Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. К. Ишкин, Х. Х. Муртазин, О квантовом дефекте для оператора Дирака с неаналитическим потенциалом, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 3, 444–452

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 09:58:23

О КВАНТОВОМ ДЕФЕКТЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С НЕАНАЛИТИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Вычислены квантовые дефекты непрерывного и дискретного спектров радиального уравнения Дирака с потенциалом $V(r) = -A/r + q(r)$, где $A > 0$, $\int_0^\infty |q| \times (1 + \sqrt{r}) dr < \infty$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие “квантового дефекта” было впервые введено в известной монографии Зоммерфельда [1] для характеристики дискретного спектра некоторого возмущения оператора Шредингера атома водорода. С математической точки зрения “квантовый дефект” представляет собой величину δ , на которую нужно сдвинуть главное квантовое число n в асимптотической формуле для собственных чисел, чтобы получить первую поправку от возмущения. Это означает, что если μ_n и λ_n – собственные числа соответственно возмущенного и невозмущенного операторов и если $\lambda_n \sim F(n)$, $n \rightarrow \infty$, где $F(n)$ – известное выражение, то $\mu_n \sim F(n + \delta)$, $n \rightarrow \infty$. Такой вид вклада от регулярного возмущения характерен для дифференциальных операторов с дискретным спектром, имеющим конечную предельную точку. При этом величина δ может быть найдена в явном виде только для некоторых специальных потенциалов, а в общей ситуации она выражается в терминах решения уравнения при предельном значении спектрального параметра.

В работе [2] найдены значения квантового дефекта для непрерывного и дискретного спектров радиального уравнения Дирака с потенциалом

$$V(r) = -\frac{A}{r} + q(r), \quad (1)$$

где A – положительное число, $q(r)$ – вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $q(r)$ аналитична в области $\operatorname{Re} r > 0$ и непрерывна при $\operatorname{Re} r \geq 0$, кроме, быть может, точки $r = 0$;

2) имеет место неравенство

$$\int_0^\infty e^{L\sqrt{t}} \hat{q}(t) dt < \infty, \quad \forall L > 0,$$

*Башкирский государственный университет, Уфа, Россия. E-mail: ishkinhk@bashedu.ru; murtazin@mail.ru

где

$$\hat{q}(t) = \sup_{|\beta| \leq \frac{\pi}{2}} |q(t \exp i\beta)|.$$

Метод работы [2] специфичен для потенциалов указанного вида и существенно использует тот факт, что некоторая функция – аналог функции Йоста – может быть аналитически продолжена на нефизический лист.

В данной работе предлагается метод, который позволяет вычислить квантовый дефект оператора Дирака с потенциалом (1) в предположении выполнения лишь условия

$$\int_0^\infty |q(r)|(1 + \sqrt{r}) dr < \infty. \quad (2)$$

Кроме того, наша методика применима к более широкому, чем (1), классу потенциалов, содержащему, например, потенциалы V , дважды дифференцируемые и такие, что

$$a_k((r+1)^{-\alpha})^{(k)} < V^{(k)}(r) < A_k((r+1)^{-\alpha})^{(k)}, \quad \alpha > 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

2. КВАНТОВЫЙ ДЕФЕКТ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

Рассмотрим спектральную задачу для радиального уравнения Дирака

$$\left(J \frac{d}{dr} + Q(r)\right)y = \lambda y, \quad y \in L^2(0, \infty). \quad (3)$$

Здесь

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(r) = \begin{pmatrix} V(r) + m & k/r \\ k/r & V(r) - m \end{pmatrix}, \quad k > 0, \quad m > 0,$$

$V(r)$ имеет вид (1), где $0 < A < k$, функция $q(r)$ удовлетворяет условию (2).

Известно, что дискретный спектр задачи (3) расположен внутри интервала $(-m, m)$ с единственной предельной точкой m . Пусть λ_n – собственные числа уравнения (3), пронумерованные в порядке возрастания.

ТЕОРЕМА 1. Пусть q удовлетворяет условию (2) и $\alpha = \sqrt{k^2 - A^2} \geq 1/2$. Тогда

$$\lambda_n = m \left(1 - \frac{A^2}{2(n + \delta + \alpha)} \right) + o(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\delta = \beta/\pi$ и угол β определяется равенствами (9)–(13) (см. ниже).

Число δ называется квантовым дефектом дискретного спектра.

1. Решение уравнения Дирака около нуля. В этом пункте мы построим квадратично-суммируемое в нуле решение уравнения (3), которое имеет известную асимптотику при $\lambda \rightarrow m$ равномерно по $r \in [0, |m - \lambda|^{-\delta}]$, где $0 < \delta < 2/3$ – постоянная (лемма 2). Перепишем (3) в виде

$$y' + (A_0 - (z + q)J)y = 0, \quad (4)$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} k/r & -A/r - 2m \\ A/r & -k/r \end{pmatrix}, \quad z = m - \lambda.$$

Введем обозначения

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad t = \frac{k + \alpha}{A},$$

$$B = B(r, z) = T^{-1}(A_0 - zJ)T, \quad R = -qT^{-1}JT.$$

Тогда подстановка $y = Tv$ приводит уравнение (4) к виду

$$v' + (B + R)v = 0. \quad (5)$$

Сначала мы построим фундаментальную матрицу решений (ФМР) “предельного” уравнения

$$v' + (B_0 + R)v = 0, \quad (6)$$

где $B_0 = B(r, 0)$. Пусть V_0 – ФМР невозмущенного уравнения

$$v' + B_0 v = 0.$$

Легко проверить, что в качестве V_0 можно взять матрицу

$$V_0 = W' - B_0 W,$$

где W – ФМР уравнения

$$w'' - (B'_0 + B_0^2)w = 0.$$

Имеем

$$B'_0 + B_0^2 = \text{diag}(b_1, b_2), \quad b_{1,2} = -\frac{2Am}{r} + \alpha(\alpha \pm 1)r^{-2},$$

следовательно,

$$W = \text{diag}(w_1, w_2),$$

$$w_1 = \sqrt{r} J_{2\alpha+1}(\sqrt{8Amr}), \quad w_2 = -t^2 \sqrt{r} Y_{2\alpha+1}(\sqrt{8Amr}),$$

где J_ν , Y_ν – функции Бесселя.

Выпишем асимптотические формулы для V_0 , которые нам понадобятся в дальнейшем,

$$V_0(r) = \text{diag}(a_1, a_2)(I + O(r)) \text{diag}(r^\alpha, r^{-\alpha}), \quad r \rightarrow 0, \quad (7)$$

$$a_1 = (2Am)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\Gamma(2\alpha+1))^{-1}, \quad a_2 = -\frac{Am}{\pi\alpha} \frac{t^2}{a_1},$$

$$V_0(r) = T_0 M_1(r) (\widehat{V}_0(r) + O(r^{-\frac{1}{2}})), \quad r \rightarrow \infty, \quad (8)$$

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 1 & -Am/\alpha \\ 0 & (Am/\alpha)t^2 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \text{diag}\left(\left(\frac{2Am}{r}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{2Am}{r}\right)^{-\frac{1}{4}}\right),$$

$$\widehat{V}_0(r) = \begin{pmatrix} -\sin P_1 & \cos P_1 \\ \cos P_1 & \sin P_1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \sqrt{8Amr} - \pi\alpha - \frac{3\pi}{4}.$$

Пусть $\Psi(r)$ – решение интегрального уравнения

$$\Psi(r) = V_{01}(r) - \int_0^r V_0(r) V_0^{-1}(t) R(t) \Psi(t) dt, \quad (9)$$

где $V_{01}(r)$ – первый столбец матрицы $V_0(r)$. Ясно, что $\Psi(r)$ удовлетворяет уравнению (6).

ЛЕММА 1. Если выполнено условие (2), то

$$\Psi(r) \sim \begin{cases} V_{01}(r), & r \rightarrow 0, \\ O(r^{\frac{1}{4}}), & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию

$$\Omega(r) = \begin{cases} r^{-\alpha}, & 0 < r \leq 1, \\ r^{-\frac{1}{4}}, & r > 1, \end{cases}$$

и положим $\tilde{\Psi} = \Omega\Psi$, $\tilde{V}_{01} = \Omega V_{01}$. Из (7) и (8) следует, что $|\tilde{V}_{01}| \leq C_0$, $r > 0$. $\tilde{\Psi}$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Psi} = \tilde{V}_{01} - \int_0^r (\sqrt{t} + 1)q(t)K(r, t)\tilde{\Psi} dt,$$

где $|K(r, t)| \leq C$, $r, t > 0$. Таким образом,

$$|\tilde{\Psi}| \leq C_0 \exp\left(C \int_0^r (\sqrt{t} + 1)|q(t)| dt\right),$$

откуда и следует утверждение леммы.

Из асимптотических формул (7), (8) и (10) имеем

$$\int_0^\infty |V_0^{-1}(t)R(t)\Psi(t)| dt < \infty.$$

Следовательно,

$$\Psi(r) = V_0(r)S + \int_r^\infty V_0(r)V_0^{-1}(t)R(t)\Psi(t) dt, \quad (11)$$

где

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \int_0^\infty V_0^{-1}(t)R(t)\Psi(t) dt.$$

Введем угол β . Пусть $\Psi(x, r)$ – решение уравнения (9), где q заменено на xq , и пусть

$$S(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - x \int_0^\infty V_0^{-1}(t)R(t)\Psi(x, t) dt. \quad (12)$$

Очевидно, что $\Psi(x, r)$ удовлетворяет асимптотике (10), а $S(x)$ – целая функция. Покажем, что $S(x) \neq 0$. Действительно, если $S(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \neq 0$, то

$$\Psi(x_0, r) = x_0 \int_r^\infty V_0(r)V_0^{-1}(t)R(t)\Psi(x_0, t) dt.$$

Пусть $\tilde{\Psi}(x_0, r) = r^{-1/4}\Psi(x_0, r)$. Тогда

$$\tilde{\Psi}(x_0, r) = x_0 \int_r^\infty (\sqrt{t} + 1)q(t)K(r, t)\tilde{\Psi}(x_0, t) dt,$$

причем матрица $K(r, t)$ в силу (8) ограничена по t при каждом фиксированном $r > 0$. Отсюда следует, что при выполнении условия (2) интегральный оператор в правой части последнего уравнения есть оператор Вольтерра, так что $\tilde{\Psi}(x_0, r) = 0$, $\forall r > 0$, что невозможно.

Положим $\hat{S}(x) = S(x)/|S(x)|$, $x \in [0, 1]$. Пусть $\beta(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\hat{S}(x) = \begin{pmatrix} \cos \beta(x) \\ \sin \beta(x) \end{pmatrix}, \quad x \in [0, 1], \quad \beta(0) = 0. \quad (13)$$

Ясно, что функция $\beta(x)$ определена однозначно. Положим $\beta = \beta(1)$.

Тогда соотношение (11) примет вид

$$\Psi(r) = |S|V_0(r) \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} + \int_r^\infty V_0(r)V_0^{-1}(t)R(t)\Psi(t) dt.$$

В качестве другого решения уравнения (6) возьмем функцию $\Phi(r)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Phi(r) = |S|V_0(r) \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} + \int_r^\infty V_0(r)V_0^{-1}(t)R(t)\Psi(t) dt.$$

Введя матрицу $H = (\Psi, \Phi)$, рассмотрим уравнение

$$v(r, z) = \Psi(r) - z \int_0^r H(r)H^{-1}(t)T^{-1}JTv(t, z) dt. \quad (14)$$

ЛЕММА 2. Пусть выполнено условие (2). Тогда уравнение (14) имеет единственное решение $v(r, z)$, для которого справедливы асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} v(r, z) &= r^\alpha \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O(r) \right], \quad r \rightarrow 0, \quad |z| \leq z_0, \quad z_0 - \text{постоянная}, \\ v(b_z, z) &= |S|T_0M_1(b_z) \left[\begin{pmatrix} -\sin(P_1(b_z) - \beta) \\ \cos(P_1(b_z) - \beta) \end{pmatrix} + O(z^{1-\frac{3\delta}{2}}) \right], \quad z \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $b_z = |z|^{-\delta}$, $0 < \delta < 2/3$ — постоянная, не зависящая от z , матрицы T_0 , M_1 , S и угол β определены соотношениями (8), (12) и (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 1.

Отметим, что оценка $O(z^{1-3\delta/2})$ равномерна по $\arg z$.

2. Решение уравнения (5) на $[b_z, \infty)$. Рассмотрим матрицу

$$\begin{aligned} D(r, z) &= B'(r, z) + B^2(r, z) = \text{diag}(d_1, d_2), \\ d_{1,2}(r, z) &= (2m - z)z - \frac{2A(m - z)}{r} + \frac{\alpha(\alpha \pm 1)}{r^2}. \end{aligned}$$

Пусть $a_i(z)$ — положительный корень уравнения $d_i(r, z) = 0$, $i = 1, 2$. Имеем

$$a_i(z) = \frac{A}{z} + O(1), \quad z \rightarrow 0. \quad (16)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\xi_i(r, z) &= \left(\frac{3}{2} \int_{a_i(z)}^r |d_i|^{\frac{1}{2}} dt \right)^{\frac{2}{3}} \operatorname{sign}(r - a_i(z)), \\ Q_i(r, z) &= (\xi_i'^{-\frac{1}{2}})'' \xi_i'^{\frac{1}{2}}, \quad Q = \operatorname{diag}(Q_1, Q_2), \\ U_0 &= N' - BN, \quad N = \operatorname{diag}(\eta_1, \eta_2), \\ \eta_1 &= \xi_1'^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Ai}(\xi_1), \quad \eta_2 = \xi_1'^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Bi}(\xi_2),\end{aligned}$$

где $\operatorname{Ai}(\xi)$, $\operatorname{Bi}(\xi)$ – функции Эйри [3, с. 169]. Из асимптотических формул для функций Эйри вытекают следующие соотношения:

$$U_0 = T(z)M_2(r, z) \begin{cases} (W + O(P_2^{-1})) \operatorname{diag}(\frac{1}{2}e^{-P_2}, e^{P_2}), & P_2 \rightarrow +\infty, \\ \widehat{U}_0(r, z) + O(P_2^{-1}), & P_2 \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}P_2 &= \int_{a_1(z)}^r |d_1|^{\frac{1}{2}} dt, \\ T(z) &= T_0 + O(z), \quad M_2 = \operatorname{diag}(|d_1|^{\frac{1}{4}}, |d_1|^{-\frac{1}{4}}), \\ W &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{U}_0(r) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4 - P_2) & \sin(\pi/4 - P_2) \\ -\sin(\pi/4 - P_2) & \cos(\pi/4 - P_2) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение

$$u(r, z) = U_{01} + \int_r^\infty U_0(r, z)U_0^{-1}(t, z)(R(t, z) + Q(t, z))u(t, z) dt. \quad (18)$$

Точно так же, как и лемма 1, доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 3. При выполнении условия (2) решение уравнения (18) имеет следующие асимптотические разложения:

$$\begin{aligned}u(r, z) &= \frac{Am}{2\alpha} e^{-P_2} d_1^{-\frac{1}{4}} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ t^2 \end{pmatrix} + o(1) \right], \quad r \rightarrow \infty, \quad z > 0, \\ u(b_z, z) &= T(z)M_2(b_z, z) \left[\begin{pmatrix} \cos(\pi/4 - P_2(b_z, z)) \\ -\sin(\pi/4 - P_2(b_z, z)) \end{pmatrix} + O(I(z)) \right],\end{aligned} \quad (19)$$

где

$$I(z) = \int_{b_z}^\infty (\sqrt{t}|q(t)| + |d_1|^{-\frac{1}{2}}|Q(t, z)|) dt.$$

3. Доказательство теоремы 1. Из утверждений лемм 2 и 3 следует, что $v(r, z) \in L^2(0, b_z]$ и $u \in L^2[b_z, \infty)$, так что λ – собственное значение задачи (3) тогда и только тогда, когда

$$\det(v, u)|_{r=b_z} = 0.$$

Подставляя сюда асимптотические формулы (15) и (19), получим

$$\cos\left(\int_{b_z}^{a_1(z)} |d_1|^{\frac{1}{2}} dt + \sqrt{8Amb_z} - \beta - \pi\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + o(1) = 0, \quad z \rightarrow +0. \quad (20)$$

Чтобы отсюда получить асимптотику λ_n , рассмотрим оператор с потенциалом $V(x, r) = -A/r + xq(r)$, $x \in [0, 1]$, и обозначим через $\lambda_n(x)$ n -е собственное значение этого оператора. Тогда λ_n удовлетворяет уравнению (20) при $\beta = \beta(x)$ (см. (13)). Решая это уравнение при больших n , будем иметь

$$\begin{aligned} & \left(\int_{b_z}^{a_1(z)} |d_1|^{\frac{1}{2}} dt + \sqrt{8Amb_z} - \beta - \pi\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{z=z_n(x)} = \\ & = (2n-1)\frac{\pi}{2} + l_n(x)\pi + o(1), \end{aligned}$$

где $l_n(x)$ – целое число. Так как функция $l_n(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то $l_n(1) = l_n(0)$. Но $l_n(0) = 0$. Учитывая это, после элементарных вычислений получим

$$\lambda_n = m\left(1 - \frac{A^2}{2(n+\delta+\alpha)}\right) + o(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если известна дополнительная информация о скорости убывания функции q на бесконечности, то можно уточнить член $o(n^{-1})$ в (21). Так, если

$$q = O(r^{-\frac{3}{2}-\sigma}), \quad \sigma > 0, \quad (22)$$

то остаточный член в (19) имеет порядок $O(z^{\delta C})$, где $C = \min\{\sigma, 1/2\}$. Подбрав теперь δ так, чтобы остаточные члены в формулах (15) и (19) имели одинаковый порядок, находим, что при условии (22) член $o(n^{-1})$ в (21) имеет порядок $O(n^{-1-\gamma})$, $\gamma = 2C/(3(1+C))$.

3. КВАНТОВЫЙ ДЕФЕКТ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Пусть $y(r, z)$ – решение уравнения (4), удовлетворяющее условию

$$y(r, z) \sim r^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad r \rightarrow 0,$$

и пусть $y_0(r, z)$ – решение соответствующего невозмущенного уравнения, удовлетворяющее такому же условию. Тогда

$$y \sim C(\varepsilon, k) e^{\varepsilon r} r^{-\frac{A\lambda}{\varepsilon}} \begin{pmatrix} m + \lambda \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (23)$$

$$y_0 \sim C_0(\varepsilon, k) e^{\varepsilon r} r^{-\frac{A\lambda}{\varepsilon}} \begin{pmatrix} m + \lambda \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (24)$$

где $\varepsilon = \sqrt{m^2 - \lambda^2}$, $\operatorname{Re} \varepsilon > 0$.

В работе [2] показано, что при выполнении условия (2) и условий 1) и 2) (см. введение) функция $C(\varepsilon, k)$ аналитически продолжается на область $\varepsilon \notin (-\infty, 0] \cup [m, +\infty)$ и существуют конечные пределы

$$\delta(k, \pm m) = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \pm m \pm 0} \arg \frac{C(\varepsilon, k)}{C_0(\varepsilon, k)}. \quad (25)$$

Мы докажем, что для существования пределов (25) достаточно лишь выполнения условия (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из рассуждений работы [2] следует, что при $\lambda > m$ функция $C(\varepsilon, k)$ (соответственно $C_0(\varepsilon, k)$) совпадает с коэффициентом при слагаемом

$$e^{-i\tau r} r^{\frac{A\lambda i}{\tau}} \begin{pmatrix} m + \lambda \\ -i\tau \end{pmatrix}, \quad \tau = \sqrt{\lambda^2 - m^2},$$

в асимптотическом разложении $y(r, z)$ (соответственно $y_0(r, z)$) при $r \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Если q удовлетворяет условию (2), то пределы $\delta(k, \pm m)$ существуют и равны β/π , где функция β была определена в п. 1 раздела 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из теоремы 2 следует, что так же, как и в регулярном случае (т.е. при выполнении условий 1) и 2)), квантовые дефекты непрерывного и дискретного спектров совпадают.

Сначала мы докажем существование квантового дефекта в точке m . Для этого построим ФМР уравнения (5), которая в отличие от решений, введенных в [2], обладает асимптотическим разложением при $\lambda \rightarrow m + 0$, равномерным по $r \in [b_z, \infty)$.

ЛЕММА 4. Пусть выполнено условие (2). Тогда возмущенное и невозмущенное уравнения (5) имеют ФМР $U(r, z)$ и $U_0(r, z)$, соответственно, для которых при $\lambda \rightarrow m + 0$ и $r \in [b_z, \infty)$ справедливы асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} U(r, z), U_0(r, z) &\sim [T_0 + O(z)] M_2 [W + \Delta(r, z)] \operatorname{diag}(e^{-iP_2}, e^{iP_2}), \\ M_2 &= \operatorname{diag}(|d|^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i}{4}}, |d|^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i}{4}}), \\ d &= (2m - z)z - \frac{2A(m - z)}{r} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{r^2}, \\ W &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \int_{b_z}^r |d|^{\frac{1}{2}} dt, \\ |\Delta(r, z)| &\leq C_1 |z| + C_2 \left(r^{-\frac{1}{2}} + \int_r^\infty \sqrt{t} |q| dt \right), \end{aligned} \quad (26)$$

постоянные $C_{1,2}$ не зависят от z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$U_0 = N' - BN, \quad N = \text{diag}(\eta_1, \eta_2),$$

где η_k – решения уравнений

$$\eta_k'' - d_k \eta_k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (27)$$

Уравнения (27) имеют решения с известными ВКБ-асимптотиками на бесконечности:

$$\eta_k \sim d_k^{-\frac{1}{4}} \exp((-1)^k i P_2) (1 + O(r)^{-\frac{1}{2}}), \quad k = 1, 2.$$

Отсюда легко следует утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $v(r, z)$ – решение уравнения (5), удовлетворяющее условию

$$v(r, z) \sim r^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \rightarrow 0,$$

а $v_0(r, z)$ – соответствующее решение невозмущенного уравнения. Положим

$$h(z) = U^{-1}(b_z, z)v(b_z, z), \quad h_0(z) = U^{-1}(b_z, z)v_0(b_z, z).$$

Тогда

$$v(r, z) = U(r, z)h(z), \quad v_0(r, z) = U_0(r, z)h_0(z), \quad r \geq b_z.$$

Из асимптотических формул (15) и (26) следует, что

$$h(z) \sim \frac{|S|}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{\pi i}{4}} \begin{pmatrix} e^{-i\Theta} \\ e^{i\Theta} \end{pmatrix}, \quad h_0(z) \sim \frac{|S|}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{\pi i}{4}} \begin{pmatrix} e^{-i\Theta_0} \\ e^{i\Theta_0} \end{pmatrix},$$

где $\Theta = \Theta_0 - \beta$, $\Theta_0 = P_1(b_z)$.

Тогда в силу замечания 2 $C(\varepsilon, k)/C_0(\varepsilon, k) \sim |S|e^{i\beta}$ при $\lambda \rightarrow m + 0$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы 2 для $\delta(k, m)$.

Если $\lambda < -m$, то уравнения (27) имеют точку поворота, так что в качестве решений η_k следует брать эталонные решения, выражающиеся через функции Эйри (так же как и при вычислении квантового дефекта дискретного спектра). Все остальные рассуждения аналогичны случаю $\lambda \rightarrow m + 0$.

Список литературы

- [1] А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1956.
- [2] Л. А. Сагнович. ТМФ. 1996. Т. 108. № 1. С. 36–49.
- [3] М. В. Федорюк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 19.VI.2000 г.