Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Мухамедов, У. А. Розиков, Об одной полиномиальной p -адической динамической системе, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 3, 448–456

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:46:59

© 2012 г.

Ф. М. Мухамедов*, У. А. Розиков†

ОБ ОДНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ p -АДИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Полностью описаны диски Зигеля и аттракторы для p -адической динамической системы $f(x) = x^{2n+1} + ax^{n+1}$ на множестве комплексных p -адических чисел.

Ключевые слова: полиномиальная динамическая система, аттрактор, диск Зигеля, p -адические числа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Впервые p -адические числа были введены немецким математиком Гензелем, и после своего открытия они рассматривались как чисто математический объект исследования. Начиная с 1980-х гг. активно изучаются различные модели, описанные на языке p -адического анализа. Точнее говоря, модели над полем p -адических чисел рассматривались потому, что предположительно эти числа дают более точное и адекватное описание микромира. Были предложены различные применения таких чисел к задачам теоретической физики [1]–[5], к квантовой механике [6] и многим другим областям физики [7], [8].

Исследования в области p -адической квантовой физики стимулировали изучение p -адических динамических систем (см., например, статьи [9]–[12]). Некоторые шаги в этом направлении [9] показывают, что даже простые (мономиальные) дискретные динамические системы над полем p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ имеют вполне комплексное поведение, которое существенно зависит от значения простого числа p . С изменением p аттракторы отображаются в диски Зигеля и обратно. Число циклов и их длины также зависят от p [13]. Эргодические свойства таких динамических систем рассмотрены в работе [14].

Применения p -адических динамических систем к некоторым биологическим и физическим системам рассмотрены в работах [10], [11], [15], [16]. Основы p -адического анализа и p -адической математической физики даны в монографиях [7], [17].

Известно, что аналитические функции играют важную роль в комплексном анализе, в p -адическом анализе аналогичную роль играют рациональные функции [18], [19].

*International Islamic University Malaysia, Kuatan, Malaysia. E-mail: far75m@rambler.ru

†Институт математики и информационных технологий НАН Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

В связи с этим естественным образом возникает задача изучения динамики рациональных функций в p -адическом анализе. С другой стороны, p -адические динамические системы используются при изучении p -адических мер Гиббса [20]–[22]. В работах [23]–[25] изучены множества Жюлиа и Фату для рациональных p -адических динамических систем, а также доказан аналог теоремы Сулливана [26] для таких динамических систем. Эти исследования стимулировали изучение компонент множества Фату для полиномиальных динамических систем, включая аттракторы и диски Зигеля [24], [25], [27].

В настоящей работе мы изучаем диски Зигеля и аттракторы для p -адической динамической системы вида $f(x) = x^{2n+1} + ax^{n+1}$ в $\mathbb{C}_p$. Заметим, что наше исследование существенным образом основано на p -адическом анализе.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. p -Ади́ческие числа. Здесь и далее p – фиксированное простое число.

Пусть $\mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел, которое является пополнением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по p -адической норме, определенной на $\mathbb{Q}$ следующим образом. Каждое рациональное число $x \neq 0$ можно записать в виде $x = p^r(n/m)$, где числа n и m не делятся на p . Тогда p -адическая норма числа x равна $|x|_p = p^{-r}$. Эта норма удовлетворяет сильному неравенству треугольника $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, которое показывает неархимедовость нормы. Из него вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{если } |x|_p \neq |y|_p, & \quad \text{то } |x - y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}, \\ \text{если } |x|_p = |y|_p, & \quad \text{то } |x - y|_p \leq |x|_p. \end{aligned} \quad (1)$$

Поле $\mathbb{Q}_p$ не является алгебраически полным, через $\mathbb{Q}_p^a$ обозначается его алгебраическое замыкание. В силу теоремы Крулла [28] норма в $\mathbb{Q}_p$ имеет единственное продолжение на $\mathbb{Q}_p^a$, которое также является неархимедовым. Вкратце напомним процедуру продолжения нормы. Достаточно продолжить норму на одноточечное алгебраическое замыкание. Пусть z – алгебраическое число над полем $\mathbb{Q}_p$. Рассмотрим $\mathbb{Q}_p(z)$ – минимальное поле, содержащее число z и $\mathbb{Q}_p$. Тогда $\mathbb{Q}_p(z)$ можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$. В силу алгебраичности числа z размерность $\mathbb{Q}_p(z)$ будет конечной. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ обозначим базис в $\mathbb{Q}_p(z)$. Каждый элемент $x \in \mathbb{Q}_p(z)$ представляется в виде $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$. Определим норму элемента x следующим образом:

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|_p.$$

Положим $M = \max_{i,j} \|e_i e_j\|_1$ и определим новую норму $\|x\| = M\|x\|_1$. Продолжение этой нормы на $\mathbb{Q}_p^a$ определяется как

$$|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|},$$

для удобства мы будем обозначать продолженную норму тоже через $|\cdot|_p$. Заметим, что поле $\mathbb{Q}_p^a$ не является полным относительно этой нормы, но пополнение поля $\mathbb{Q}_p^a$ является алгебраически полным [28]. Это пополнение обозначается как $\mathbb{C}_p$ и называется *полем комплексных p -адических чисел*.

Для любых $a \in \mathbb{C}_p$ и $r > 0$ положим

$$\begin{aligned} U_r(a) &= \{x \in \mathbb{C}_p : |x - a|_p \leq r\}, \\ V_r(a) &= \{x \in \mathbb{C}_p : |x - a|_p < r\}, \\ S_r(a) &= \{x \in \mathbb{C}_p : |x - a|_p = r\}. \end{aligned}$$

Доказательство следующих лемм можно найти в [9], [28].

ЛЕММА 1. Если $a \in S_1(0)$, то $S_1(0) \setminus V_1(a) \subset S_1(a)$.

ЛЕММА 2. Пусть $C_n^k = n! / k! (n - k)!$, $k \leq n$. Тогда $|C_n^k|_p \leq 1$.

Для $m \in \mathbb{N}$ введем обозначения

$$\Gamma^{(m)} = \{x \in \mathbb{C}_p : x^m = 1\}, \quad \Gamma = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Gamma^{(m)}, \quad \Gamma_m = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma^{(m^j)}, \quad \Gamma_u = \bigcup_{m: (m,p)=1}^{\infty} \Gamma_m,$$

а через $\theta_{j,k}$, $j = \overline{1, k}$, обозначим k -й корень из единицы, причем $\theta_{1,k} = 1$. Здесь и далее $(\cdot, \cdot)$ есть наибольший общий делитель, таким образом, равенство $(m, p) = 1$ означает, что числа m и p взаимно простые.

ЛЕММА 3. Справедливы следующие утверждения.

1. Пусть $y^n = a$, где $a = \theta_{j,n-1}$ для некоторого $j = \overline{1, n-1}$ и $y \neq a$. Если $(n, p) = 1$, то $y \in S_1(a)$.
2. Имеет место включение $\Gamma_u \subset S_1(1)$.
3. Для любого $j = \overline{1, p^k - 1}$ имеет место неравенство $|C_{p^k}^j|_p \leq 1/p$.
4. Имеет место включение $\Gamma_p \subset V_1(1)$.

Функция $f: V_r(a) \rightarrow \mathbb{C}_p$ называется *аналитической*, если ее можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x - a)^n, \quad f_n \in \mathbb{C}_p,$$

где сходимость понимается в смысле нормы на шаре $V_r(a)$. Более подробное изложение теории аналитических функций можно найти в монографии [29].

2.2. Динамические системы в $\mathbb{C}_p$. Напомним [27], [29] некоторые известные факты, относящиеся к динамической системе (f, U) на $\mathbb{C}_p$, где $f: x \in U \rightarrow f(x) \in U$ — аналитическая функция и $U = V_r(a)$ или $U = \mathbb{C}_p$.

Пусть $f: U \rightarrow U$ — аналитическая функция. Положим

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n(x), \quad x \in U.$$

Если $f(x_0) = x_0$, то x_0 называется *неподвижной точкой* функции f . Неподвижная точка x_0 называется *притягивающей*, если существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x_0$ для всех $y \in V(x_0)$. Если x_0 — притягивающая точка, то *притягивающим бассейном* называется множество

$$A(x_0) = \left\{ x \in \mathbb{C}_p : f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \right\}.$$

Неподвижная точка x_0 называется *отталкивающей*, если существует окрестность $V(x_0)$ этой точки такая, что $|f(x) - x_0|_p > |x - x_0|_p$ для $x \in V(x_0)$, $x \neq x_0$. Пусть x_0 – неподвижная точка функции $f(x)$. Говорят, что шар $V_r(x_0)$ (лежащий в U) является *дискком Зигеля*, если каждая сфера $S_\rho(x_0)$, $\rho < r$, есть инвариантная сфера относительно $f(x)$, т. е. если $x \in S_\rho(x_0)$, то все итерации этой точки находятся в той же самой сфере, $f^n(x) \in S_\rho(x_0)$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Объединение всех дисков Зигеля с центром в точке x_0 называется *максимальным диском Зигеля* и обозначается как $SI(x_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 [9]. В комплексной геометрии центр диска однозначно определяется диском, и различные неподвижные точки не могут иметь один и тот же диск Зигеля. В неархимедовом случае центр диска – это любая точка, принадлежащая этому диску, поэтому различным неподвижным точкам, вообще говоря, может соответствовать один и тот же диск Зигеля, что отличает неархимедов случай от обычного.

Пусть x_0 – неподвижная точка аналитической функции $f(x)$ и $\lambda = df(x_0)/dx$. Точка x_0 является притягивающей, если $0 \leq |\lambda|_p < 1$; седловой, если $|\lambda|_p = 1$; отталкивающей, если $|\lambda|_p > 1$.

ТЕОРЕМА 1 [9]. Пусть x_0 является неподвижной точкой аналитической функции $f: U \rightarrow U$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если x_0 – притягивающая точка функции f , то она является притягивающей точкой динамической системы (f, U) . Если число $r > 0$ удовлетворяет неравенству

$$q = \max_{1 \leq n < \infty} \left| \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \right|_p r^{n-1} < 1 \quad (2)$$

и $U_r(x_0) \subset U$, то $U_r(x_0) \subset A(x_0)$.

2. Если x_0 – седловая точка функции f , то она является центром диска Зигеля. Если число $r > 0$ удовлетворяет неравенству

$$s = \max_{2 \leq n < \infty} \left| \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \right|_p r^{n-1} < 1 \quad (3)$$

и $U_r(x_0) \subset U$, то $U_r(x_0) \subset SI(x_0)$;

3. Если x_0 – отталкивающая точка функции f , то она является отталкивающей точкой динамической системы (f, U) .

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА $F(X) = X^{2N+1} + AX^{N+1}$

В этом разделе мы рассмотрим аналитическую функцию $f: \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$, заданную формулой

$$f(x) = x^{2n+1} + ax^{n+1}, \quad |a|_p < 1, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Далее будем предполагать, что $p \geq 3$. Используя теорему 1, докажем некоторые свойства динамической системы (4).

Заметим, что неподвижными точками функции (4) являются точки $\{x_j\}_{j=\overline{1, 2n}}$, где

$$x_j^n = \begin{cases} c_+, & j = \overline{1, n}, \\ c_-, & j = \overline{n+1, 2n}, \end{cases} \quad c_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}. \quad (5)$$

Далее через c будем обозначать либо c_- , либо c_+ .

ЛЕММА 4. При $|a|_p < 1$ справедливо равенство $|c|_p = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $p \geq 3$, имеем $|4|_p = 1$, откуда в силу первого свойства нормы $|\cdot|_p$ в (1) получим искомое равенство.

Из леммы 4 в качестве следствия получим следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Имеет место включение $\{x_j\}_{j=1}^{2n} \subset S_1(0)$.

ЛЕММА 6. Пусть $(2n+1, p) = 1$. Если $f(y) = x_j$ для некоторого $j = \overline{1, 2n}$ и $y \neq x_j$, то $y \in S_1(x_j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $y \in V_1(x_j)$, тогда $y = x_j + \gamma$, где $|\gamma|_p < 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= |y^{2n+1} + ay^{n+1} - x_j^{2n+1} - ax_j^{n+1}|_p = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{2n+1} C_{2n+1}^k \gamma^k x_j^{2n+1-k} + a \sum_{l=0}^{n+1} C_{n+1}^l \gamma^l x_j^{n+1-l} \right|_p = |\gamma|_p \cdot |(2n+1)x_j^{2n} + \Delta_1|_p = |\gamma|_p, \end{aligned}$$

где $|\Delta_1|_p < 1$ и мы использовали условие $(2n+1, p) = 1$. Отсюда следует, что $y \notin V_1(x_j)$, поэтому $|y|_p \geq 1$. Таким образом, $|y|_p^{2n+1} > |a|_p |y|_p^{n+1}$, ибо $|a|_p < 1$. Из равенств $|f(y)|_p = |x_j|_p = 1$ находим, что $|y|_p = 1$, следовательно, $y \in S_1(0) \setminus V_1(x_j)$. В силу леммы 1 имеем $y \in S_1(x_j)$.

ТЕОРЕМА 2. Справедливы следующие утверждения.

1. Если $(2n+1, p) = 1$, то x_j – центр диска Зигеля и $SI(x_j) = V_1(x_j)$.
2. Пусть $n = p^l$, $l = 1, 2, \dots$, тогда $SI(x_j) = V_1(c^{1/n})$ для любого $j = \overline{1, n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Заметим, что

$$|f'(x_j)|_p = |x_j^n|_p \cdot |(2n+1)x_j^n + a(n+1)|_p = 1$$

и

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_j) \right|_p &= \left| \frac{(2n+1)!}{m! (2n+1-m)!} x_j^{2n-m} + \frac{(n+1)!}{(n+1-m)! m!} x_j^{n-m} \right|_p \leq \\ &\leq \max\{|C_{2n+1}^m|_p, |C_{n+1}^m|_p\} \leq 1. \end{aligned}$$

Проверим выполнение условия (2) теоремы 1:

$$q = \max_{1 \leq m < \infty} \left| \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_j) \right|_p r^{m-1} \leq r^{m-1} \max\{|C_{2n+1}^m|_p, |C_{n+1}^m|_p\} \leq 1.$$

Это неравенство выполняется, если $r < 1$. Таким образом, в силу теоремы 1 неподвижная точка x_j является центром диска Зигеля. Следовательно, $V_r(x_j) \subset SI(x_j)$. Докажем, что $f(S_1(x_j)) \neq S_1(x_j)$ для всех j . Пусть y таково, что $f(y) = x_j$, тогда $y \in S_1(x_j)$ в силу леммы 6. Кроме того, $x_j \notin S_1(x_j)$. Следовательно, $f(y) \notin S_1(x_j)$. Первое утверждение теоремы доказано.

2. Пусть $x_i^n = c$, другими словами, $x_i^{p^l} = c$. Тогда $(x_i/c^{1/n})^n = 1$, т. е. $x_i/c^{1/n} \in \Gamma_p$. В силу леммы 3 имеем $\Gamma_p \subset V_1(1)$. Следовательно, $x_i \in V_1(c^{1/n})$, так как $|c^{1/n}|_p = 1$. Ясно, что $x_i \in V_1(x_i)$. Отсюда $V_1(x_i) = V_1(c^{1/n})$. В силу первого утверждения теоремы $SI(x_i) = V_1(c^{1/n})$ для всех $i = \overline{1, n}$. Теорема доказана.

ЛЕММА 7. Если $x^n = c$, $y^n = c$ и $x \neq y$, $(p, n) = 1$, то $|x - y|_p = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $|x - y|_p < 1$, тогда $x = y + \gamma$, $|\gamma|_p < 1$. Используя соотношения $|c|_p = |y|_p = 1$ и $|\sum_{k=2}^n C_n^k \gamma^{k-1} y^{n-k}|_p < 1$, получим

$$0 = |x^n - y^n|_p = \left| \sum_{k=1}^n C_n^k \gamma^k y^{n-k} \right|_p = |\gamma|_p \cdot \left| ny^{n-1} + \sum_{k=2}^n C_n^k \gamma^{k-1} y^{n-k} \right|_p = |\gamma|_p.$$

Следовательно, $x = y$, что противоречит условию леммы.

ЛЕММА 8. Пусть $(2n + 1, p) = 1$ и $(n, p) = 1$. Тогда $x_i \in S_1(c^{1/n})$ и $SI(x_i) \cap SI(x_j) = \emptyset$ при $i \neq j$ для всех $i, j = \overline{1, n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $x_i^n = c$, мы имеем $x_i/c^{1/n} \in \Gamma_u$. Из леммы 3 следует, что $x_i/c^{1/n} \in S_1(1)$. Отсюда $x_i \in S_1(c^{1/n})$, поскольку $|c^{1/n}|_p = 1$. По теореме 2 $SI(x_i) = V_1(x_i)$. Пусть $x_i \neq x_j$ и $y \in V_1(x_i)$, т. е. $|y - x_i|_p < 1$. Тогда в силу леммы 7 $|y - x_j|_p = 1$, следовательно, $y \notin V_1(x_j)$. Таким образом, $SI(x_i) \cap SI(x_j) = \emptyset$ при $i \neq j$.

ЛЕММА 9. Пусть $(n, p) \neq 1$, $n = p^k m$, $(m, p) = 1$ и

$$c_{ij} = \xi_i \eta_j, \quad \xi_i \in \Gamma^{(m)}, \quad \eta_j^{p^k} = c, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad j = \overline{0, p^k-1}.$$

Тогда

$$SI(c_{ij}) = V_1(c_{ij}) = SI(c_{il}), \quad j \neq l, \quad (6)$$

$$SI(c_{ij}) \cap SI(c_{kl}) = \emptyset, \quad k \neq l. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем соотношение (6). Легко видеть, что $(2n + 1, p) = 1$. Отсюда в силу теоремы 2 имеем $SI(c_{ij}) = V_1(c_{ij})$. Из условия леммы следует, что $\eta_i \in V_1(c^{1/p^k})$, откуда $\xi_i \eta_j \in V_1(\xi_i c^{1/p^k})$. С другой стороны, $c_{ij} = \xi_i \eta_j \in V_1(c_{ij})$ и, следовательно, $V_1(c_{ij}) = V_1(\xi_i c^{1/p^k})$ для любого $j = \overline{1, p^k-1}$.

Докажем соотношение (7). В силу условия леммы $\xi_i \in \Gamma_u$, отсюда, пользуясь леммой 3, получим $\xi_i \in S_1(1)$. Заметим, что $|\xi_i - \xi_j|_p = 1$ при $i \neq j$ (см. лемму 7). Пусть $y \in V_1(c_{ij})$, тогда

$$|y - c_{ik}|_p = |y - c_{ik} + \eta_k(\xi_i - \xi_j)|_p = 1.$$

Это означает, что $y \notin V_1(c_{jk})$. Таким образом, с учетом (6) мы получаем (7).

ЛЕММА 10. Если $(2n + 1, p) \neq 1$, $k \geq 1$, то неподвижные точки являются притягивающими, и $V_1(x_j) \subset A(x_j)$ для любого $j = \overline{1, 2n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $2n + 1 = p^k m$, $k \geq 1$, причем $(m, p) = 1$. Тогда $|f'(x_j)|_p < 1$. Следовательно, каждая неподвижная точка является притягивающей. Чтобы определить притягивающий бассейн, мы используем условие (2) теоремы 1, которое в данном случае имеет вид

$$q = \max_{1 \leq n < \infty} \{|C_{2n+1}^m|_p, |C_{n+1}^m|_p\} r^{n-1} < 1.$$

Если $r < 1$, то это условие выполнено. Таким образом, $V_1(x_j) \subset A(x_j)$.

ЛЕММА 11. Если $(2n+1, p) \neq 1$, то

$$\bigcup_{\xi \in \Gamma_m} V_1(x_i \xi) \subset A(x_i). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $2n+1 = p^k m$, $(m, p) = 1$. Рассмотрим $\xi \in \Gamma_{m^k}$ и $y \in V_1(x_i \xi)$. Тогда $y = x_i \xi + \gamma$ и $|\gamma|_p < 1$. Заметим, что

$$f^k(x + \gamma) = f(f^{k-1}(x + \gamma)) = (x + \gamma)^{(2n+1)^k} + \Delta_\gamma.$$

Из неравенства $|a|_p < 1$ следует, что если $|y|_p = 1$, то $|f^k(y)|_p = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, $f^k(y) - (x_i \xi + \gamma)^{(2n+1)^k} = \Delta_\gamma$ влечет $|\Delta_\gamma|_p < 1$ для любого $|\gamma|_p < 1$. Теперь рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(y) - x_i|_p &= |f^{(k)}(y) - f^{(k)}(x_i)|_p = |(x_i \xi + \gamma)^{(2n+1)^k} + \Delta_\gamma - x_i^{(2n+1)^k} - \Delta_0|_p = \\ &= \left| \gamma \sum_{l=1}^{(2n+1)^k} C_{(2n+1)^k}^l \gamma^{l-1} (x_i \xi)^{(2n+1)^{k-l}} + \Delta_\gamma - \Delta_0 \right|_p < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $f^k(y) \in V_1(x_i) \subset A(x_i)$. Откуда $V_1(x_i \xi) \subset A(x_i)$, и включение (8) доказано.

ЛЕММА 12. Если $x^n = c_+$, $y^n = c_-$, то $|x - y|_p = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $c_\pm$ (см. формулу (5)) мы получаем равенство $|c_+ - c_-|_p = |\sqrt{a^2 + 4}|_p = 1$. Следовательно,

$$1 = |x^n - y^n| = |x - y|_p \left| \sum_{k=1}^{n-1} x^k y^{n-k} \right|_p \leq |x - y|_p \leq 1.$$

Отсюда $|x - y|_p = 1$. Здесь мы использовали, что $|x|_p = |y|_p = |c_\pm|_p = 1$.

ЛЕММА 13. Пусть $p \geq 3$, $(2n+1, p) = 1$ и $(n, p) = 1$, тогда $SI(x_i) \cap SI(x_{n+j}) = \emptyset$ при всех $i, j = \overline{1, n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 8, но здесь используется лемма 12 вместо леммы 7.

Объединив полученные результаты, сформулируем итоговую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Справедливы следующие утверждения.

1. Если $(2n+1, p) = 1$, то x_j – центр диска Зигеля и $SI(x_j) = V_1(x_j)$, $j = \overline{1, 2n}$.
2. Пусть $n = p^l$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда

$$SI(x_j) = \begin{cases} V_1(c_+^{1/n}), & j = \overline{1, n}, \\ V_1(c_-^{1/n}), & j = \overline{n+1, 2n}. \end{cases}$$

3. Пусть $(2n+1, p) = 1$ и $(n, p) = 1$. Тогда

$$x_j \in \begin{cases} S_1(c_+^{1/n}), & j = \overline{1, n}, \\ S_1(c_-^{1/n}), & j = \overline{n+1, 2n}. \end{cases}$$

Более того, $SI(x_i) \cap SI(x_j) = \emptyset$ при $i \neq j$ для любых $i, j = \overline{1, 2n}$.

4. Пусть $(n, p) \neq 1$, $n = p^k m$, $(m, p) = 1$ и $c_{ij} = \xi_i \eta_j$, где $\xi_i \in \Gamma^{(m)}$, $\eta_j^{p^k} = c$, $i = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{0, p^k-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} SI(c_{ij}) &= V_1(c_{ij}) = SI(c_{il}), & l \neq j, \\ SI(c_{ij}) \cap SI(c_{kl}) &= \emptyset, & k \neq i. \end{aligned}$$

5. Если $(2n+1, p) \neq 1$, то

$$\bigcup_{\xi \in \Gamma_m} V_1(x_i \xi) \subset A(x_i).$$

Благодарности. Авторы признательны профессору И. В. Воловичу и профессору А. Ю. Хренникову за внимание, полезные советы и замечания. Работа была написана при содействии Abdus Salam International Center for Theoretical Physics (Trieste, Italy), International Mathematical Union – Center for Development Exchange. Ф. М. Мухамедов также благодарит Malaysian Ministry of Higher Education (грант FRGS0409-109).

Список литературы

- [1] I. Ya. Aref'eva, B. Dragovich, P. H. Frampton, I. V. Volovich, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:24 (1991), 4341–4358.
- [2] P. G. O. Freund, E. Witten, *Phys. Lett. B*, **199**:2 (1987), 191–194.
- [3] E. Marinary, G. Parisi, *Phys. Lett. B*, **203**:1–2 (1988), 52–54.
- [4] I. V. Volovich, *P-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **2**:1, 77–87.
- [5] I. V. Volovich, *Classical Quantum Gravity*, **4**:4 (1987), L83–L87.
- [6] A. Yu. Khrennikov, *J. Math. Phys.*, **32**:4 (1991), 932–937.
- [7] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, Series on Soviet and East European Mathematics, **10**, World Scientific, River Edge, NJ, 1994.
- [8] A. Yu. Khrennikov, *p-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics*, Mathematics and its Applications, **309**, Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [9] С. А. Альбеверио, Б. Тироцци, А. Ю. Хренников, С. де Шмедт, *ТМФ*, **114**:3 (1998), 349–365.
- [10] S. Albeverio, A. Khrennikov, P. E. Kloeden, *Biosystems*, **49**:2 (1999), 105–115.
- [11] D. Dubischar, V. M. Gundlach, A. Khrennikov, O. Steinkamp, *Physica D*, **130**:1–2 (1999), 1–12.
- [12] E. Thiran, D. Versteegen, J. Weyers, *J. Statist. Phys.*, **54**:3–4 (1989), 893–913.
- [13] A. Khrennikov, M. Nilsson, *J. Number Theory*, **90**:2 (2001), 255–264.
- [14] M. Gundlach, A. Khrennikov, K.-O. Lindahl, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **4**:4 (2001), 569–577.
- [15] A. Khrennikov, *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*, Mathematics and its Applications, **427**, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [16] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, V. A. Osipov, *J. Phys. A*, **35**:2 (2002), 177–189.
- [17] Н. Коблиц, *p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции*, Современная математика. Вводные курсы, Мир, М., 1983.
- [18] A. M. Robert, *A Course of p-Adic Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, **198**, Springer, New York, 2000.

- [19] A. Escassut, *Analytic Elements in p -Adic Analysis*, World Scientific, River Edge, NJ, 1995.
- [20] Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухамедов, У. А. Розиков, *ТМФ*, **130**:3 (2002), 500–507.
- [21] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *Indag. Math.*, **15**:1 (2004), 85–99.
- [22] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **8**:2 (2005), 277–290.
- [23] R. L. Benedetto, *Compos. Math.*, **122**:3 (2000), 281–298.
- [24] R. L. Benedetto, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **21**:1 (2001), 1–11.
- [25] R. L. Benedetto, *Proc. London Math. Soc.*, **84**:1 (2002), 231–256.
- [26] D. Sullivan, *Ann. Math.*, **122**:2 (1985), 401–418.
- [27] L. Carleson, T. W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Universitext: Tracts in Mathematics, Springer, New York, 1993.
- [28] W. Schikhof, *Ultrametric calculus*, v. 4, Cambridge Studies in Adv. Math., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [29] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*, Springer, New York, 1992.

Поступила в редакцию 1.05.2011