Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Веденяпин, М. А. Негматов, О выводе и классификации уравнений типа уравнения Власова и магнитной гидродинамики. Тожество Лагранжа и форма Годунова, *ТМФ*, 2012, том 170, номер 3, 468–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:58:12

© 2012 г.

В. В. Веденяпин*, М. А. Негматов*

О ВЫВОДЕ И КЛАССИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА И МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ. ТОЖДЕСТВО ЛАГРАНЖА И ФОРМА ГОДУНОВА

Описывается вывод уравнений Власова–Максвелла из лагранжиана классической электродинамики, из которых, в свою очередь, выводятся уравнения типа электромагнитной гидродинамики. Рассматриваются релятивистский и нерелятивистский случаи: с температурой, равной нулю, как точное следствие уравнений Власова–Максвелла, и с не равной нулю температурой, как нулевое приближение метода Максвелла–Чемпена–Энскога. Получены и сравниваются друг с другом тождество Лагранжа и его обобщения в этих случаях.

Ключевые слова: уравнения Власова, уравнения магнитной гидродинамики, тождество Лагранжа, кинетические уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Власова–Максвелла является основным уравнением, используемым при описании плазмы. Написанное Власовым [1] в 1938 г., оно все больше используется вместо уравнений магнитной гидродинамики (МГД) в расчетах сложных плазменных задач в связи с ростом мощностей компьютеров (этот переход замечен за рубежом, а особенно сильно в США). Но это не главное. Главное, видимо, в том, что оно обладает “повышенной фундаментальностью”. Уравнения типа уравнения Власова (это понятие объяснено в начале раздела 2) содержат в себе решения задачи N тел для любого N . Это свойство и делает его сверхфундаментальным и отмечалось многими авторами. Оно было известно и самому А. А. Власову, а Н. Н. Боголюбов в предисловии к книге [2] отмечает: “Уравнение Власова является фундаментом физики плазмы. Нам представляется весьма существенным, что уравнение Власова имеет микроскопические решения, соответствующие точным решениям классической механики”. Это свойство используется и при выводе уравнения Власова–Максвелла из цепочки Боголюбова [3], и при аппроксимации с помощью этих микроскопических решений [4] (в виде суммы дельта-функций, см. начало раздела 2). Однако пока неясно, возможно ли воспользоваться при выводе уравнения

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
E-mail: vicveden@yahoo.com, maliknegmatov@gmail.com

Власова–Максвелла аппроксимациями. Оно, конечно, обладает такими микроскопическими решениями, но их, видимо, никто не выписывал, так как соответствующий потенциал – это потенциал с запаздыванием Лиенара–Вихерта [5]. Желательно вывести это уравнение из точного лагранжиана, чтобы обойти микроскопические решения и понять характер приближений, а также влияние релятивистских выражений. Уравнения пишут по-разному в разных работах, поэтому точный вывод весьма желателен. Мы выполняем его из лагранжиана Лоренца классической электродинамики [5] и следуем [6].

Для уравнений типа уравнений МГД количество версий еще больше, чем для уравнений типа уравнения Власова. С помощью точной подстановки мы выводим некоторые версии уравнений типа уравнений электромагнитной гидродинамики¹⁾ (ЭМГД) из уравнения Власова–Максвелла и автоматически получаем для них тождество Лагранжа.

Знаменитое тождество Лагранжа удобно использовать здесь как тест для сравнения различных форм уравнений. В работе [8] тождество доказывается для уравнений типа уравнения Власова с двухчастичным взаимодействием, а мы исследуем его форму для различных видов уравнения Власова и МГД.

Структура работы следующая. Вывод уравнения Власова–Максвелла приведен в разделе 2, вывод тождества Лагранжа – в разделе 3. Раздел 4 посвящен уравнениям типа ЭМГД.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА

Под уравнением типа уравнения Власова или просто уравнением Власова обычно понимается следующее уравнение для произвольного потенциала $K(x, y)$ парного взаимодействия частиц ([2]–[4], [6], [7], [9]):

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(v, \frac{\partial F}{\partial x} \right) - \left(\nabla_x \int K(x, y) F(t, v, y) dv dy, \frac{\partial F}{\partial v} \right) = 0.$$

Рассмотрим подстановку

$$F(t, v, x) = \sum_{i=1}^N \rho_i \delta(v - V_i(t)) \delta(x - X_i(t)),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $X_i(t)$ и $V_i(t)$ – функции времени (координаты и скорости частиц), $\rho_i > 0$ – числа (веса частиц). Уже А. А. Власову было известно, что такая подстановка удастся, если X_i и V_i удовлетворяют уравнениям движения N тел ([2], см. также [4], [6], [7])

$$\dot{X}_i = V_i, \quad \dot{V}_i = - \sum_{j=1}^N \nabla_1 K(X_i, X_j) \rho_j,$$

где ∇_1 – вектор градиента по первому аргументу. Такие решения и называются микроскопическими.

¹⁾Так стали называть уравнения типа МГД в присутствии электрического поля [7].

Сейчас термин *уравнение Власова* используется обычно с какими-то добавлениями: существуют уравнения Власова–Пуассона (для гравитации, электронов и плазмы), уравнение Власова–Максвелла, Власова–Эйнштейна, и появляются все новые добавления к названию, но их явно не хватает (как показывает уже перечисленное выше) по понятным причинам. Все такие термины появляются снова и снова как у нас в стране, так и за рубежом, и наблюдаются ошибки, когда уравнением Власова называется уравнение Лиувилля. В оригинальной работе Власова [1] было введено уравнение, которое сейчас называется уравнением Власова–Максвелла. Введено оно было очень своевременно, целенаправленно для описания плазмы, и показана его эффективность на примере малых колебаний плазмы. Сейчас даже для уравнения с таким названием количество его версий выросло и продолжает расти, так что простейший его вывод из классического лагранжиана весьма желателен. И лагранжиан известен [5], [10], и вывод прост и очевиден, и даже банален. По сути он приведен в [5], но только не для уравнения Власова–Максвелла, а для его гидродинамических следствий. Вывод дает твердую основу, во-первых, для классификации уравнений с таким названием, во-вторых, для оценки их правильности и, в-третьих, для оценки характера сделанных приближений теми или иными авторами. Отметим также, что вывод, аналогичный выводу Боголюбова через цепочки [3], или вывод Брауна–Хеппа–Маслова [4], [9] через микроскопические решения не так прямые, а для уравнений Власова–Максвелла оба вывода непригодны, как будет объяснено ниже.

Система уравнений Власова–Максвелла описывает движение частиц в собственном электромагнитном поле. Его можно получить из лагранжиана классической электродинамики. Начнем с обычного действия электромагнитного поля [5] – действия Власова–Максвелла или Лоренца (по повторяющимся верхним и нижним индексам идет суммирование)

$$\begin{aligned} S_L = S_{VM} = & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} c \sum_q \int_0^T \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{X}_{\alpha}^{\mu}(q, t) \dot{X}_{\alpha}^{\nu}(q, t)} dt + \\ & + \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{c} \sum_q \int_0^T A_{\mu}(X_{\alpha}(q, t), t) \dot{X}_{\alpha}^{\mu}(q, t) dt + \\ & + \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x = S_p + S_{p-f} + S_f, \end{aligned} \quad (1)$$

где S_p – означает действие, описывающее взаимодействие частиц, S_f – действие, описывающее взаимодействие полей, S_{p-f} – действие, описывающее взаимодействие полей и частиц; α – сорт частиц, отличающийся по массе m_{α} и заряду e_{α} ; q нумерует частицы внутри одного сорта; $X_{\alpha}^{\mu}(q, t)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, $q = 1, 2, \dots, N_{\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, r$, – 4-координаты q -й частицы сорта α ; $A_{\mu}(x)$ – потенциал; $F_{\mu\nu} = \partial_{\nu} A_{\mu} - \partial_{\mu} A_{\nu}$ – электромагнитные поля; $g_{\mu\nu}$ – метрика Минковского: $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, т. е. диагональная матрица. Варьирование проводим специальным способом [5]: получаем сначала движение частицы в поле $\delta(S_p + S_{p-f}) = 0$, а затем поля с заданными движениями частиц $\delta(S_{p-f} + S_f) = 0$. Однако для частиц мы перейдем к функциям распределения, что и даст искомую систему уравнений.

2.1. Варьирование величины $S_p + S_{p-f}$ по координатам $X_{\alpha}^{\mu}(q, t)$ даст уравнение движения зарядов в поле. Перепишем $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{X}^{\mu}(q, t) \dot{X}^{\nu}(q, t)}$ для метрики Минков-

ского (в дальнейшем греческие индексы $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, т. е. пробегают четыре значения; латинские $i, j = 1, 2, 3$, т. е. три значения):

$$S_p = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} c \sum_q \int \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{\alpha}^2(q, t)}{c^2}} dt = \int L_p dt,$$

где L_p – лагранжиан частиц, $\dot{x}^2 = \nu^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = -(\dot{x}_1 \dot{x}^1 + \dot{x}_2 \dot{x}^2 + \dot{x}_3 \dot{x}^3) = -\dot{x}_i \dot{x}^i$ – трехмерный квадрат скорости, а также мы учли, что $x^0 = ct$, и вынесли c^2 из-под корня. Проварьируем это выражение (опуская α):

$$\delta S_p = mc^2 \sum_q \frac{1}{c^2} \int \frac{\dot{x}_i \delta \dot{x}_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dt = m \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \delta \dot{x}^i dt.$$

Варьируем S_{p-f} (снова опуская α):

$$\begin{aligned} \delta S_{p-f} &= \frac{e}{c} \sum_q \delta \int [cA_0(x(q, t), t) + A_i(x(q, t), t) \dot{x}^i(q, t)] dt = \\ &= \frac{e}{c} \sum_q \left[c \frac{\partial A_0}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \dot{x}^j \delta x^i - \left(\frac{d}{dt} A_i \right) \delta x^i \right] dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из условия $\delta(S_p + S_{p-f}) = 0$ получаем уравнение движения заряженной частицы в поле

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\alpha i}}{dt} &= e_{\alpha} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} - \frac{1}{c} F_{ij} \dot{x}^j \right), \\ p_{\alpha i} &= \frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}_{\alpha}^i} = \frac{m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha}^i}{\sqrt{1 - \dot{x}_{\alpha}^2/c^2}}, \quad F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (2)$$

2.2. Теперь мы перестаем следовать [5] и переходим к функции распределения. Уравнение для функции распределения получается как уравнение сдвига вдоль траекторий полученной динамической системы движения зарядов в поле. Видно, что удобно взять функцию распределения от импульсов, а не от скоростей. При этом надо выразить скорости через импульсы:

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow p^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2}.$$

Обозначая $1 - \nu^2/c^2 = \gamma^{-2}$, получаем $\gamma^{-2} = 1 + p^2/(m^2 c^2)$ и $v_i = p_i/(\gamma m)$. Отсюда находим уравнение для функции распределения $f_{\alpha}(x, p, t)$

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \left(v_{\alpha}, \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} \right) + \frac{e_{\alpha}}{c} \left(-\frac{\partial A_i}{\partial t} - c \frac{\partial A_0}{\partial x} - F_{ij} v_{\alpha}^j \right) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial p_i} = 0, \quad (3)$$

где

$$v_{\alpha j} = \frac{p_j}{m_{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{1 + p^2/(m_{\alpha}^2 c^2)}}$$

и использовано равенство $\text{div}_p(F_j^i v^j) = 0$.

В монографии [11] это уравнение записано для ионов и электронов в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_e}{\partial t} + \left(v, \frac{\partial f_e}{\partial x}\right) - e \left(\left(E + \frac{1}{c}[v, B]\right), \frac{\partial f_e}{\partial p} \right) &= 0, \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \left(v, \frac{\partial f_i}{\partial x}\right) + ze \left(\left(E + \frac{1}{c}[v, B]\right), \frac{\partial f_i}{\partial p} \right) &= 0,\end{aligned}$$

где $f_i(x, p, t)$ и $f_e(x, p, t)$ – функции распределения ионов и электронов по пространству и импульсам в момент времени t , ze – заряд иона, $(-e)$ – заряд электрона. В [11] не выписано выражение v через p , однако часто его выбирают классическим: $v_{\alpha j} = p_j/m_{\alpha}$, и тогда удобно записать уравнения через функцию распределения $f(x, v, t)$ по скоростям вместо импульса. В такой записи этих уравнений величины v надо брать различными для электронов и ионов, т. е. требуются уточнения, v_i или v_e выбирается вместо v и каков вид этих функций как функций импульса $v_i(p)$ и $v_e(p)$: иначе эти уравнения оказываются незамкнуты.

2.3. Чтобы получить уравнение для полей, мы следуем [5], но используем функцию распределения вместо плотности. Сначала перепишем S_{p-f} через функцию распределения, совершив переход

$$\sum_q \rightarrow \int dq \rightarrow \int f(x, p, t) dx dp,$$

в результате чего S_{p-f} запишется в виде

$$S_{p-f} = \sum \frac{e_{\alpha}}{c^2} \int A_{\mu}(x) v_{\alpha}^{\mu} f_{\alpha}(x, p) d^3 p d^4 x.$$

Теперь варьируем по потенциалам $A_{\mu}(x)$:

$$\begin{aligned}\delta S_{p-f} &= \sum \frac{e_{\alpha}}{c^2} \int \delta A_{\mu}(x) v_{\alpha}^{\mu} f_{\alpha}(x, p) d^3 p d^4 x, \\ \delta S_f &= \frac{1}{16\pi c} 2 \int \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4 x = \frac{1}{8\pi c} 2 \int \delta A_{\mu} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} d^4 x.\end{aligned}$$

Полагаем $\delta(S_{p-f} + S_f) = 0$ и получаем

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int v_{\alpha}^{\mu} f_{\alpha}(x, p) d^3 p. \quad (4)$$

Система (3), (4) и есть система уравнений Власова–Максвелла.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Происхождение лагранжиана (1) красочно описано в книге Паули [10]: “После того как Пуанкаре убедился в инвариантности действия Шварцшильда относительно группы Лоренца, Борн применил четырехмерную векторную форму записи принципа действия, в результате чего последний приобрел очень наглядный вид”. Уравнение (4) представляет собой вторую пару уравнений Максвелла, а первая пара следует из равенств $F_{\mu\nu} = \partial_{\nu} A_{\mu} - \partial_{\mu} A_{\nu}$, что записывается в эквивалентном виде на языке дифференцирования кососимметрических тензоров $F_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = 2d(A_{\mu} dx^{\mu})$. Первая пара уравнений Максвелла записывается в виде $d(F_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}) = 0$, т. е. внешний дифференциал от 2-формы равен нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При выводе уравнений Власова–Максвелла из микроскопических решений [4], [9] или по схеме Боголюбова [3] нужно было бы начинать с гамильтоновых систем с потенциалами Лиенара–Вихерта (запаздывающие потенциалы). В случае слабого релятивизма соответствующий лагранжиан называется лагранжианом Дарвина [5]. Кроме того, при описании плазмы обычно решают граничные задачи, что требует введения функций Грина вместо потенциала парного взаимодействия. Наконец, в тех случаях, когда не возникает этих дополнительных трудностей при выводе уравнений с помощью цепочек Боголюбова, как, например, в случае уравнения Власова–Пуассона для гравитации, такой классический, следующий работам [5], [10] вывод представляется более простым и прямым.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Желательно и, видимо, возможно таким же способом вывести уравнения Власова–Янга–Миллса, заменив в четырех потенциалах A_μ числа на матрицы. Таким образом получается система уравнений Власова–Максвелла из классического лагранжиана электродинамики, и она оказывается обоснованной.

3. ТОЖДЕСТВО ЛАГРАНЖА

Как было показано, полная система уравнений Власова–Максвелла получается варьированием действия электромагнетизма (действия Лоренца) с переходом к функции распределения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(v_\alpha, \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} \right) + e_\alpha \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{1}{c} F_{ij} v_\alpha^j \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_i} &= 0, \\ \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} &= -\frac{4\pi}{c} \sum_\alpha e_\alpha \int v_\alpha^\mu f_\alpha(x, p, t) dp, \\ F_{\mu\nu} &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, 4, \\ E_i &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i}, \quad [v_\alpha, H] = -F_{ij} v_\alpha^j, \\ v_\alpha &= \frac{p}{m_\alpha \gamma_\alpha}, \quad \gamma_\alpha = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_\alpha^2 c^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Первое уравнение имеет вид сдвига по траекториям в поле электрических сил и магнитной силы Лоренца, а второе есть система уравнений Максвелла.

Систему уравнений Максвелла можно преобразовать (фиксированием лоренцевой калибровки $\partial A_\nu / \partial x_\nu$ согласно [5]) к виду, из которого и получаются потенциалы Лиенара–Вихерта обращением операторов в левых частях следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi &= \sum_\alpha 4\pi e_\alpha \int f_\alpha(x, p, t) dp, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \Delta A_i &= \sum_\alpha 4\pi e_\alpha \int v_i f_\alpha(x, p, t) dp. \end{aligned}$$

Тождество Лагранжа есть выражение второй производной по времени от момента инерции через кинетическую и потенциальную энергии. Следуя [8], покажем, что тождество Лагранжа можно распространить и на случай системы уравнений

Власова–Максвелла. Введем момент инерции частиц относительно начала координат

$$I(t) = \sum_{\alpha} \int f_{\alpha}(t, x, p) x^2 d^3 p d^3 x$$

и функционалы

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int f_{\alpha}(t, x, p) v_{\alpha}^2 d^3 p d^3 x, \\ \Pi &= \sum_{\alpha} \int \frac{e_{\alpha}}{\gamma_{\alpha} m_{\alpha}} \left(x, E + \frac{1}{c} [v_{\alpha}, H] \right) f_{\alpha} d^3 p d^3 x - \\ &\quad - \sum_{\alpha} \int \frac{e_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}^3 m_{\alpha}^3 c^2} (p, x) (p, E) f_{\alpha} d^3 p d^3 x. \end{aligned}$$

Тождество Лагранжа справедливо в виде

$$\ddot{I} = 4T - 2\Pi. \quad (6)$$

Докажем это тождество. Для производной по времени от момента инерции I согласно (5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \left(v_{\alpha}, \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} \right) + e_{\alpha} \left(E + \frac{1}{c} [v_{\alpha}, H], \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial p} \right) &= 0, \\ \dot{I} = \sum_{\alpha} \int \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} x^2 dx dp &= - \sum_{\alpha} \int \left(v_{\alpha}, \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} \right) x^2 dp dx - \\ &\quad - \sum_{\alpha} \int x^2 e_{\alpha} \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial p}, E + \frac{1}{c} [v_{\alpha}, H] \right) dp dx. \end{aligned}$$

По формуле Гаусса–Остроградского первый интеграл равен

$$2 \sum_{\alpha} \int (x, v_{\alpha}) f_{\alpha} d^3 p d^3 x,$$

а второй интеграл равен нулю, так как E не зависит от p и справедливо равенство $\operatorname{div}_p [v_{\alpha}, H] = 0$. Аналогично вторая производная от I по времени равна

$$\ddot{I} = -2 \sum_{\alpha} \int \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x}, v_{\alpha} \right) (v_{\alpha}, x) d^3 p d^3 x - 2 \sum_{\alpha} \int (v_{\alpha}, x) e_{\alpha} \left(E + \frac{1}{c} [v_{\alpha}, H], \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial p_i} \right) d^3 p d^3 x.$$

Первый интеграл в этом выражении интегрированием по частям можно преобразовать к виду

$$2 \sum_{\alpha} \int (v_{\alpha}, v_{\alpha}) f_{\alpha} d^3 p d^3 x = 4T.$$

Второй интеграл преобразуем, используя, что

$$\frac{\partial v_i}{\partial p_j} = \frac{\delta_{ij}}{\gamma_{\alpha} m_{\alpha}} - p_j \frac{p_i}{\gamma_{\alpha}^3 m_{\alpha}^3 c^2} \Rightarrow F_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial p_i} = 0,$$

где $v_i = p_i/m_\alpha \gamma_\alpha$, $\gamma_\alpha = \sqrt{1 + p^2/m_\alpha^2 c^2}$ (мы воспользовались сверткой симметричного и кососимметричного тензоров). Тогда получаем

$$\begin{aligned} & -2 \sum_\alpha \int \frac{\partial v_{\alpha j}}{\partial p_i} x_j e_\alpha \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} - \frac{1}{c} F_{ij} v_\alpha^j \right) f_\alpha d^3 p d^3 x = \\ & = -2 \sum_\alpha \int \left(\frac{\delta_{ij}}{\gamma_\alpha m_\alpha} - \frac{p_i p_j}{\gamma_\alpha^3 m_\alpha^3 c^2} \right) x_j e_\alpha \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} - \frac{1}{c} F_{ij} v_\alpha^j \right) f_\alpha d^3 p d^3 x = \\ & = -2 \sum_\alpha \int \frac{e_\alpha}{\gamma_\alpha m_\alpha} \left(x, E + \frac{1}{c} [v_\alpha, H] \right) f_\alpha d^3 p d^3 x + \\ & + 2 \sum_\alpha \int \frac{p_i p_j}{\gamma_\alpha^3 m_\alpha^3 c^2} x_j e_\alpha E_i f_\alpha d^3 p d^3 x = -2\Pi, \end{aligned}$$

так как $p_i F_{ij} v_\alpha^i = 0$, и второе слагаемое в последнем выражении преобразуется к виду

$$2 \sum_\alpha \int \frac{e_\alpha}{\gamma_\alpha^3 m_\alpha^3 c^2} (p, x) (p, E) f_\alpha d^3 p d^3 x.$$

Актуальным вопросом является исследование устойчивости решений уравнений Власова–Максвелла (например, для установок типа проекта ITER (www.iter.org) или Галатея [12]). Тождество Лагранжа может оказаться полезным, если правая часть окажется знакоопределенной. Вывод показывает, что второй член в функционале Π из тождества (6) связан с релятивистскими эффектами.

4. О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМГД ИЗ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Существует множество форм уравнений типа уравнений МГД: разные авторы понимают под этим совершенно разные системы уравнений [8], [13], [14]. При выводе уравнений МГД обычно (см. [15]) к уравнению Власова–Максвелла добавляют интеграл столкновений и получают уравнения гидродинамического типа (с ненулевой температурой) с использованием процедуры Максвелла–Чепмена–Энскога. Это и называется выводом уравнения МГД, но при этом получаются приближенные уравнения. Вывод уравнений с нулевой температурой с помощью подстановки в виде дельта-функции, умноженной на плотность, заведомо известен (см., например, работу [4], в которой это связывается с лагранжевыми подмногообразиями). Мы воспользовались им для классификации, уточнений и выяснения характера сделанных приближений. Кроме того, мы сравниваем его с выводом уравнений с ненулевой температурой, когда точная подстановка удастся в редких случаях.

4.1. Мы сначала ограничимся случаем нулевой температуры, чтобы получить соответствующие уравнения как точные следствия системы уравнений Власова–Максвелла с помощью подстановки

$$f_\alpha(t, x, p) = n_\alpha(x, t) \delta(p - P_\alpha(x, t)). \quad (7)$$

Это предельная при температуре $T_\alpha \rightarrow 0$ форма распределения Максвелла:

$$f_\alpha(t, x, p) = \frac{n_\alpha(x, t)}{(2k\pi T_\alpha m_\alpha)^{3/2}} e^{-(p - P_\alpha)^2 / 2kT_\alpha m_\alpha} \xrightarrow{T_\alpha \rightarrow 0} n_\alpha(x, t) \delta(p - P_\alpha(x, t)),$$

где k – постоянная Больцмана, T_α – температура α -компоненты смеси. При этом получается многожидкостная форма уравнений ЭМГД. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(v_\alpha(P_\alpha)n_\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + v_\alpha^i(P_\alpha) \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i} - \left(E + \frac{1}{c} [v_\alpha(P_\alpha), H] \right) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $v_\alpha^j = P_\alpha \gamma_\alpha / m_\alpha$, $\gamma_\alpha = \sqrt{1 + P_\alpha^2 / m_\alpha^2 c^2}$. Эти уравнения дополняются уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla \times E - \frac{\partial B}{\partial t} &= 0, \quad \nabla \cdot H = 0, \quad \nabla \cdot E = 4\pi \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha, \\ \nabla \times H - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha v_\alpha(P_\alpha). \end{aligned} \quad (9)$$

Подчеркнем, что эти уравнения являются точными следствиями системы уравнений Власова–Максвелла, поэтому тождество Лагранжа получается для системы (8), (9) подстановкой (7) в тождество Лагранжа (6):

$$\ddot{I}_2 = 4T_2 - 2\Pi_2, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \sum_\alpha \int n_\alpha(x, t) x^2 d^3x, \quad T_2(t) = \frac{1}{2} \sum_\alpha \int n_\alpha(x, t) v_\alpha^2(P_\alpha(x, t)) d^3x, \\ \Pi_2 &= \sum_\alpha \int \frac{e_\alpha}{\gamma_\alpha m_\alpha} n_\alpha(x, t) \left(x, E + \frac{1}{c} [v_\alpha(P_\alpha), H] \right) d^3x - \\ &\quad - \sum_\alpha \int \frac{e_\alpha}{\gamma_\alpha^3 m_\alpha^3 c^2} n_\alpha(x, t) (P_\alpha, x) (P_\alpha, E) d^3x. \end{aligned}$$

4.2. Нерелятивистская по частицам система уравнений Власова–Максвелла получается из действия вида (1), где первое слагаемое заменяется на

$$S_p = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \sum_q \int \dot{x}_\alpha^2(q, t) dt.$$

Мы получаем систему уравнений Власова–Максвелла в виде (5), где ее следует замкнуть соотношением для скоростей $v_\alpha(p) = p/m_\alpha$.

Соответствующие уравнения ЭМГД получаются с помощью той же подстановки (7) и отличаются от уравнений (8) лишь выражением скоростей через импульсы $v_\alpha = P_\alpha(x, t)/m_\alpha$.

Тождество Лагранжа для системы (5) при $v_\alpha(p) = p/m_\alpha$ справедливо в виде

$$\ddot{I}_3 = 4T_3 - 2\Pi_3, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} I_3(t) &= \sum_\alpha \int f_\alpha(t, x, p) x^2 d^3p d^3x, \quad T_3(t) = \frac{1}{2} \sum_\alpha \int f_\alpha(t, x, p) v_\alpha^2 d^3p d^3x, \\ \Pi_3 &= \sum_\alpha \int \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left(x, E + \frac{1}{c} [v_\alpha, H] \right) f_\alpha d^3p d^3x. \end{aligned}$$

Тождество Лагранжа для системы (8) при $v_\alpha(p) = p/m_\alpha$ справедливо в виде

$$\ddot{I}_4 = 4T_4 - 2\Pi_4, \quad (12)$$

где

$$I_4(t) = \sum_\alpha \int n_\alpha(x, t) x^2 d^3x, \quad T_4(t) = \frac{1}{2} \sum_\alpha \int n_\alpha(t, x) v_\alpha^2(P_\alpha(x, t)) d^3x, \\ \Pi_4 = \sum_\alpha \int \frac{n_\alpha(x, t)}{m_\alpha} e_\alpha \left(x, E + \frac{1}{c} [v_\alpha(P_\alpha), H] \right) d^3x.$$

Отметим обобщение тождества Лагранжа, когда вместо x^2 берется произвольная функция $\varphi(x)$:

$$I(t) = \sum_\alpha \int f_\alpha \varphi(x) d^3p d^3x.$$

Для этого функционала в силу системы Власова–Максвелла (5) имеем следующее выражение для второй производной по времени:

$$\ddot{I} = \sum_\alpha \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i \partial x_j} v_{\alpha i} v_{\alpha j} f_\alpha d^3p d^3x + \sum_\alpha \int \frac{e_\alpha}{\gamma_\alpha m_\alpha} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E + \frac{1}{c} [v_\alpha, H] \right) f_\alpha d^3p d^3x - \\ - \sum_\alpha \int \frac{e_\alpha}{\gamma_\alpha^3 m_\alpha^3 c^2} \left(p, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (p, E) f_\alpha d^3p d^3x.$$

4.3. Двухжидкостная и одножидкостная МГД (или ЭМГД) с ненулевой температурой имеют много модификаций [12]–[15], для примера мы приведем систему из работ [8], [15]:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha = 0, \quad \rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha, \quad \alpha = \{i, e\}, \\ \rho_\alpha \frac{d\mathbf{V}_\alpha}{dt} = -\nabla P_\alpha + e_\alpha n_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha, \mathbf{H}] \right), \\ \frac{ds_\alpha}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla, \\ P_\alpha = P_\alpha(\rho_\alpha, T_\alpha), \quad \epsilon_\alpha = \epsilon_\alpha(\rho_\alpha, T_\alpha), \quad T_\alpha ds_\alpha = d\epsilon_\alpha + P_\alpha d\left(\frac{1}{\rho_\alpha}\right),$$

где P_α – давление, ϵ_α – внутренняя энергия,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad e_i n_i - e_e n_e = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = e_i n_i \mathbf{V}_i - e_e n_e \mathbf{V}_e.$$

Обычно получают уравнения гидродинамического типа из системы кинетических уравнений, последовательно интегрируя и вводя моменты:

$$n_\alpha = \int f_\alpha(t, x, p) d^3p, \quad P_{\alpha i} = \frac{1}{n_\alpha} \int p_i f_\alpha(t, x, p) d^3p, \\ D_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int (p - P_\alpha)^2 f_\alpha(t, x, p) d^3p, \quad (13)$$

где $n_\alpha(x, t)$ – плотность числа частиц сорта α , $P_{\alpha i}(x, t)$ – математическое ожидание импульса или средний импульс, D_α – дисперсия по импульсам всех частиц каждого сорта, которая пропорциональна энергии хаотического движения,

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_\alpha v_\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha P_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i}(n_\alpha P_{\alpha i} P_{\alpha j} + \sigma_{\alpha ij}) - n_\alpha e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{H}] \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha D_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i} q_i &= 0,\end{aligned}\quad (14)$$

тензор напряжений и вектор теплового потока имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha ij} &= \int (p_i - P_{\alpha i})(p_j - P_{\alpha j}) f_\alpha(t, x, p) d^3 p, \\ q_i &= \int \frac{p_i}{m} (p - P_\alpha)^2 f_\alpha(t, x, p) d^3 p.\end{aligned}$$

В этой системе первое уравнение представляет собой уравнение неразрывности, второе есть уравнение движения и последнее уравнение – уравнение на энергию хаотического движения. Это точная система уравнений, но она не замкнута. Чтобы получить полную систему уравнений, предполагают максвеллизацию (установление распределения Максвелла по скоростям) либо как следствие взаимодействия парных столкновений молекул (путем добавления интеграла столкновений), либо как следствие взаимодействия со средой (добавлением линейного интеграла столкновений). Это означает, что моменты высшего порядка определяются через низшие с помощью распределения Максвелла:

$$f_\alpha(t, x, p) = \frac{n_\alpha(x, t)}{(2k\pi T_\alpha m_\alpha)^{3/2}} e^{-(p - P_\alpha)^2 / 2kT_\alpha m_\alpha},$$

При этом оказывается, что

$$\sigma_{\alpha ij} = \delta_{ij} k n_\alpha T_\alpha, \quad D_\alpha = 3kT_\alpha.$$

Более кратко эти уравнения записываются в форме Годунова, для этого введем в рассмотрение функцию Годунова

$$G^\alpha(\beta_\mu^\alpha) = \int f_\alpha^\mu(\beta_\mu^\alpha) d^3 p, \quad \mu = 0, \dots, 4, \quad (15)$$

где

$$f_\alpha^\mu(\beta_\mu^\alpha) = \exp[\beta_0^\alpha + \beta_1^\alpha p_1 + \beta_2^\alpha p_2 + \beta_3^\alpha p_3 + \beta_4^\alpha p^2].$$

Сравнивая

$$f_\alpha^0(\beta_\mu^\alpha) = \exp \left[\beta_0 - \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}{4\beta_4} \right] \exp \left[\beta_4 \left(p + \frac{\beta}{2\beta_4} \right)^2 \right], \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

с выражением

$$f_\alpha(t, x, P) = \frac{n_\alpha(x, t)}{(2k\pi T_\alpha m_\alpha)^{3/2}} e^{-(P - P_\alpha)^2 / 2kT_\alpha m_\alpha},$$

получим связь между β_μ и обычными термодинамическими переменными:

$$\begin{aligned}\beta_0^\alpha &= \ln n_\alpha - \frac{3}{2} \ln(2\pi k T_\alpha m_\alpha) - \frac{P_\alpha^2}{2kT_\alpha}, & \beta_1^\alpha p_1 &= \frac{P_{\alpha 1}}{kT_\alpha}, \\ \beta_2^\alpha &= \frac{P_{\alpha 2}}{kT_\alpha}, & \beta_3^\alpha &= \frac{P_{\alpha 3}}{kT_\alpha}, & \beta_4^\alpha &= -\frac{1}{2kT_\alpha m_\alpha}.\end{aligned}$$

Определим вектор

$$\begin{aligned}K_\mu^\alpha &= (0, F_1^\alpha n_\alpha, F_2^\alpha n_\alpha, F_3^\alpha n_\alpha, -2F_i^\alpha G_{\beta_i}^\alpha), \\ F^\alpha &= e_\alpha (E + [v_\alpha, H]), \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

тогда уравнения с ненулевой температурой в нулевом приближении можно записать в следующей форме Годунова:

$$\frac{\partial G_{\beta_\mu}^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial G_{\beta_\mu \beta_i}^\alpha}{\partial x_i} + K_\mu^\alpha = 0, \quad G_{\beta_\mu}^\alpha = \frac{\partial G^\alpha}{\partial \beta_\mu}. \quad (16)$$

Обобщение тождества Лагранжа в этом случае имеет следующий замечательный вид:

$$\begin{aligned}I(t) &= \sum_\alpha \int f_\alpha^0(\beta_\mu^\alpha) \phi(x) d^3 p d^3 x, \\ \dot{I} &= \sum_\alpha \int \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} G_{\beta_i}^\alpha G_{\beta_j}^\alpha d^3 x - \int \frac{\partial \phi}{\partial x_i} G^\alpha F_i^\alpha d^3 x.\end{aligned}$$

В некоторых курсах (см., например, [16]) используют уравнения для общей температуры и общего импульса. Это связано с тем, что импульс и кинетическая энергия каждой компоненты не являются инвариантами столкновений для перекрестных интегралов столкновений, тогда вместо $3n$ уравнений системы (14) или (16) получится $n + 3 + 1$ уравнение.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены вывод уравнения Власова–Максвелла из лагранжиана электродинамики и тождество Лагранжа. Такой вывод представляется удобной альтернативой методу ББГКИ [3] и выводу из микроскопических решений [4], [9], поскольку он прост и позволяет классифицировать различные виды уравнений типа уравнения Власова. Из этих уравнений мы предлагаем вывод уравнений типа МГД, для которых разнообразие только увеличивается. Это позволяет следить за характером сделанных приближений. Представлена запись этих уравнений в дважды дивергентной форме Годунова, для которой особенно легко получить обобщение тождества Лагранжа.

Интерес к уравнению Власова в последнее время возрастает, количество его вариантов огромно, как показывает и настоящая статья. И это не случайно, так как оно крайне эффективно в описании галактик и метagalactic, солнечного ветра и электронных приборов, энергетических установок и плазменных двигателей. Помимо этого, уравнение Власова актуально в связи с необходимостью описывать темную материю и изучать неустойчивости в плазменных установках.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00012_а).

Список литературы

- [1] А. А. Власов, *ЖЭТФ*, **8:3** (1938), 291–318.
- [2] А. А. Власов, *Нелокальная статистическая механика*, Наука, М., 1978.
- [3] Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, Гостехиздат, М., Л., 1946.
- [4] В. П. Маслов, П. П. Мосолов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42:5** (1978), 1063–1100.
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 2: *Теория поля*, Наука, М., 1988.
- [6] В. В. Веденяпин, *Кинетические уравнения Больцмана и Власова*, Физматлит, М., 2001.
- [7] М. Б. Гавриков, В. В. Савельев, *Изв. АН СССР. МЖГ*, **45:2** (2010), 176–192.
- [8] В. В. Козлов, *УМН*, **63:4**(382) (2008), 93–130.
- [9] W. Braun, K. Hepp, *Comm. Math. Phys.*, **56:2** (1977), 101–113.
- [10] В. Паули, *Теория относительности*, Наука, М., 1983.
- [11] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 10: *Физическая кинетика*, Наука, М., 1979.
- [12] К. В. Брушлинский, *Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики*, Бином, М., 2009.
- [13] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 8: *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
- [14] А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, *Магнитная гидродинамика*, Логос, М., 2005.
- [15] С. И. Брагинский, “Явления переноса в плазме”, *Вопросы теории плазмы*, **1**, ред. М. А. Леонтович, Госатомиздат, М., 1963, 183–272.
- [16] Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах*, Мир, М., 1976.

Поступила в редакцию 23.12.2010,
после доработки 29.04.2011