omega \varepsilon_{n'} \omega' L_y^2 L_z^2 V} \int [L_{\alpha\beta}^{(Q)} L_{\alpha\beta}^{(\nu)}] e^{-(u+u')/2} \delta^{(4)}(p+k-p'-k') dp_1 dp'_1, \quad (43)$$

$$L_{\alpha\beta}^{(Q)} = (-1)^{n+n'} e^{(u+u')/2} \frac{1}{4} \text{Sp}[\rho_{n'}^{(Q)}(p') \tilde{O}_\alpha(c) \rho_n^{(Q)}(p) \tilde{O}_\beta(c)],$$

$$L_{\alpha\beta}^{(\nu)} = \text{Sp}[\rho^{(\nu)}(k') O_\alpha \rho^{(\nu)}(k) O_\beta],$$

$$\sum_{s,s',s''=\pm 1} |S_{\text{if}}^{(2)}|^2 = \frac{(-1)^{m+m'} \pi^2 G_2^2 \mathcal{T}}{2E_m \varepsilon_{m'} E' q'_0 L_y^2 L_z^2 V} \int [N_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}] e^{-(v+v')/2} \delta^{(4)}(P+q-P'-q') dq_1 dP_1, \quad (44)$$

$$N_{\alpha\beta} = (-1)^m e^{v/2} \frac{1}{2} \text{Sp}[\rho^{(N)}(P') \tilde{O}_\alpha(g) \rho_m^{(p)}(P) \tilde{O}_\beta(g)],$$

$$L_{\alpha\beta} = (-1)^{m'} e^{v'/2} \frac{1}{2} \text{Sp}[\rho^{(\nu)}(q') O_\alpha \rho_{m'}^{(e)}(q) O_\beta],$$

где $u = 2p_\perp^2/eB$, $u' = 2p_\perp'^2/eB$, $v = 2P_\perp^2/(eB)$, $v' = 2q_\perp^2/eB$.

При подстановке выражения (43) в $\mathcal{P}_\mu$ (10) получим явно ковариантное выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu^{(1)} = & \frac{G_1^2}{8(2\pi)^8} \sum_{n,n'=0}^{\infty} (-1)^{n+n'} \int \frac{d^3 k}{\omega} f_\nu(\omega) \int \frac{d^3 k'}{\omega'} [1 - f_\nu(\omega')] (k' - k)_\mu \times \\ & \times \int \frac{d^3 p}{\varepsilon_n} f_Q(\varepsilon_n) \int \frac{d^3 p'}{\varepsilon_{n'}} [1 - f_Q(\varepsilon_{n'})] \delta^{(4)}(p+k-p'-k') e^{-(u+u')/2} [L_{\alpha\beta}^{(Q)} L_{\alpha\beta}^{(\nu)}], \end{aligned} \quad (45)$$

где $f_\nu(\omega^{(\nu)})$ и $f_Q(\varepsilon_{n^{(\nu)}})$ – функции распределения начальных (конечных) нейтрино и заряженной частицы.

Аналогичным образом $\mathcal{P}_\mu$ в реакции (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu^{(2)} = & \frac{G_2^2}{8(2\pi)^8} \sum_{m,m'=0}^{\infty} (-1)^{m+m'} \int \frac{d^3 q'}{q'_0} [1 - f_\nu(q'_0)] q'_\mu \int \frac{d^3 P}{E_m} f_p(E_m) \times \\ & \times \int \frac{d^3 q}{\varepsilon_{m'}} f_e(\varepsilon_{m'}) \int \frac{d^3 P'}{E'} [1 - f_N(E')] \delta^{(4)}(P+q-P'-q') e^{-(v+v')/2} [N_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}]. \end{aligned} \quad (46)$$

Поскольку шпур от нечетного числа γ -матриц равен нулю, то после небольших преобразований с использованием коммутационных свойств матрицы γ_5 с проекци-

онным оператором ($\Pi_{\varrho}\gamma_5 = \gamma_5\Pi_{\varrho}$) нетрудно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta}^{(Q)} = & \text{Sp}[\{\hat{p}'_{\parallel}(\Pi_{\varrho}L_{n'}(u') - \Pi_{-\varrho}L_{n'-1}(u')) + 2\hat{p}'_{\perp}L_{n'-1}^1(u')\}\gamma_{\alpha} \times \\ & \times \{\hat{p}_{\parallel}(\Pi_{\varrho}L_n(u) - \Pi_{-\varrho}L_{n-1}(u)) + 2\hat{p}_{\perp}L_{n-1}^1(u)\}\gamma_{\beta}(1 + c^2 + 2c\gamma_5)] + \\ & + m_Q^2(1 - c^2)\text{Sp}[(\Pi_{\varrho}L_{n'}(u') - \Pi_{-\varrho}L_{n'-1}(u'))\gamma_{\alpha}(\Pi_{\varrho}L_n(u) - \Pi_{-\varrho}L_{n-1}(u))\gamma_{\beta}], \end{aligned} \quad (47)$$

$$L_{\alpha\beta}^{(\nu)} = 2\text{Sp}[\hat{k}'\gamma_{\alpha}\hat{k}\gamma_{\beta}(1 + \gamma_5)] \quad (48)$$

для шпуров, входящих в формулу (45), и

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} = & \text{Sp}[\hat{P}'\gamma_{\alpha}\{\hat{P}_{\parallel}(\Pi_{+}L_m(v) - \Pi_{-}L_{m-1}(v)) + 2\hat{P}_{\perp}L_{m-1}^1(v)\}\gamma_{\beta}(1 + g^2 + 2g\gamma_5)] + \\ & + m_N m_p(1 - g^2)\text{Sp}[\gamma_{\alpha}(\Pi_{+}L_m(v) - \Pi_{-}L_{m-1}(v))\gamma_{\beta}], \end{aligned} \quad (49)$$

$$L_{\alpha\beta} = 2\text{Sp}[\hat{q}'\gamma_{\alpha}\{\hat{q}_{\parallel}(\Pi_{-}L_{m'}(v') - \Pi_{+}L_{m'-1}(v')) + 2\hat{q}_{\perp}L_{m'-1}^1(v')\}\gamma_{\beta}(1 + \gamma_5)] \quad (50)$$

для шпуров, входящих в формулу (46).

При использовании свойств (91)–(94), (98) и (100) (см. приложение А) приведенные выше громоздкие шпуры вычисляются без особых трудностей. Техника вычисления интегралов, входящих в $\mathcal{P}_{\mu}^{(1)}$ (45) и $\mathcal{P}_{\mu}^{(2)}$ (46), по компонентам импульсов заряженных частиц, поперечных вектору напряженности магнитного поля, подробно изложена в приложении В.

4. СВЕТИМОСТЬ В ПРОЦЕССЕ НЕЙТРИННОГО СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В настоящем разделе в формализме матрицы плотности вычисляется нейтринная светимость в процессе синхротронного излучения нейтринной пары электроном (позитроном). История изучения этого процесса насчитывает более сорока лет [35]. Ссылки на ранние работы, а также анализ современного состояния его исследования содержатся в обзорах [26], [27]. Выражение для нейтринной светимости процесса и интерполяционная формула для численного расчета получены в работе [36], где предполагалось, что плазма прозрачна для родившихся нейтрино.

Вычислим $\mathcal{P}_{\mu}^{(1)}$ (10) для нейтрино определенного аромата в том же предположении, что и в работе [36]. Результат вычислений необходимо просуммировать по всем ароматам нейтрино $i = e, \mu, \tau$, учитывая значения векторных и аксиальных констант (35) слабых токов. При переходе от канала рассеяния к нейтринному синхротронному излучению необходимо сделать замену 4-импульса нейтрино $k_{\mu} \rightarrow -k_{\mu}$, и выражение (45) приводится к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu} = & \frac{G_1^2}{8(2\pi)^8} \int \frac{d^3k}{\omega} \int \frac{d^3k'}{\omega'} (k + k')_{\mu} L_{\alpha\beta}^{(\nu)} \sum_{n,n'=0}^{\infty} (-1)^{n+n'} \times \\ & \times \int \frac{d^3p}{\varepsilon_n} f(\varepsilon_n) \int \frac{d^3p'}{\varepsilon'_{n'}} [1 - f(\varepsilon'_{n'})] e^{-(u+u')/2} L_{\alpha\beta}^{(e)} \delta^{(4)}(p - p' - k - k'). \end{aligned} \quad (51)$$

Напомним, что здесь $p^{(\iota)\mu} = (\varepsilon_{n^{(\iota)}}^{(\iota)}, \vec{p}^{(\iota)})$ – 4-векторы импульса начального (конечного) электрона, электронный шпур $L_{\alpha\beta}^{(e)}$ соответствует выражению (47) при $\varrho = -1$,

нейтринный шпур $L_{\alpha\beta}^{(\nu)}$ – выражению (48), и для электронов используются равновесные функции распределения

$$f(\varepsilon_n) = \frac{1}{e^{\varepsilon_n/T-\eta} + 1}, \quad (52)$$

где $\eta = \mu/T$. Выражение (51) может быть ковариантно проинтегрировано по импульсам нейтрино. Введем тензорный интеграл $I_{\alpha\beta}$, который довольно легко вычисляется:

$$I_{\alpha\beta} = \int \frac{d^3k}{\omega} \int \frac{d^3k'}{\omega'} \delta^{(4)}(k + k' - q) L_{\alpha\beta}^{(\nu)} = \frac{16\pi}{3} (q_\alpha q_\beta - q^2 g_{\alpha\beta}) \theta(q^2). \quad (53)$$

Для дальнейших вычислений удобно ввести интегральную единицу

$$\int d^4q \delta^{(4)}(p - p' - q) = 1, \quad (54)$$

тогда выражение (51) может быть приведено к виду:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu = & \frac{G_1^2}{3(2\pi)^7} \int d^4q q_\mu \theta(q^2) \sum_{n,n'=0}^{\infty} (-1)^{n+n'} \int \frac{d^3p}{\varepsilon_n} f(\varepsilon_n) \int \frac{d^3p'}{\varepsilon_{n'}} [1 - f(\varepsilon_{n'})] \times \\ & \times e^{-(u+u')/2} \delta^{(4)}(p - p' - q) (q_\alpha q_\beta L_{\alpha\beta}^{(e)} - q^2 g_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}^{(e)}). \end{aligned} \quad (55)$$

Рассмотрим нулевую компоненту Q_S этого 4-вектора (нейтринную светимость). При вычислении свертки $L_{\alpha\beta}^{(e)}$ с векторами q_α и q_β в светимости не следует учитывать члены, линейные по c , поскольку они линейны либо по p_3 , либо по p'_3 и зануляются при интегрировании по этим переменным. В результате получим

$$\begin{aligned} q_\alpha q_\beta L_{\alpha\beta}^{(e)} = & 2(1 + c^2) \{ -(p\tilde{\Lambda}p') q_\perp^2 [L_n(u) L_{n'-1}(u') + L_{n-1}(u) L_{n'}(u')] + \\ & + (2(p\tilde{\Lambda}q)(p'\tilde{\Lambda}q) - q_\parallel^2 (p'\tilde{\Lambda}p)) [L_n(u) L_{n'}(u') + L_{n-1}(u) L_{n'-1}(u')] + \\ & + 4(p\Lambda q)(p'\tilde{\Lambda}q) L_{n-1}^1(u) [L_{n'}(u') - L_{n'-1}(u')] + \\ & + 4(p'\Lambda q)(p\tilde{\Lambda}q) L_{n'-1}^1(u') [L_n(u) - L_{n-1}(u)] + \\ & + 8(2(p\Lambda q)(p'\Lambda q) + q^2 (p'\Lambda p)) L_{n-1}^1(u) L_{n'-1}^1(u') \} + \\ & + 2m^2(1 - c^2) \{ q_\parallel^2 [L_n(u) L_{n'}(u') + L_{n-1}(u) L_{n'-1}(u')] + \\ & + q_\perp^2 [L_n(u) L_{n'-1}(u') + L_{n-1}(u) L_{n'}(u')] \}, \end{aligned} \quad (56)$$

где $u = 2p_\perp^2/eB$, $u' = 2p_\perp'^2/eB$, $n^{(\prime)}$ – уровни Ландау начальной (конечной) частицы.

Заметим, что вследствие сохранения векторного тока выполняется тождество

$$q_\alpha q_\beta L_{\alpha\beta}^{(e)}|_{c=0} = 0, \quad (57)$$

так что бо́льшая часть членов в выражении (56) равна нулю.

Свертка $g_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}^{(e)}$ имеет простой компактный вид:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}^{(e)} = & -4m^2(1 - c^2) [L_n(u) - L_{n-1}(u)] [L_{n'}(u) - L_{n'-1}(u')] + 4(1 + c^2) \times \\ & \times \{ (p'\tilde{\Lambda}p) [L_{n'}(u') L_{n-1}(u) + L_{n'-1}(u') L_n(u)] + \\ & + 8(p'\Lambda p) L_{n-1}^1(u) L_{n'-1}^1(u') \}. \end{aligned} \quad (58)$$

Далее приведем результаты вычисления содержащихся в формуле (55) интегралов по поперечным к полю компонентам импульсов электронов в терминах нормированных функций Лагерра [31], [37]:

$$F_{n',n}(v) = \sqrt{\frac{n'!}{n!}} v^{(n-n')/2} e^{-v/2} L_{n'}^{n-n'}(v) = n'! I_{n,n'}(v). \quad (59)$$

Скалярный, векторные и тензорный интегралы (см. приложение B) в терминах этих функций могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} S^{(n',n)}(v) &= \int d^2 p_{\perp} \int d^2 p'_{\perp} \delta^{(2)}(\vec{p}_{\perp} - \vec{p}'_{\perp} - \vec{q}_{\perp}) L_n(u) L_{n'}(u') e^{-(u+u')/2} = \\ &= (-1)^{n'-n} \frac{\pi e B}{2} F_{n',n}^2(v), \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} V_{\alpha}^{(n',n)}(v) &= \int d^2 p_{\perp} \int d^2 p'_{\perp} \delta^{(2)}(\vec{p}_{\perp} - \vec{p}'_{\perp} - \vec{q}_{\perp}) p_{\perp \alpha} L_{n-1}^1(u) L_{n'}(u') e^{-(u+u')/2} = \\ &= (-1)^{n'-n-1} \frac{\pi e B}{4} \sqrt{\frac{n}{v}} q_{\perp \alpha} F_{n',n}(v) F_{n',n-1}(v), \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} V_{\alpha}^{(n,n')}(v) &= \int d^2 p_{\perp} \int d^2 p'_{\perp} \delta^{(2)}(\vec{p}_{\perp} - \vec{p}'_{\perp} - \vec{q}_{\perp}) p'_{\perp \alpha} L_n(u) L_{n'-1}^1(u') e^{-(u+u')/2} = \\ &= (-1)^{n-n'-1} \frac{\pi e B}{4} \sqrt{\frac{n'}{v}} q_{\perp \alpha} F_{n',n}(v) F_{n'-1,n}(v), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{(n,n')}(v) &= \int d^2 p_{\perp} \int d^2 p'_{\perp} \delta^{(2)}(\vec{p}_{\perp} - \vec{p}'_{\perp} - \vec{q}_{\perp}) p_{\perp \alpha} p'_{\perp \beta} L_{n-1}^1(u) L_{n'-1}^1(u') e^{-(u+u')/2} = \\ &= (-1)^{n'-n} \frac{\pi e B}{16} \frac{\sqrt{nn'}}{v} [(2q_{\perp \alpha} q_{\perp \beta} - q_{\perp}^2 \Lambda_{\alpha\beta}) F_{n',n-1}(v) F_{n'-1,n}(v) + \\ &\quad + q_{\perp}^2 \Lambda_{\alpha\beta} F_{n',n}(v) F_{n'-1,n-1}(v)], \end{aligned} \quad (63)$$

где $v = q_{\perp}^2 / (2eB)$.

После вычисления интегралов по поперечным к полю импульсам электронов нейтринная светимость процесса может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} Q_S &= \frac{G_1^2 e B}{6(2\pi)^6} \int d^4 q q_0 \theta(q^2) \sum_{n,n'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_3}{\varepsilon_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_3}{\varepsilon'_{n'}} f(\varepsilon_n) [1 - f(\varepsilon'_{n'})] \delta(\varepsilon_n - \varepsilon'_{n'} - q_0) \times \\ &\quad \times \delta(p_3 - p'_3 - q_3) \{ (1 + c^2) q^2 [2eB(n + n')(\Psi(v) - \Phi(v)) - q^2 \Psi(v)] - \\ &\quad - 2m^2 [q^2 (\Phi(v) - 2c^2 \Psi(v)) + c^2 q_{\perp}^2 (\Phi(v) - \Psi(v))] \}, \end{aligned} \quad (64)$$

где $\Phi(v) = F_{n',n}^2(v) + F_{n'-1,n-1}^2(v)$ и $\Psi(v) = F_{n',n-1}^2(v) + F_{n'-1,n}^2(v)$.

Полученное выражение совпадает с соответствующим результатом работы [36].

Нейтринная светимость в процессе аннигиляции (4) может быть легко получена из формулы (64) при заменах в подинтегральном выражении $\varepsilon'_{n'} \rightarrow -\varepsilon'_{n'}$, $p'_3 \rightarrow -p'_3$, $1 - f(\varepsilon'_{n'}) \rightarrow f(\varepsilon'_{n'})$ с заменой знака химического потенциала μ в функции распределения $f(\varepsilon'_{n'})$ и у члена в фигурных скобках, пропорционального квадрату массы электрона. Последняя замена обусловлена использованием матрицы плотности $\rho_{n'}^{(-)}(p')$ (29) для позитрона ($\varrho = -1$), которая отличается от $\rho_{n'}^{(+)}(p')$ (24) для электрона ($\varrho = -1$) знаком перед массой частицы.

В случае сильного магнитного поля концентрация электронов и позитронов на уровнях Ландау с $n \geq 1$ экспоненциально подавлена, поэтому в процессе (4) ограничимся рассмотрением вкладов либо с $n = 0$, либо с $n' = 0$, а в процессе (7) – вклада с $n' = 0$. Тогда выражение для нейтринной светимости (64) существенно упрощается:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_S^{(n,0)} = \frac{G_1^2 e B}{6(2\pi)^6} \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4 q q_0 \theta(q^2) I_n(q_0, q_3, \eta, T) \{ (1 + c^2) q^2 (2eBn - q_{\parallel}^2) F_{0,n-1}^2(v) - 2m^2 [(q_{\parallel}^2 - (1 - c^2) q_{\perp}^2) F_{0,n}^2(v) - c^2 (2q_{\parallel}^2 - q_{\perp}^2) F_{0,n-1}^2(v)] \}, \quad (65)$$

где было использовано известное соотношение для функций Лагерра [37]: $F_{0,n}^2(v) = v F_{0,n-1}^2(v)/n$. В выражении (65) под $I_n(q_0, q_3, \eta, T)$ понимается интеграл

$$I_n(q_0, q_3, \eta, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_3}{\varepsilon_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_3}{\varepsilon'_0} \delta(\varepsilon_n - \varepsilon'_0 - q_0) \delta(p_3 - p'_3 - q_3) f(\varepsilon_n) [1 - f(\varepsilon'_0)]. \quad (66)$$

Для ультрарелятивистской плазмы ($\varepsilon_n^2, \varepsilon_0'^2 \gg m^2$) этот интеграл легко вычисляется:

$$I_n(q_0, q_3, \eta, T) = \frac{2}{2eBn - q_{\parallel}^2} \theta(2eBn - q_{\parallel}^2) \Phi_n(q_0, q_3, \eta, T), \quad (67)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n(q_0, q_3, \eta, T) = & \left[\exp \left(\frac{q_0}{2T} \frac{q_{\parallel}^2 + 2eBn}{q_{\parallel}^2} - \frac{q_3}{2T} \frac{q_{\parallel}^2 - 2eBn}{q_{\parallel}^2} - \eta \right) + 1 \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\exp \left(\frac{q_0 + q_3}{2T} \frac{q_{\parallel}^2 - 2eBn}{q_{\parallel}^2} + \eta \right) + 1 \right]^{-1} + (q_3 \rightarrow -q_3). \end{aligned} \quad (68)$$

Таким образом, нейтринная светимость горячей плазмы в синхротроне (7) при переходе электрона на основной уровень Ландау описывается выражением

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Q_S^{(n,0)} = & \frac{G_1^2 e B}{6(2\pi)^5} (1 + c^2) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dq_0 q_0 \int_{-\infty}^{\infty} dq_3 \times \\ & \times \int_0^{\infty} dq_{\perp}^2 \theta(q^2) \theta(2eBn - q_{\parallel}^2) q^2 F_{0,n-1}^2(v) \Phi_n(q_0, q_3, \eta, T). \end{aligned} \quad (69)$$

Легко видеть, что $Q_S^{(n,0)}$ обращается в нуль при $n = 0$.

Приведем далее выражение для нейтринной светимости в кроссинг-процессе аннигиляции (4):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Q_A^{(n,0)} = & \frac{G_1^2 e B}{6(2\pi)^5} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dq_0 q_0 \int_{-\infty}^{\infty} dq_3 \times \\ & \times \int_0^{\infty} dq_{\perp}^2 \theta(q^2) \theta(q_{\parallel}^2 - 2eBn) \mathcal{F}_n(q_{\parallel}^2, q_{\perp}^2) \Phi_n(q_0, q_3, \eta, T), \end{aligned} \quad (70)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(q_{\parallel}^2, q_{\perp}^2) = (1 + c^2)q^2 F_{0,n-1}^2(v) + \frac{2m^2}{q_{\parallel}^2 - 2eBn} \times \\ \times [(q_{\parallel}^2 - (1 - c^2)q_{\perp}^2)F_{0,n}^2(v) - c^2(2q_{\parallel}^2 - q_{\perp}^2)F_{0,n-1}^2(v)]. \end{aligned} \quad (71)$$

В $\mathcal{F}_n(q_{\parallel}^2, q_{\perp}^2)$ намеренно удержан член, пропорциональный квадрату массы электрона m^2 , поскольку в отличие от синхротрона светимость в процессе аннигиляции не зануляется даже в случае, когда электрон и позитрон находятся на основном уровне Ландау.

При $n = 0$ интегрирование $Q_A^{(0,0)}$ по $q_{\perp}^2$ тривиально:

$$Q_A^{(0,0)} = \frac{G_1^2 e B m^2}{6(2\pi)^5} (1 + c^2) \int_0^\infty dq_0 q_0 \int_{-\infty}^\infty dq_3 q_{\parallel}^2 \theta(q_{\parallel}^2) \Phi_0(q_0, q_3, \eta, T). \quad (72)$$

В асимптотике сверхсильного магнитного поля ($n = n' = 0$) полученная нейтринная светимость в процессе аннигиляции ультрарелятивистской пары линейна по полю и пропорциональна квадрату массы электрона.

При $\eta = 0$ функция $\Phi_0(q_0, q_3, \eta, T)$ упрощается, и двукратный интеграл (72) вычисляется аналитически:

$$Q_A^{(B)} = \frac{\zeta(3)}{48\pi^3} (1 + c^2) G_1^2 e B m^2 T^5. \quad (73)$$

Этот результат совпадает с выражением для нейтринной светимости ультрарелятивистской невырожденной плазмы в асимптотике сверхсильного магнитного поля, полученным в работе [38].

Для сравнения оценим вклад в светимость первого уровня Ландау ($n = 1$), используя следующие безразмерные отношения:

$$R_S^{(1)}(T, B) = \frac{Q_S^{(1,0)}}{Q_A^{(B)}}, \quad (74)$$

где $Q_S^{(1,0)}$ – суммарная по электронам и позитронам светимость при синхротронном переходе с уровня $n = 1$ на уровень $n' = 0$ и

$$R_A^{(1)}(T, B) = \frac{Q_A^{(0,0)} + Q_A^{(1,0)} + Q_A^{(0,1)}}{Q_A^{(B)}}. \quad (75)$$

Эти отношения показывают, насколько нейтринные светимости ультрарелятивистской невырожденной плазмы в процессах (7) и (4) отличаются от асимптотического выражения (73). Нетрудно привести формулы (74) и (75) к виду

$$R_S^{(1)} = \frac{64}{\pi^2 \zeta(3)} \left(\frac{T}{m} \right)^2 I_S \left(\sqrt{\frac{eB}{2T^2}} \right), \quad (76)$$

$$R_A^{(1)} = 1 + \frac{64}{\pi^2 \zeta(3)} \left(\frac{T}{m} \right)^2 I_A \left(\sqrt{\frac{eB}{2T^2}} \right), \quad (77)$$

где введены следующие функции:

$$I_S(\alpha) = \alpha^7 \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_0^1 du [e^{-u} + u - 1] \Phi_1(u, v; \alpha), \quad (78)$$

$$I_A(\alpha) = \alpha^7 \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_1^{\infty} du [e^{-u} + u - 1] \Phi_1(u, v; \alpha), \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(u, v; \alpha) = & \left\{ \exp \left[\frac{\alpha}{u} \left((1+u)\sqrt{u+v^2} - (u-1)v \right) \right] + 1 \right\}^{-1} \times \\ & \times \left\{ \exp \left[\frac{\alpha}{u} (u-1) \left(\sqrt{u+v^2} + v \right) \right] + 1 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Отметим, что в пределе сильного магнитного поля выражения (76) и (77) хорошо согласуются с интерполяционными формулами, полученными при $\eta = 0$ для процесса (7) в работе [39] и процесса (4) – в работе [38].

Полученный результат может быть использован для оценки нейтринных потерь из приповерхностной области магнитара, заполненной электрон-позитронной плазмой, в период гигантской вспышки SGR [16]. Для характерных значений температуры $T \gtrsim 1$ МэВ и напряженности магнитного поля $10^{15} \lesssim B \lesssim 10^{16}$ Гс этой плазмы отношения (76) и (77) составляют десятки [17]. Отсюда следует, что в период всплешечной активности магнитара потери энергии плазмы за счет нейтрино велики и не оставляют необходимого энергетического запаса на радиационное излучение. Таким образом, в рамках магнитарной модели трудно объяснить энергетику гамма-излучения гигантской вспышки SGR.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получено инвариантное импульсное представление для матрицы плотности заряженной релятивистской спинорной частицы, находящейся в постоянном однородном магнитном поле. В формализме матрицы плотности развита техника вычисления скорости реакции и 4-импульса, уносимого нейтрино из плазмы, в одновершинных нейтринных процессах. Эффективность этой техники продемонстрирована на примере вычисления нейтринных светимостей в процессах аннигиляции электрона и позитрона в пару нейтрино и нейтринного синхротронного излучения электроном (позитроном).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Алгебра γ -матриц Дирака во внешнем магнитном поле

Для любой частицы с импульсом p_μ , находящейся в электромагнитном поле, можно ввести удобный для анализа квантовых процессов с ее участием базис. Заметим, что конфигурация чисто магнитного поля, наиболее важная в приложении к астрофизическим объектам, обладает набором специфических свойств, использование которых существенно упрощает расчеты конкретных реакций.

Из электродинамики известно, что электромагнитное поле полностью определяется тензором напряженностей $F_{\mu\nu}$. В дополнение к нему также вводится дуально сопряженный тензор $\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} / 2$. Выберем систему координат таким образом,

чтобы ось Oz была направлена вдоль вектора напряженности постоянного однородного магнитного поля $\vec{B} = (0, 0, B)$. В такой системе отсчета тензоры $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$ имеют следующий вид:

$$F_{\mu\nu} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

В дальнейшем удобно пользоваться не самим тензором электромагнитного поля и дуальным к нему тензором, а их безразмерными аналогами

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{F_{\mu\nu}}{B}, \quad \tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{\tilde{F}_{\mu\nu}}{B}, \quad (81)$$

явный вид которых в выбранной нами системе отсчета представлен числовыми матрицами в формуле (80). Также удобно использовать коварианты, составленные из этих тензоров и 4-вектора импульса заряженной частицы, в параллельном $(0, 3)$ и перпендикулярном $(1, 2)$ подпространствах. Значительный вклад в развитие техники вычислений в случае сильного магнитного поля сделали Скобелев и Лоскутов, построившие так называемую “двумерную электродинамику” [40], [41].

Представляет интерес анализ алгебры введенных безразмерных тензоров (81). Начнем с бинарных произведений

$$\Lambda_{\mu\nu} = (\varphi\varphi)_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\rho}\varphi^\rho{}_\nu, \quad \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\mu\nu} = \tilde{\varphi}_{\mu\rho}\tilde{\varphi}^\rho{}_\nu. \quad (82)$$

В отличие от антисимметричных тензоров $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ тензоры $\Lambda_{\mu\nu}$ и $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$ симметричны в соответствии с общими свойствами свертки тензоров. В выбранной нами системе координат эти тензоры имеют следующий явный вид:

$$\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Из явного представления тензоров видно, что они не являются линейно независимыми, а связаны друг с другом посредством метрического тензора $g_{\mu\nu}$:

$$\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (84)$$

Проведенный анализ показывает, что наличие внешнего постоянного однородного магнитного поля естественным образом разбивает четырехмерное пространство Минковского на два непересекающихся подпространства: двумерное евклидово подпространство с метрическим тензором $\Lambda_{\mu\nu}$, ортогональное вектору напряженности магнитного поля $\vec{B}$, и двумерное псевдоевклидово подпространство с метрическим тензором $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$. Безразмерные тензоры электромагнитного поля $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ играют роль тензоров Леви-Чивита (полностью антисимметричных тензоров) этих подпространств и обладают следующими свойствами:

$$\tilde{\varphi}_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_{\rho\sigma} = \tilde{\Lambda}_{\mu\sigma}\tilde{\Lambda}_{\nu\rho} - \tilde{\Lambda}_{\mu\rho}\tilde{\Lambda}_{\nu\sigma}, \quad (85)$$

$$\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} = \Lambda_{\mu\rho}\Lambda_{\nu\sigma} - \Lambda_{\mu\sigma}\Lambda_{\nu\rho}. \quad (86)$$

Для введенного набора тензоров справедливы бинарные соотношения

$$\begin{aligned}(\tilde{\varphi}\varphi)_{\mu\nu} &= (\tilde{\varphi}\Lambda)_{\mu\nu} = (\tilde{\Lambda}\varphi)_{\mu\nu} = (\tilde{\Lambda}\Lambda)_{\mu\nu} = 0, \\(\tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda})_{\mu\nu} &= \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}, \quad (\Lambda\Lambda)_{\mu\nu} = -\Lambda_{\mu\nu}, \\(\tilde{\Lambda}\tilde{\varphi})_{\mu\nu} &= \tilde{\varphi}_{\mu\nu}, \quad (\Lambda\varphi)_{\mu\nu} = -\varphi_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{87}$$

При проведении вычислений оказывается удобным ввести специальные обозначения для каждого из подпространств: $\perp$ – для евклидова подпространства с метрикой $\Lambda_{\mu\nu}$ и $\parallel$ – для псевдоевклидова подпространства с метрикой $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$. При таком соглашении произвольный 4-вектор $A^\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ можно разбить на две ортогональные составляющие:

$$A_\mu = \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}A^\nu - \Lambda_{\mu\nu}A^\nu = A_{\parallel\mu} - A_{\perp\mu},\tag{88}$$

где $A_{\parallel}^\mu = (A_0, 0, 0, A_3)$ и $A_{\perp}^\mu = (0, A_1, A_2, 0)$ в соответствии со свойством (84). Такое разбиение позволяет ввести скалярное произведение векторов в каждом подпространстве по отдельности:

$$\begin{aligned}(AB) &= (AB)_{\parallel} - (AB)_{\perp}, \\(AB)_{\parallel} &= (A\tilde{\Lambda}B) = A^\mu \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}B^\nu, \\(AB)_{\perp} &= (A\Lambda B) = A^\mu \Lambda_{\mu\nu}B^\nu,\end{aligned}\tag{89}$$

где A_μ и B_μ – произвольные 4-векторы.

Деление четырехмерного пространства на два непересекающихся подпространства приводит к эффективной модификации свойств γ -матриц. Будем обозначать γ -матрицы $\parallel$ -подпространства как $\gamma_{\parallel}^\mu = \tilde{\Lambda}^{\mu\nu}\gamma_\nu$, а $\perp$ -подпространства – как $\gamma_{\perp}^\mu = \Lambda^{\mu\nu}\gamma_\nu$.

Введем проекционные операторы фермиона Π_σ :

$$\Pi_\sigma = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{i\sigma}{2} (\gamma\varphi\gamma) \right] = \frac{1}{2} [1 + \sigma i\gamma_1\gamma_2],\tag{90}$$

где учтен явный вид тензора $\varphi_{\mu\nu}$ (81) в выбранной системе отсчета. Соответственно $\sigma = +1$ отвечает фермионному состоянию со спином, направленным по магнитному полю, а $\sigma = -1$ – состоянию со спином, направленным против магнитного поля. Отметим следующие мультипликативные и аддитивные свойства проекционных операторов:

$$\Pi_\sigma \Pi_\sigma = \Pi_\sigma, \quad \Pi_\sigma \Pi_{-\sigma} = 0, \quad \Pi_\sigma + \Pi_{-\sigma} = 1,\tag{91}$$

а также их коммутационные свойства по отношению к γ -матрицам:

$$\Pi_\sigma \gamma_{\parallel}^\mu = \gamma_{\parallel}^\mu \Pi_\sigma, \quad \Pi_\sigma \gamma_{\perp}^\mu = \gamma_{\perp}^\mu \Pi_{-\sigma}.\tag{92}$$

Последнее свойство интересно тем, что если встречается конструкция вида $\Pi_\sigma \gamma^\mu \Pi_\sigma$, то эффективно от γ -матрицы остается только ее продольная составляющая $\gamma_{\parallel}^\mu$, а в случае конструкции $\Pi_{-\sigma} \gamma^\mu \Pi_\sigma$ – поперечная часть $\gamma_{\perp}^\mu$.

Отметим также коммутативность проекционных операторов Π_σ с матрицей γ_5 :

$$\Pi_\sigma \gamma_5 = \gamma_5 \Pi_\sigma.\tag{93}$$

Широко используемой операцией является взятие шпура произведения некоторого числа γ -матриц. В случае сильного магнитного поля вычисление шпуров эффективно реализуется только в $\parallel$ -подпространстве. Как и в обычном четырехмерном пространстве, в $\parallel$ -подпространстве шпур нечетного числа γ -матриц равен нулю, а несколько первых шпуров четного числа – следующие:

$$\begin{aligned} \text{Sp}\{\Pi_\sigma\} &= 2, & \text{Sp}\{\gamma_\parallel^\mu \gamma_\parallel^\nu \Pi_\sigma\} &= 2\tilde{\Lambda}^{\mu\nu}, \\ \text{Sp}\{\gamma_\parallel^\mu \gamma_\parallel^\nu \gamma_\parallel^\rho \gamma_\parallel^\tau \Pi_\sigma\} &= 2[\tilde{\Lambda}^{\mu\nu} \tilde{\Lambda}^{\rho\tau} + \tilde{\Lambda}^{\mu\tau} \tilde{\Lambda}^{\nu\rho} - \tilde{\Lambda}^{\mu\rho} \tilde{\Lambda}^{\nu\tau}], \\ \text{Sp}\{\gamma_\parallel^\mu \gamma_\parallel^\nu \gamma_5 \Pi_\sigma\} &= 2\sigma\tilde{\varphi}^{\mu\nu}, & \text{Sp}\{\gamma_\parallel^\mu \gamma_\parallel^\nu \gamma_\parallel^\rho \gamma_\parallel^\tau \gamma_5 \Pi_\sigma\} &= 2\sigma[\tilde{\Lambda}^{\mu\nu} \tilde{\varphi}^{\rho\tau} + \tilde{\varphi}^{\mu\nu} \tilde{\Lambda}^{\rho\tau}]. \end{aligned} \quad (94)$$

Оказываются полезными и другие часто встречающиеся соотношения для γ -матриц в продольном подпространстве:

$$\gamma_{\parallel\mu} \gamma_\parallel^\mu = 2, \quad (95)$$

$$\gamma_{\parallel\mu} \gamma_\parallel^\nu \gamma_\parallel^\mu = 0, \quad (96)$$

$$\gamma_{\parallel\mu} \gamma_\parallel^\nu \gamma_\parallel^\rho \gamma_\parallel^\mu = 2\gamma_\parallel^\rho \gamma_\parallel^\nu, \quad (97)$$

$$\gamma_\parallel^\mu \gamma_\parallel^\nu \gamma_\parallel^\rho = \tilde{\Lambda}^{\mu\nu} \gamma_\parallel^\rho + \tilde{\Lambda}^{\nu\rho} \gamma_\parallel^\mu - \tilde{\Lambda}^{\mu\rho} \gamma_\parallel^\nu, \quad (98)$$

$$(\tilde{\varphi}\gamma)^\mu \Pi_\sigma = -\sigma \gamma_\parallel^\mu \gamma_5 \Pi_\sigma. \quad (99)$$

Легко показать, что свертка двух $\gamma_\parallel$ -матриц, между которыми находится любое нечетное число $\gamma_\parallel$ -матриц, обращается в нуль.

Отметим также следующее соотношение для γ -матриц в $\perp$ -подпространстве:

$$\gamma_\perp^\alpha \gamma_\perp^\beta \Pi_\sigma = -(\Lambda^{\alpha\beta} - i\sigma\varphi^{\alpha\beta})\Pi_\sigma. \quad (100)$$

Это свойство, так же как и свойство (98), позволяет эффективно снизить количество γ -матриц при вычислениях шпуров.

Отличительная особенность приведенной техники состоит в том, что она не только позволяет упростить вычисление шпуров, но и сохраняет ковариантность полученных таким способом выражений.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Матрица плотности заряженной частицы в импульсном пространстве

Чтобы получить матрицу плотности заряженной спинорной частицы в постоянном однородном магнитном поле, рассмотрим вспомогательный интеграл

$$\begin{aligned} I_{n,p_3,s}^{(+)}(x, x') &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \psi_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(x) \bar{\psi}_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(x') = \\ &= \frac{e^{-i[E_n(t-t') - p_3(z-z')]} }{2E_n L_y L_z} \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 e^{ip_2(y-y')} [U_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\eta) \bar{U}_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\eta')], \end{aligned} \quad (101)$$

где $\eta = \sqrt{eB} (x - \varrho p_2/eB)$ и $\eta' = \sqrt{eB} (x' - \varrho p_2/eB)$. Перейдем от интегрирования по переменной p_2 к интегрированию по η . Выделив трансляционно-неинвариантную

фазу $\Phi(x, x') = eB(x + x')(y - y')/2$, получим

$$I_{n,p_3,s}^{(+)}(x, x') = \frac{\sqrt{eB}}{2E_n L_y L_z} e^{i\varrho\Phi(x, x')} e^{-i[E_n(t-t') - p_3(z-z')]} \tilde{F}(\xi_1, \xi_2), \quad (102)$$

$$\tilde{F}(\xi_1, \xi_2) = e^{i\varrho\xi_1\xi_2/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-i\varrho\xi_2\eta} [U_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\eta) \bar{U}_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\eta - \xi_1)], \quad (103)$$

где $\xi_1 = \sqrt{eB}(x - x')$ и $\xi_2 = \sqrt{eB}(y - y')$. Прямое и обратное фурье-преобразования функции $\tilde{F}(\xi_1, \xi_2)$ удобно выбрать в виде

$$F(p_1, p_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\xi_1 d\xi_2 e^{-i(\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2)/\sqrt{eB}} \tilde{F}(\xi_1, \xi_2), \quad (104)$$

$$\tilde{F}(\xi_1, \xi_2) = \int \frac{dp_1 dp_2}{eB} e^{i(p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2)/\sqrt{eB}} F(p_1, p_2). \quad (105)$$

Запишем интеграл (102) через фурье-образ $F(p_1, p_2)$ функции $\tilde{F}(\xi_1, \xi_2)$:

$$I_{n,p_3,s}^{(+)}(x, x') = \frac{e^{i\varrho\Phi(x, x')}}{2E_n L_y L_z} \int \frac{dp_1 dp_2}{\sqrt{eB}} e^{-ip(x-x')} F(p_1, p_2). \quad (106)$$

В интеграле $I_{n,p_3,s}^{(+)}(x, x')$ образовался фазовый множитель $e^{-ip(x-x')}$, содержащий 4-вектор $p^\mu = (E_n, p_1, p_2, p_3)$, который может интерпретироваться как 4-импульс частицы. Сравнивая формулы (101) и (106), получим

$$\psi_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(x) \bar{\psi}_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(x') = \frac{e^{i\varrho\Phi(x, x')}}{2E_n L_y L_z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{\sqrt{eB}} e^{-ip(x-x')} F(p_1, p_2), \quad (107)$$

где подынтегральная функция $F(p_1, p_2)$ может быть представлена в виде

$$F(p_1, p_2) = e^{-2i\varrho p_1 p_2 / eB} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{\pi} e^{-2ip_1 \eta / \sqrt{eB}} [U_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\eta) \bar{U}_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(-\eta - 2\varrho p_2 / \sqrt{eB})]. \quad (108)$$

Вычислим $F(p_1, p_2)$ отдельно для каждой из поляризаций $s = \pm 1$, используя явный вид $U_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\eta)$ (см. выражения (15)–(18)):

$$\begin{aligned} F_{+\varrho}(p_1, p_2) &= F(p_1, p_2)|_{s=\varrho} = (-1)^n \frac{e^{-iab/2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-ia\eta} \times \\ &\times \{ [W_\varrho \bar{W}_\varrho] \chi_n(\eta) \chi_n(\eta + b) - [V_{-\varrho} \bar{V}_{-\varrho}] \chi_{n-1}(\eta) \chi_{n-1}(\eta + b) + \\ &+ [W_\varrho \bar{V}_{-\varrho}] \chi_n(\eta) \chi_{n-1}(\eta + b) - [V_{-\varrho} \bar{W}_\varrho] \chi_{n-1}(\eta) \chi_n(\eta + b) \}, \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} F_{-\varrho}(p_1, p_2) &= F(p_1, p_2)|_{s=-\varrho} = (-1)^n \frac{e^{-iab/2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-ia\eta} \times \\ &\times \{ [V_\varrho \bar{V}_\varrho] \chi_n(\eta) \chi_n(\eta + b) - [W_{-\varrho} \bar{W}_{-\varrho}] \chi_{n-1}(\eta) \chi_{n-1}(\eta + b) + \\ &+ [W_{-\varrho} \bar{V}_\varrho] \chi_{n-1}(\eta) \chi_n(\eta + b) - [V_\varrho \bar{W}_{-\varrho}] \chi_n(\eta) \chi_{n-1}(\eta + b) \}, \end{aligned} \quad (110)$$

где $a = 2p_1/\sqrt{eB}$, $b = 2\varrho p_2/\sqrt{eB}$ и использовано свойство $\chi_n(-\eta) = (-1)^n \chi_n(\eta)$. Интегралы (109) и (110) берутся аналитически с помощью известного интеграла [42]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x+a) H_n(x+b) dx = 2^n \sqrt{\pi} m! b^{n-m} L_m^{n-m}(-2ab), \quad (111)$$

где $n \geq m$ и $L_m^{n-m}(x)$ – обобщенный полином Лагерра:

$$L_n^k(x) = \frac{x^{-k} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+k} e^{-x}].$$

Используя формулу (111), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-i a \eta} \chi_n(\eta) \chi_m(\eta+b) = (-1)^{n-m} \sqrt{\frac{eB 2^{m-n} m!}{n!}} (b+ia)^{n-m} e^{(iab-c^2)/2} L_m^{n-m}(c^2), \quad (112)$$

где $c^2 = (a^2 + b^2)/2$. Отметим, что в выражения (109) и (110) функции $\chi_n(\eta)$ входят с индексами, различающимися не более чем на единицу. Приведем ниже требуемые интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-i a \eta} \chi_n(\eta) \chi_n(\eta+b) = e^{(iab-c^2)/2} \sqrt{eB} L_n(c^2), \quad (113)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-i a \eta} \chi_n(\eta) \chi_{n-1}(\eta+b) = e^{(iab-c^2)/2} \sqrt{eBn} \frac{ia+b}{\sqrt{2}c^2} [L_n(c^2) - L_{n-1}(c^2)], \quad (114)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-i a \eta} \chi_n(\eta+b) \chi_{n-1}(\eta) = e^{(iab-c^2)/2} \sqrt{eBn} \frac{ia-b}{\sqrt{2}c^2} [L_n(c^2) - L_{n-1}(c^2)], \quad (115)$$

где $L_n(x) \equiv L_n^0(x)$ – полином Лагерра, а также учтено свойство

$$L_{n-1}^1(x) = \frac{n}{x} [L_{n-1}(x) - L_n(x)].$$

После интегрирования по переменной η фурье-образ матрицы плотности определенной поляризации может быть представлен в виде

$$F_{+e}(p_1, p_2) = (-1)^n \frac{\sqrt{eB}}{\pi} e^{-u/2} \left\{ L_n(u) [W_e \bar{W}_e] - L_{n-1}(u) [V_{-e} \bar{V}_{-e}] + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{2eBn}} L_{n-1}^1(u) [-(ip_1 + \varrho p_2) [W_e \bar{V}_{-e}] + (ip_1 - \varrho p_2) [V_{-e} \bar{W}_e]] \right\}, \quad (116)$$

$$F_{-e}(p_1, p_2) = (-1)^n \frac{\sqrt{eB}}{\pi} e^{-u/2} \left\{ L_n(u) [V_e \bar{V}_e] - L_{n-1}(u) [W_{-e} \bar{W}_{-e}] + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{2eBn}} L_{n-1}^1(u) [-(ip_1 - \varrho p_2) [W_{-e} \bar{V}_e] + (ip_1 + \varrho p_2) [V_e \bar{W}_{-e}]] \right\}, \quad (117)$$

где $u = 2(p_1^2 + p_2^2)/eB$. Вычисление билинейных комбинаций биспиноров $W_{\pm e}$ и $V_{\pm e}$ с использованием их явного вида (17) и (18) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} W_{\pm e} \bar{W}_{\pm e} &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{m}{\sqrt{2eBn + m^2}} \right) (\hat{p}_{\parallel} + m) + \frac{2eBn}{\sqrt{2eBn + m^2}} \right] \Pi_{\pm e}, \\ V_{\pm e} \bar{V}_{\pm e} &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{m}{\sqrt{2eBn + m^2}} \right) (\hat{p}_{\parallel} + m) - \frac{2eBn}{\sqrt{2eBn + m^2}} \right] \Pi_{\pm e}, \\ \frac{2}{\sqrt{2eBn}} [- (ip_1 + ep_2) [W_e \bar{V}_{-e}] + (ip_1 - ep_2) [V_{-e} \bar{W}_e]] &= \hat{p}_{\perp} - i\varrho \frac{\hat{p}_{\parallel} (p\varphi\gamma)}{\sqrt{2eBn + m^2}}, \\ \frac{2}{\sqrt{2eBn}} [- (ip_1 - ep_2) [W_{-e} \bar{V}_e] + (ip_1 + ep_2) [V_e \bar{W}_{-e}]] &= \hat{p}_{\perp} + i\varrho \frac{\hat{p}_{\parallel} (p\varphi\gamma)}{\sqrt{2eBn + m^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя формулы (116) и (117) в (107) и сравнивая это выражение с определением (20), получим формулы (22) и (23) для матрицы плотности в импульсном пространстве.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вычисление интегралов по поперечным компонентам импульсов

При вычислении импульса (10) встречаются следующие типы интегралов по импульсам заряженных частиц в поперечном подпространстве:

$$S^{(n,m)}(z) = \int d^2x d^2y \delta^{(2)}(x + y - z) L_n(x^2) L_m(y^2) e^{-(x^2 + y^2)/2}, \quad (118)$$

$$V_{\alpha}^{(n,m)}(z) = \int d^2x d^2y \delta^{(2)}(x + y - z) x_{\alpha} L_{n-1}^1(x^2) L_m(y^2) e^{-(x^2 + y^2)/2}, \quad (119)$$

$$T_{\alpha\beta}^{(n,m)}(z) = \int d^2x d^2y \delta^{(2)}(x + y - z) x_{\alpha} y_{\beta} L_{n-1}^1(x^2) L_{m-1}^1(y^2) e^{-(x^2 + y^2)/2}, \quad (120)$$

где x, y и z – векторы в двумерном (поперечном) пространстве ($\alpha, \beta = 1, 2$), а $\delta^{(2)}(x + y - z) = \delta(x_1 + y_1 - z_1) \delta(x_2 + y_2 - z_2)$ – произведение δ -функций Дирака.

При использовании фурье-образа δ -функции

$$\delta^{(2)}(x + y - z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2s e^{is(x+y-z)},$$

где $sx = s_1x_1 + s_2x_2$ – скалярное произведение векторов в двумерном евклидовом пространстве, интегралы по x и y становятся независимым и принимают вид

$$f^{(n)}(s) = \int d^2x L_n(x^2) e^{i(sx) - x^2/2}, \quad (121)$$

$$f_{\alpha}^{(n)}(s) = \int d^2x x_{\alpha} L_{n-1}^1(x^2) e^{i(sx) - x^2/2}. \quad (122)$$

Векторный интеграл (122) пропорционален вектору s_{α} :

$$f_{\alpha}^{(n)}(s) = s_{\alpha} A^{(n)}(s^2),$$

а функция $A^{(n)}(s^2)$ находится из свертки $s_\alpha f_\alpha^{(n)}(s)$. Получившиеся скалярные интегралы $f^{(n)}(s)$ и $A^{(n)}(s^2)$ удобно вычислять в полярных координатах, отсчитывая полярный угол от вектора s . Воспользовавшись известными соотношениями [42]

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm i t \cos \varphi} \cos(n\varphi) d\varphi = (\pm i)^n 2\pi J_n(t), \quad (123)$$

$$\int_0^\infty t^{\lambda/2} e^{-ct/2} J_\lambda(b\sqrt{t}) L_n^\lambda(t) dt = (-1)^n 2b^\lambda c^{-\lambda-1} e^{-b^2/2c} L_n^\lambda\left(\frac{b^2}{c}\right), \quad (124)$$

где $J_n(t)$ – функция Бесселя первого рода, получим следующие выражения для интегралов (121) и (122):

$$f^{(n)}(s) = (-1)^n 2\pi e^{-s^2/2} L_n(s^2), \quad (125)$$

$$f_\alpha^{(n)}(s) = i(-1)^{n-1} 2\pi s_\alpha e^{-s^2/2} L_{n-1}^1(s^2). \quad (126)$$

В терминах функций $f^{(n)}(s)$ и $f_\alpha^{(n)}(s)$ интегралы (118)–(120) представляются в виде

$$S^{(n,m)}(z) = \int \frac{d^2s}{(2\pi)^2} e^{-i(sz)} f^{(n)}(s) f^{(m)}(s), \quad (127)$$

$$V_\alpha^{(n,m)}(z) = \int \frac{d^2s}{(2\pi)^2} e^{-i(sz)} f_\alpha^{(n)}(s) f^{(m)}(s), \quad (128)$$

$$T_{\alpha\beta}^{(n,m)}(z) = \int \frac{d^2s}{(2\pi)^2} e^{-i(sz)} f_\alpha^{(n)}(s) f_\beta^{(m)}(s). \quad (129)$$

Векторная и тензорная структуры интегралов $V_\alpha^{(n,m)}(z)$ и $T_{\alpha\beta}^{(n,m)}(z)$ очевидны:

$$V_\alpha^{(n,m)}(z) = B^{(n,m)} z_\alpha,$$

$$T_{\alpha\beta}^{(n,m)}(z) = C^{(n,m)} \delta_{\alpha\beta} + D^{(n,m)} z_\alpha z_\beta.$$

Скалярные интегралы $B^{(n,m)}$, $C^{(n,m)}$ и $D^{(n,m)}$ также удобно вычислять в полярных координатах, отсчитывая угол от вектора z . Используя соотношение (123) и формулу [42]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt t^{(\kappa+\lambda)/2} e^{-ct} J_{\kappa+\lambda}(b\sqrt{t}) L_p^\kappa(t) L_k^\lambda(t) = \\ = \frac{(-1)^{p+k}}{c} \left(\frac{b}{2c}\right)^{\kappa+\lambda} e^{-b^2/4} L_p^{\lambda+k-p}\left(\frac{b^2}{4c}\right) L_k^{\kappa+p-k}\left(\frac{b^2}{4c}\right), \end{aligned} \quad (130)$$

мы можем представить интегралы $S^{(n,m)}(z)$, $V_\alpha^{(n,m)}(z)$ и $T_{\alpha\beta}^{(n,m)}(z)$ в виде

$$S^{(n,m)}(z) = \pi e^{-z^2/4} L_n^{m-n}\left(\frac{z^2}{4}\right) L_m^{n-m}\left(\frac{z^2}{4}\right), \quad (131)$$

$$2V_\alpha^{(n,m)}(z) = \pi e^{-z^2/4} z_\alpha L_{n-1}^{m-n+1}\left(\frac{z^2}{4}\right) L_m^{n-m}\left(\frac{z^2}{4}\right), \quad (132)$$

$$\begin{aligned} 8T_{\alpha\beta}^{(n,m)}(z) = \pi e^{-z^2/4} \left[(2z_\alpha z_\beta - z^2 \Lambda_{\alpha\beta}) L_{n-1}^{m-n+1}\left(\frac{z^2}{4}\right) L_{m-1}^{n-m+1}\left(\frac{z^2}{4}\right) - \right. \\ \left. - 4n \Lambda_{\alpha\beta} L_n^{m-n}\left(\frac{z^2}{4}\right) L_{m-1}^{n-m}\left(\frac{z^2}{4}\right) \right]. \end{aligned} \quad (133)$$

В тензорном интеграле символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ заменен эквивалентным метрическим тензором $\Lambda_{\alpha\beta}$ двумерного поперечного евклидова подпространства.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю признательность И. С. Огневу за сотрудничество на начальном этапе работы. Авторы благодарны Н. В. Михееву и Д. А. Румянцеву за плодотворные обсуждения, а также А. В. Борисову и А. И. Студеникину за ценные замечания. Исследование проведено в рамках реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (госконтракт № П2323) при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по программе “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.1/13011) и РФФИ (грант № 11-02-00394-а).

Список литературы

- [1] Г. С. Бисноватый-Коган, *Астроном. ж.*, **47** (1970), 813–816.
- [2] N. V. Ardeljan, G. S. Bisnovaty-Kogan, S. G. Moiseenko, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **359**:1 (2005), 333–344, arXiv: astro-ph/0410234.
- [3] Н. Н. Чугай, *Письма в Астроном. ж.*, **10**:2 (1984), 210–213.
- [4] О. Ф. Дорофеев, В. Н. Родионов, И. М. Тернов, *Письма в ЖЭТФ*, **40**:4 (1984), 159–161.
- [5] О. Ф. Дорофеев, В. Н. Родионов, И. М. Тернов, *Письма в Астроном. ж.*, **11** (1985), 302–309.
- [6] Ю. М. Лоскутов, *Письма в ЖЭТФ*, **39**:9 (1984), 438–440; *ТМФ*, **65**:1 (1985), 141–150.
- [7] В. М. Захарцов, Ю. М. Лоскутов, *Вестник МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.*, **26**:2 (1985), 24–30.
- [8] А. И. Студеникин, *Астрофизика*, **28**:3 (1988), 638–647.
- [9] Ю. М. Лоскутов, Ю. М. Парфенов, *Вестник МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.*, **30** (1989), 3–7.
- [10] А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, *Письма в ЖЭТФ*, **69**:5 (1999), 337–342.
- [11] А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, *ЖЭТФ*, **121**:6 (2002), 1219–1234.
- [12] S. Mereghetti, *Astron. Astrophys. Rev.*, **15**:4 (2008), 225–287.
- [13] R. C. Duncan, C. Thompson, *Astrophys. J.*, **392**:1 (1992), L9–L13.
- [14] C. Thompson, R. C. Duncan, *Astrophys. J.*, **408**:1 (1993), 194–217.
- [15] C. Thompson, R. C. Duncan, *Astrophys. J.*, **473**:1 (1996), 322–342.
- [16] C. Thompson, R. C. Duncan, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **275**:2 (1995), 255–300.
- [17] А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, Е. В. Осокина, *Письма в Астроном. ж.*, **37**:5 (2011), 365–376, arXiv: 1105.4080.
- [18] H. A. Bethe, *Rev. Mod. Phys.*, **62**:4 (1990), 801–866.
- [19] N. Itoh, H. Hayashi, A. Nishikawa, Y. Kohyama, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **102** (1996), 411–424.
- [20] Л. И. Коровина, *Известия вузов. Физика*, **6** (1964), 86–92.
- [21] И. М. Тернов, Б. А. Лысов, Л. И. Коровина, *Вестник МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.*, **6**:5 (1965), 58–63.
- [22] J. J. Matese, R. F. O’Connell, *Phys. Rev.*, **180**:5 (1969), 1289–1292.
- [23] L. Fassio-Canuto, *Phys. Rev.*, **187**:5 (1969), 2141–2146.
- [24] S. Shinkevich, A. Studenikin, *Pramana*, **65**:2 (2005), 215–244, arXiv: hep-ph/0402154.
- [25] А. И. Студеникин, *ЯФ*, **49** (1989), 1665–1671.
- [26] D. G. Yakovlev, A. D. Kaminker, O. Y. Gnedin, P. Haensel, *Phys. Rept.*, **354**:1–2 (2001), 1–155, arXiv: astro-ph/0012122.
- [27] K. Bhattacharya, P. B. Pal, *Proc. Ind. Natl. Sci. Acad.*, **70** (2004), 145–161, arXiv: hep-ph/0212118.

- [28] A. V. Kuznetsov, N. V. Mikheev, *Electroweak Processes in External Electromagnetic Fields*, Springer Tracts in Modern Physics, **197**, Springer, New York, 2004.
- [29] E. Storck, *Z. Natur. Forsch.*, **23** (1968), 1914–1928.
- [30] М. С. Андреев, Н. В. Михеев, Е. Н. Нарынская, *ЖЭТФ*, **137**:2 (2010), 259–267.
- [31] А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон*, Наука, М., 1974.
- [32] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*, Наука, М., 1977.
- [33] K. Nakamura et. al. (Particle Data Group), *J. Phys. G*, **37**:7A (2010), 075021, 1422 pp.
- [34] G. G. Raffelt, *Stars as Laboratories for Fundamental Physics*, Univ. Chicago Press, Chicago, 1996.
- [35] J. D. Landstreet, *Phys. Rev.*, **153**:5 (1967), 1372–1377.
- [36] V. G. Bezchastnov, P. Haensel, A. D. Kaminker, D. G. Yakovlev, *Astron. Astrophys.*, **328** (1997), 409–418.
- [37] А. Д. Каминкер, Д. Г. Яковлев, *ТМФ*, **49**:2 (1981), 248–260.
- [38] A. D. Kaminker, O. Yu. Gnedin, D. G. Yakovlev, *Phys. Rev. D*, **46**:10 (1992), 4133–4139.
- [39] А. Д. Каминкер, Д. Г. Яковлев, *ЖЭТФ*, **2** (1993), 438–454.
- [40] В. В. Скобелев, *Известия вузов. Физика*, **10** (1975), 142–143.
- [41] Yu. M. Loskutov, V. V. Skobelev, *Phys. Lett. A*, **56**:3 (1976), 151–152.
- [42] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды, т. 2: Специальные функции*, Физматлит, М., 2003.

Поступила в редакцию 6.05.2011