Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, А. Э. Рууге, Многочастичный и квазиклассический предельные переходы для нерелятивистских бозонов в квантованном электромагнитном поле, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 3, 453–470

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf679>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:55:14

МНОГОЧАСТИЧНЫЙ И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ ДЛЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ БОЗОНОВ В КВАНТОВАННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

С помощью метода комплексного роста получена система уравнений для амплитуд одночастичных фазовых плотностей системы, состоящей из нескольких сортов классических частиц с электромагнитным взаимодействием. Соответствующие уравнения возникают в результате весьма сложного предельного перехода не из классических уравнений для N частиц в магнитном поле, а из теории взаимодействия бозонов с квантованным электромагнитным полем, из двойной асимптотики: во-первых, по большому числу частиц и фотонов, а во-вторых, в квазиклассическом пределе. При этом в вышеуказанном первом пределе при некоторых дополнительных предположениях получаются уравнения, являющиеся условием стационарности функционала действия, рассматривавшегося в одной из недавних работ Фаддеевым и Ниemi.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] были построены асимптотические решения вторично квантованного уравнения Лиувилля для системы большого числа классических тождественных попарно взаимодействующих между собой частиц, находящихся в заданном внешнем поле $U(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, отвечающие предельному переходу по параметру взаимодействия $\varepsilon \rightarrow 0$. Это уравнение имеет вид

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}} \Phi(t), \quad \Phi(t) \in \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & -i \iint dx dp u^+(x, p) \left\{ \frac{p^2}{2m} + U(x), u^-(x, p) \right\} - \\ & - \frac{i\varepsilon}{2} \iiint dx dp d\xi d\eta u^+(x, p) u^+(\xi, \eta) \{ V(x - \xi), u^-(\xi, \eta) u^-(x, p) \}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ – симметричное пространство Фока [2] с одночастичным подпространством $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, $u^\pm(x, p)$ – операторы рождения–уничтожения в этом пространстве, $x, p \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $\{\cdot, \cdot\}$ – скобки Пуассона, m – масса частиц, $\varepsilon V(x - \xi)$ – потенциал

*Московский государственный университет, Москва, Россия

взаимодействия между частицами, функции U и V предполагаются достаточно гладкими.

Основная идея, с помощью которой строились асимптотические решения уравнения (1), состояла в следующем. Малый параметр ε входит в оператор $\hat{\mathcal{H}}$ (2) таким образом, что его можно записать в виде

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{H}(\sqrt{\varepsilon} u^+, \sqrt{\varepsilon} u^-)$$

(операторы рождения u^+ действуют после операторов уничтожения u^-). Отсюда видно, что если перейти к шредингеровскому представлению [2],

$$u^\pm(x, p) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(Q(x, p) \mp \varepsilon \frac{\delta}{\delta Q(x, p)} \right),$$

то уравнение (1) примет вид уравнения Шредингера с бесконечным числом степеней свободы, в котором при операторах дифференцирования стоит малый параметр ε . К этому уравнению применим один из методов построения квазиклассических асимптотик – метод комплексного роста [3], используемый в квантовой механике конечного числа переменных для построения квазиклассических асимптотических решений уравнения Шредингера, сосредоточенных в малой ($\sim \sqrt{\hbar}$, $\hbar \rightarrow 0$) окрестности подмногообразий конфигурационного пространства. Роль параметра квазиклассического разложения в данном случае играет параметр взаимодействия ε , а роль конфигурационного пространства играет множество действительных элементов пространства $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Простейший вариант теории комплексного роста – комплексный росток в точке – позволяет построить асимптотические решения уравнения Шредингера, сосредоточенные в каждый момент времени t вблизи точки. Траектория движения этой точки представляет собой проекцию на конфигурационное подпространство одной из фазовых траекторий соответствующей классической гамильтоновой системы. Применительно к рассматриваемому случаю систему Гамильтона удобно записать в виде одного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, p) = - \left\{ \frac{p^2}{2m} + U(x), u(x, p) \right\} - \iint d\xi d\eta \bar{u}(\xi, \eta) \{ V(x - \xi), u(\xi, \eta) u(x, p) \}, \quad (3)$$

где $u(x, p) = (Q(x, p) + iP(x, p))/\sqrt{2} \in L^2(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_p^3)$, $Q(x, p)$ и $P(x, p)$ – классические координаты и канонически сопряженные им импульсы, соответствующие оператору умножения на $Q(x, p)$ и оператору дифференцирования $-i\varepsilon \delta/\delta Q(x, p)$ (в обозначении u , Q и P для краткости опускается аргумент t).

Гамильтонова система (3) позволяет получить хорошо известное уравнение Власова

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, p, t) = - \{ H_\rho(x, p, t), \rho(x, p, t) \}, \quad (4)$$

$$H_\rho(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + U(x) + \iint d\xi d\eta V(x - \xi) \rho(\xi, \eta, t). \quad (5)$$

Именно, каждому решению u уравнения (3) соответствует решение $\rho = |u|^2$ уравнения (4). Таким образом, решение $u(x, p)$ уравнения (3) является амплитудой одночастичной плотности ρ .

В настоящей работе ставится задача обобщить уравнение (3) для системы большого числа частиц различных типов с электромагнитным взаимодействием. На первый взгляд может показаться, что данное обобщение очевидно. Так, если имеется всего один сорт частиц, то, казалось бы, нужно просто заменить импульсы p на $p - eA(x, t)/c$, где e – заряд частицы, c – скорость света, $A(x, t)$ – вектор-потенциал магнитного поля, а в качестве потенциала $V(x - \xi)$ (предполагая, что задача рассматривается в кулоновской калибровке [4]) подставить $e^2/|x - \xi|$. Интеграл в правой части (5), деленный на заряд e , имел бы в этом случае смысл самосогласованного электрического потенциала $\Phi(x, t)$, удовлетворяющего уравнению

$$\Delta \Phi(x, t) = -4\pi e \int dp \rho(x, p, t). \quad (6)$$

По аналогии с этим можно было бы заключить, что вектор-потенциал магнитного поля $A(x, t)$ должен удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) A(x, t) - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) = \frac{4\pi e}{c} j(x, t), \quad (7)$$

в котором в правой части в качестве вектора тока $j(x, t)$ следует взять вектор с компонентами

$$j_l(x, t) = \frac{1}{m} \int dp \left(p_l - \frac{e}{c} A_l(x, t) \right) \rho(x, p, t), \quad l = 1, 2, 3.$$

Тем не менее подобное рассуждение дает правильное обобщение уравнения для ρ (уравнение Власова с магнитным полем)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, p, t) = - \left\{ \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 \left(p_j - \frac{e}{c} A_j(x, t) \right)^2 + e \Phi(x, t), \rho(x, p, t) \right\}, \quad (8)$$

но не уравнения для u . Дело в том, что если положить $\rho = |u|^2$ и (формально) выразить из уравнений (6) и (7) потенциалы электромагнитного поля в терминах ρ , а затем подставить их в модифицированное указанным образом уравнение для u (3), то получающаяся система уравнений для u уже не будет гамильтоновой, т.к. в нее будут входить значения u , взятые в различные моменты времени t , между тем как гамильтоновость необходима по смыслу. Это означает, что для построения обобщения уравнения (3) необходимо учитывать переменные, соответствующие электромагнитному полю, наравне с переменными $\text{Re } u$ и $\text{Im } u$. Этому более тонкому анализу и посвящена настоящая работа.

Окончательные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_a(x, p) = & - \left\{ \frac{1}{2m_a} \sum_{j=1}^3 \left(p_j - \frac{e_a}{c} A_j(x) \right)^2 + e_a \Phi(x), u_a(x, p) \right\} + \\ & + i \left[\frac{e_a}{m_a c} \sum_{j=1}^3 \left(p_j - \frac{e_a}{c} A_j(x) \right) \tilde{A}_j(x) + e_a \tilde{\Phi}(x) \right] u_a(x, p), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta \Phi(x) = -4\pi \sum_{a=1}^{a_0} e_a \int dp |u_a(x, p)|^2, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) A_j(x) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t} \Phi(x) = \\ = \frac{4\pi}{c} \sum_{a=1}^{a_0} \frac{e_a}{m_a} \int dp \left(p_j - \frac{e_a}{c} A_j(x) \right) |u_a(x, p)|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta \tilde{\Phi}(x) = i4\pi \sum_{a=1}^{a_0} e_a \int dp \{u_a(x, p), \bar{u}_a(x, p)\}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \tilde{A}_j(x) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t} \tilde{\Phi}(x) = \\ = -\frac{4\pi}{c} \sum_{a=1}^{a_0} \frac{e_a}{m_a} \left(i \int dp \left(p_j - \frac{e_a}{c} A_j(x) \right) \{u_a(x, p), \bar{u}_a(x, p)\} + \right. \\ \left. + \frac{e_a}{c} \tilde{A}_j(x) \int dp |u_a(x, p)|^2 \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} A_j(x) = 0, \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{A}_j(x) = 0, \quad (14)$$

где в обозначениях u_a и функций A_j , Φ , $\tilde{A}_j$ и $\tilde{\Phi}$ опущен для краткости аргумент t , $a = \overline{1, a_0}$ – индекс, нумерующий различные типы частиц, $u_a \in L^2(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_p^3)$, e_a и m_a – соответственно заряд и масса частицы типа a . Несложно видеть, что $\rho_a = |u_a|^2$ будут удовлетворять системе уравнений Власова с магнитным полем

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_a(x, p) = - \left\{ \frac{1}{2m_a} \sum_{j=1}^3 \left(p_j - \frac{e_a}{c} A_j(x) \right)^2 + e_a \Phi(x), \rho_a(x, p) \right\}. \quad (15)$$

Отметим, что если $u_a(x, p)$ – не обращающаяся в ноль функция, то можно сделать замену $u_a = \sqrt{\rho_a} e^{i\varphi_a}$. Уравнение для фазы $\varphi_a(x, p)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_a(x, p) = & - \left\{ \frac{1}{2m_a} \sum_{j=1}^3 \left(p_j - \frac{e_a}{c} A_j(x) \right)^2 + e_a \Phi(x), \varphi_a(x, p) \right\} + \\ & + \frac{e_a}{m_a c} \sum_{j=1}^3 \left(p_j - \frac{e_a}{c} A_j(x) \right) \tilde{A}_j(x) + e_a \tilde{\Phi}(x), \end{aligned}$$

где, как и выше, опущен аргумент t в обозначениях функций.

Ниже будет показано, что уравнения (9)–(14) эквиваленты системе Гамильтона, которая возникает из уравнений теории взаимодействия частиц с квантованным электромагнитным полем в результате двух “классических” предельных переходов: сначала делается предельный переход, при котором среднее число частиц и фотонов в системе стремится к бесконечности (в качестве параметра квазиклассического разложения при этом выступает величина, обратная среднему общему числу частиц в системе), а затем $\hbar \rightarrow 0$.

2. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ МЕТОДА ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

Напомним, что под симметричным пространством Фока $\Gamma_s(L^2(\mathcal{M}))$, где $\mathcal{M}$ – некоторое пространство с мерой, понимается гильбертово пространство, элементами которого являются бесконечные последовательности

$$\begin{aligned} \Phi &= (\Phi_0, \Phi_1(z_1), \Phi_2(z_1, z_2), \dots), \\ \Phi_0 &\in \mathbb{C}, \quad \Phi_n(z_1, \dots, z_n) \in L^2(\underbrace{\mathcal{M} \times \dots \times \mathcal{M}}_{n \text{ раз}}), \end{aligned} \quad (16)$$

такие, что Φ_n симметричны относительно перестановок $z_i \rightleftharpoons z_j$ и выполнено условие

$$\|\Phi\|^2 = |\Phi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int dz_1 \dots dz_n |\Phi_n(z_1, \dots, z_n)|^2 < \infty.$$

Определение операторов рождения–уничтожения $\psi^\pm(z)$, действующих в этом пространстве, имеет вид

$$\begin{aligned} (\psi^+(z)\Phi)_n(z_1, \dots, z_n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \delta(z - z_i) \Phi_{n-1}(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n), \\ (\psi^-(z)\Phi)_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) &= \sqrt{n} \Phi_n(z_1, \dots, z_{n-1}, z). \end{aligned}$$

Операторы рождения–уничтожения удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\psi^-(z), \psi^+(\zeta)] = \delta(z - \zeta), \quad [\psi^\pm(z), \psi^\pm(\zeta)] = 0.$$

Элемент Φ_n последовательности (16) называется *n -частичной компонентой* фоковского вектора Φ , а подпространство в $\Gamma_s(L^2(\mathcal{M}))$, образованное элементами, у которых лишь n -частичная компонента отлична от нуля, называется *n -частичным подпространством*. Элемент $\Phi_{\text{vac}} = (1, 0, 0, \dots)$ называется *вакуумным вектором*. Имеет место следующая формула, представляющая фоковский вектор (16) через операторы рождения:

$$\Phi = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N!}} \int dz_1 \dots dz_N \Phi_N(z_1, \dots, z_N) \psi^+(z_1) \dots \psi^+(z_N) \Phi_{\text{vac}}. \quad (17)$$

В шредингеровском представлении [2] элементам пространства Фока соответствуют функционалы $\Phi[Q(\cdot)]$, $Q = Q^* \in L^2(\mathcal{M})$, причем вакуумному вектору ставится в соответствие функционал

$$\Phi_{\text{vac}}[Q(\cdot)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathcal{M}} dz Q^2(z) \right\},$$

где $\varepsilon > 0$ – параметр. Операторам рождения–уничтожения соответствуют операторы

$$\psi_Q^\pm(z) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(Q(z) \mp \varepsilon \frac{\delta}{\delta Q(z)} \right).$$

Функционал, соответствующий вектору общего вида (16), можно вычислить с помощью формулы (17), заменяя в ее правой части Φ_{vac} на $\Phi_{\text{vac}}[Q(\cdot)]$ и $\psi^+(z)$ на $\psi_Q^+(z)$.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ ИЗ КВАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Как уже говорилось во введении, для того чтобы построить обобщение уравнения (3), необходимо включить в рассмотрение переменные, соответствующие электромагнитному полю, наравне с переменными $\text{Re } u$ и $\text{Im } u$, для чего, в свою очередь, необходимо перейти к квантовым уравнениям.

Уравнение (3) было получено из классического ($\hbar = 0$) вторично квантованного уравнения (1) в результате предельного перехода по параметру взаимодействия $\varepsilon \rightarrow 0$. Покажем теперь, каким образом его можно получить исходя из квантовых уравнений, осуществляя предельный переход сначала по параметру взаимодействия между частицами $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем по $\hbar \rightarrow 0$.

Будем рассматривать систему, состоящую из тождественных бесспиновых бозонов. Вторично квантованное уравнение Шредингера, описывающее эту систему, имеет вид

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = \frac{1}{\varepsilon} H(\sqrt{\varepsilon} \psi^+, \sqrt{\varepsilon} \psi^-) \Psi(t), \quad \Psi(t) \in \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)), \quad (18)$$

где индексы над ψ^+ и ψ^- обозначают порядок действия операторов рождения и уничтожения [5],

$$\begin{aligned} H(\psi^*, \psi) &= \frac{1}{\hbar} \int dx \psi^*(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x) \right) \psi(x) + \\ &+ \frac{1}{2\hbar} \iint dx dy V(x - y) \psi^*(x) \psi^*(y) \psi(y) \psi(x), \end{aligned}$$

$U(x)$ – заданный внешний потенциал, $V(x - y)$ – потенциал взаимодействия между частицами, деленный на параметр взаимодействия ε ; функции U и V для простоты предполагаются достаточно гладкими. Гамильтонову систему, соответствующую пределу $\varepsilon = 0$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) &= \frac{\delta H(\psi^*, \psi)}{\delta \psi^*(x)} = \\ &= \frac{1}{\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x) \right) \psi(x) + \frac{1}{\hbar} \int dy V(x - y) \psi^*(y) \psi(y) \psi(x), \end{aligned} \quad (19)$$

где для краткости у ψ опущен аргумент t , $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Рассмотрим теперь два каких-нибудь решения, например $\psi(x, t)$ и $\phi(x, t)$, уравнения (19), имеющих одинаковую норму: $\|\psi(\cdot, t)\| = \|\phi(\cdot, t)\| = 1/\sqrt{\alpha}$. Их произведение $\psi(x, t)\phi^*(\xi, t)$ будет удовлетворять уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x)\phi^*(\xi) = \int dy \mathcal{H}_\psi(x, y)\psi(y)\phi^*(\xi) - \int dy \psi(x)\phi^*(y)\mathcal{H}_\phi(y, \xi), \quad (20)$$

$$\mathcal{H}_\psi(x, y) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x + U(x) + \int d\xi V(x - \xi)\psi^*(\xi)\psi(\xi) \right) \delta(x - y),$$

здесь и всюду ниже аргумент t опущен. $\mathcal{H}_\phi(x, y)$ определяется аналогичным образом. Из (20) следует, что оператор $\hat{u}$, действующий по формуле

$$\hat{u}f(x) = \alpha(2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}}\psi(x) \int d\xi \phi^*(\xi)f(\xi), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad (21)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u} = -\frac{i}{\hbar} (\hat{H}_\psi \hat{u} - \hat{u} \hat{H}_\phi), \quad (22)$$

где $\hat{H}_\psi$ и $\hat{H}_\phi$ – операторы, задаваемые интегральными ядрами $\mathcal{H}_\psi(x, y)$ и $\mathcal{H}_\phi(x, y)$, соответственно. Оператор $\hat{u}$ можно записать как вейлевский $\hbar$ -псевдодифференциальный оператор,

$$\hat{u} = u \left(\frac{x + \frac{3}{2}}{2}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (23)$$

(индексы над операторами в (23) обозначают порядок их действия [5]), с символом

$$u(x, p) = \frac{\alpha}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int dq e^{-\frac{i}{\hbar}pq} \psi \left(x + \frac{q}{2} \right) \phi^* \left(x - \frac{q}{2} \right),$$

$$\hat{u}f(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \iint dp d\xi u \left(\frac{x + \xi}{2}, p \right) e^{\frac{i}{\hbar}p(x - \xi)} f(\xi).$$

Уравнение для символа имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, p) = -\frac{i}{\hbar} (H_\psi(x, p) * u(x, p) - u(x, p) * H_\phi(x, p)), \quad (24)$$

где “ $*$ ” – умножение символов (*скрученное произведение* [6]), индуцированное операцией умножения операторов, $H_\psi(x, p)$ и $H_\phi(x, p)$ – вейлевские символы операторов $\hat{H}_\psi$ и $\hat{H}_\phi$, соответственно:

$$H_\psi(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x) + \int d\xi V(x - \xi) |\psi(\xi)|^2$$

и аналогично для $H_\phi(x, p)$.

Несложно проверить, что оператор $\hat{u}$, соответствующий комплексно сопряженному символу $\bar{u}(x, p)$, действует согласно формуле

$$\hat{u}f(x) = \alpha(2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}}\phi(x) \int d\xi \psi^*(\xi)f(\xi), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^3). \quad (25)$$

Из формул (21), (25) следует, что с точностью до постоянного множителя скрученные произведения символов $u(x, p)*\bar{u}(x, p)$ и $\bar{u}(x, p)*u(x, p)$ являются символами операторов проектирования $\hat{\pi}_\psi$ и $\hat{\pi}_\phi$ на состояния $\sqrt{\alpha}\psi$ и $\sqrt{\alpha}\phi$, соответственно:

$$(u * \bar{u})(x, p) = \alpha^{-1}(2\pi\hbar)^{-3} \text{smb } \hat{\pi}_\psi(x, p), \quad (26)$$

$$(\bar{u} * u)(x, p) = \alpha^{-1}(2\pi\hbar)^{-3} \text{smb } \hat{\pi}_\phi(x, p). \quad (27)$$

Учитывая эти формулы, а также формулу для следа псевдодифференциального оператора

$$\text{Tr } \hat{A} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iint dx dp (\text{smb } \hat{A})(x, p),$$

символы H_ψ и H_ϕ можно выразить через u и $\bar{u}$:

$$H_\psi(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x) + \iint d\xi d\eta V(x - \xi) * (u * \bar{u})(\xi, \eta), \quad (28)$$

$$H_\phi(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x) + \iint d\xi d\eta V(x - \xi) * (\bar{u} * u)(\xi, \eta) \quad (29)$$

(скрученные произведения в интегральных членах вычисляются по переменным ξ и η). После подстановки (28) и (29) в (24) и циклической перестановки сомножителей под знаком интегрирования уравнение для $u(x, p)$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, p) = & - \left\{ \frac{p^2}{2m} + U(x), u(x, p) \right\}_\hbar - \\ & - \iint d\xi d\eta \bar{u}(\xi, \eta) * \{ V(x - \xi), u(\xi, \eta) u(x, p) \}_\hbar, \end{aligned} \quad (30)$$

где, как и ранее, у функций u и $\bar{u}$ опущен аргумент t ; $\{a, b\}_\hbar := (i/\hbar)(a * b - b * a)$ – квантовые скобки Пуассона; скрученные произведения вычисляются как по переменным x, p , так и по переменным ξ, η . Условия конечности норм $\|\psi\|, \|\phi\| < \infty$ индуцируют условие на u

$$\iint dx dp |u(x, p)|^2 < \infty, \quad (31)$$

которое получается из (26), (27) с учетом формулы

$$\iint dx dp (a * b)(x, p) = \iint dx dp a(x, p) b(x, p).$$

Отметим, что уравнение (30) возникало в работе [7] при построении асимптотических решений многочастичного уравнения для квантовой функции плотности системы большого числа различных частиц – уравнения Вигнера.

Чтобы перейти от квантового уравнения для $u(x, p)$ к его классическому аналогу, необходимо заменить скрученное произведение на обычное, а квантовые скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_\hbar$ – на классические $\{\cdot, \cdot\}$. Несложно видеть, что получающееся в результате этого классическое уравнение совпадает с (3).

4. ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ

Представленный вывод уравнения (3), в отличие от вывода из вторично квантованного уравнения (1), можно перенести на интересующий нас более общий случай системы большого числа частиц с электромагнитным взаимодействием, в которой имеются несколько различных сортов частиц. Заметим, что хотя в представленном выше рассуждении мы исходили из вторично квантованного уравнения Шредингера для нерелятивистских *бозонов*, окончательное классическое ($\hbar = 0$) уравнение (3) оказывается применимым для любой классической системы большого числа *одинаковых* частиц независимо от типа статистики, которой они подчиняются в квантовой механике. Имея в виду этот факт ограничим наше рассмотрение (формальным) предположением, что все частицы в системе являются нерелятивистскими бесспиновыми бозонами.

Вместо уравнения (19) естественно взять уравнения вида

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_a(x, t) = \left(\frac{1}{2m_a} \sum_{j=1}^3 \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{e_a}{c} A_j(x, t) \right)^2 + e_a \Phi(x, t) \right) \psi_a(x, t), \quad (32)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $\psi_a(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}_x^3)$, индекс $a = 1, \dots, a_0$ нумерует различные типы частиц, e_a и m_a – заряд и масса частицы сорта a , соответственно, c – скорость света, $\Phi(x, t)$ и $A_j(x, t)$ – потенциалы электромагнитного поля. Уравнения для Φ и A_j связаны самосогласованным образом с волновыми функциями ψ_a . Удобнее всего записать их в кулоновской калибровке

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} A_j(x, t) = 0. \quad (33)$$

Кроме того, мы будем предполагать, что потенциалы электромагнитного поля являются быстро убывающими функциями на пространственной бесконечности. Уравнения для Φ и A_j в данной калибровке имеют вид

$$\Delta \Phi(x, t) = -4\pi \sum_{a=1}^{a_0} e_a |\psi_a(x, t)|^2, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) A_j(x, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t} \Phi(x, t) = \\ & = \frac{4\pi}{c} \sum_{a=1}^{a_0} \frac{e_a}{m_a} \left(-\frac{i\hbar}{2} \left(\psi_a^*(x, t) \frac{\partial \psi_a(x, t)}{\partial x_j} - \psi_a(x, t) \frac{\partial \psi_a^*(x, t)}{\partial x_j} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{e_a}{c} A_j(x, t) \psi_a^*(x, t) \psi_a(x, t) \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что система уравнений (32)–(35) может быть получена из условия стационарности функционала действия (для сокращения записи аргументы (x, t) опускаем)

$$\begin{aligned} S = & \iint dt dx \sum_{a=1}^{a_0} \left\{ i\psi_a^*(\hbar\partial_t + ie_a\Phi)\psi_a - \frac{1}{2m_a} \left| \left(\hbar\partial_j - \frac{ie_a}{c} A_j \right) \psi_a \right|^2 \right\} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint dt dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\partial_j \Phi + \frac{1}{c} \partial_t A_j \right)^2 - \frac{1}{4} (\partial_j A_l - \partial_l A_j)^2 \right\} \end{aligned}$$

на конфигурациях, удовлетворяющих условию калибровки (33) (вариации ψ_a и ψ_a^* при этом рассматриваются как независимые). Здесь $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_j \equiv \partial/\partial x_j$, по индексам j и l подразумевается суммирование. Функционал подобного вида в случае $a_0 = 2$, $e_1 = -e_2$ рассматривался в работе [8].

Поступим теперь с системой уравнений (32), (34), (35) подобно тому, как мы поступили с уравнением (19) в предыдущем разделе. Пусть ψ_a , $\Phi^{(\psi)}$, $A_j^{(\psi)}$ и ϕ_a , $\Phi^{(\phi)}$, $A_j^{(\phi)}$ — какие-нибудь два решения данной системы, причем ψ_a и ϕ_a имеют одинаковые нормы, $\|\psi_a(\cdot, t)\| = \|\phi_a(\cdot, t)\| = 1/\sqrt{\alpha_a}$. Тогда набор $u_a(x, p, t)$,

$$u_a(x, p, t) = \frac{\alpha_a}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int dq e^{-\frac{i}{\hbar}pq} \psi_a\left(x + \frac{q}{2}, t\right) \phi_a^*\left(x - \frac{q}{2}, t\right),$$

будет удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} u_a(x, p) = -\frac{i}{\hbar} (H_a^{(\psi)}(x, p) * u_a(x, p) - u_a(x, p) * H_a^{(\phi)}(x, p)), \quad (36)$$

где, а также всюду ниже опущен аргумент t ,

$$H_a^{(\psi)}(x, p) = \sum_{a=1}^{a_0} \left(\frac{1}{2m_a} \sum_{j=1}^3 \left(p_j - \frac{e_a}{c} A_j^{(\psi)}(x) \right)^2 + e_a \Phi^{(\psi)}(x) \right),$$

$H_a^{(\phi)}$ определяются так же, как $H_a^{(\psi)}$, с заменой индекса ψ на ϕ . Гамильтонианы $H_a^{(\psi)}$ и $H_a^{(\phi)}$ можно выразить через произведения $(u_a * \bar{u}_a)(x, p)$ и $(\bar{u}_a * u_a)(x, p)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что правые части уравнений (34), (35) могут быть выражены через эти произведения. В самом деле, воспользовавшись формулами вида (26), (27), можно получить

$$\begin{aligned} \psi_a^*(x) \psi_a(x) &= \int dp (u_a * \bar{u}_a)(x, p), \quad \phi_a^*(x) \phi_a(x) = \int dp (\bar{u}_a * u_a)(x, p), \\ -i\hbar \left(\psi_a^*(x) \frac{\partial \psi_a(x)}{\partial x_j} - \psi_a(x) \frac{\partial \psi_a^*(x)}{\partial x_j} \right) &= \\ &= -i\hbar \int d\xi \frac{\partial \delta(x - \xi)}{\partial x_j} (\psi_a^*(x) \psi_a(\xi) - \psi_a(x) \psi_a^*(\xi)) = \\ &= \int dp \operatorname{smb} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{u}_a \hat{u}_a + \hat{u}_a \hat{u}_a \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) (x, p) = \\ &= \int dp (p_j * u_a(x, p) * \bar{u}_a(x, p) + u_a(x, p) * \bar{u}_a(x, p) * p_j), \\ -i\hbar \left(\phi_a^*(x) \frac{\partial \phi_a(x)}{\partial x_j} - \phi_a(x) \frac{\partial \phi_a^*(x)}{\partial x_j} \right) &= \\ &= \int dp (p_j * \bar{u}_a(x, p) * u_a(x, p) + \bar{u}_a(x, p) * u_a(x, p) * p_j). \end{aligned}$$

Перейдем теперь в уравнении (36) к классическому пределу (всюду далее в обозначениях u_a , $H_a^{(\psi)}$ и $H_a^{(\phi)}$ для сокращения записи будем опускать аргументы (x, p)). С этой целью его удобно предварительно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_a = & -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{H_a^{(\psi)} + H_a^{(\phi)}}{2} * u_a - u_a * \frac{H_a^{(\psi)} + H_a^{(\phi)}}{2} \right) - \\ & - \frac{i}{2} \left(\frac{H_a^{(\psi)} - H_a^{(\phi)}}{\hbar} * u_a + u_a * \frac{H_a^{(\psi)} - H_a^{(\phi)}}{\hbar} \right) \end{aligned}$$

и затем представить разность $H_a^{(\psi)} - H_a^{(\phi)}$ в виде

$$\begin{aligned} H_a^{(\psi)} - H_a^{(\phi)} = & -\frac{e_a}{m_a c} \sum_{j=1}^3 \left(p_j - \frac{e_a}{c} \frac{A_j^{(\psi)}(x) + A_j^{(\phi)}(x)}{2} \right) (A_j^{(\psi)}(x) - A_j^{(\phi)}(x)) + \\ & + e_a (\Phi^{(\psi)}(x) - \Phi^{(\phi)}(x)). \end{aligned}$$

Уравнения для $(\Phi^{(\psi)}(x) - \Phi^{(\phi)}(x))/\hbar$ и $(A_j^{(\psi)}(x) - A_j^{(\phi)}(x))/\hbar$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\Phi^{(\psi)}(x) - \Phi^{(\phi)}(x)}{\hbar} = & -4\pi \sum_{a=1}^{a_0} e_a \int dp \frac{u_a * \bar{u}_a - \bar{u}_a * u_a}{\hbar}, \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \frac{A_j^{(\psi)}(x) - A_j^{(\phi)}(x)}{\hbar} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t} \frac{\Phi^{(\psi)}(x) - \Phi^{(\phi)}(x)}{\hbar} = \\ = & \frac{4\pi}{c} \sum_{a=1}^{a_0} \frac{e_a}{m_a} \left(\int dp p_j * \frac{u_a * \bar{u}_a - \bar{u}_a * u_a}{\hbar} - \right. \\ & - \frac{e_a}{c} \frac{A_j^{(\psi)}(x) - A_j^{(\phi)}(x)}{\hbar} \int dp u_a * \bar{u}_a - \\ & \left. - \frac{e_a}{c} \frac{A_j^{(\psi)}(x) + A_j^{(\phi)}(x)}{2} \int dp \frac{u_a * \bar{u}_a - \bar{u}_a * u_a}{\hbar} \right). \end{aligned}$$

Устремляя $\hbar \rightarrow 0$ и предполагая, что

$$\begin{aligned} \Phi^{(\psi)}(x), \Phi^{(\phi)}(x) & \rightarrow \Phi(x), & A_j^{(\psi)}(x), A_j^{(\phi)}(x) & \rightarrow A_j(x), \\ \frac{\Phi^{(\psi)}(x) - \Phi^{(\phi)}(x)}{\hbar} & \rightarrow \tilde{\Phi}(x), & \frac{A_j^{(\psi)}(x) - A_j^{(\phi)}(x)}{\hbar} & \rightarrow \tilde{A}_j(x), \end{aligned}$$

получим в итоге систему уравнений (9)–(13). Кроме того, условие кулоновской калибровки (33) дает в классическом пределе условия (14) для A_j и $\tilde{A}_j$.

5. ГАМИЛЬТОНОВОСТЬ УРАВНЕНИЙ И ИХ СВЯЗЬ С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ ДЛЯ $\bar{N} \rightarrow \infty$

Перед тем как обсудить полученную систему уравнений (9)–(14), выясним, какой смысл имеют квантовые уравнения (32)–(35) с точки зрения асимптотически квантованных уравнений. Указанные уравнения являются аналогом уравнения (19), которое играет, в свою очередь, роль системы Гамильтона при построении асимптотики уравнения Шредингера (18) по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$. Если в качестве асимптотических решений этого уравнения взять решения, функционалы которых в представлении Шредингера сосредоточены в окрестности точки $\sim \sqrt{\varepsilon}$ (асимптотики типа волновых пакетов, построенные в работе [9]), то окажется, что среднее $\bar{N}$ от оператора числа частиц $\hat{N} = \int dx \psi^+(x) \psi^-(x)$ по таким состояниям будет порядка $1/\varepsilon$. Это означает, что в сущности асимптотика по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ – это асимптотика по среднему числу частиц $\bar{N} \rightarrow \infty$. Отметим, что наличие малого параметра $\varepsilon \sim 1/\bar{N}$ в гамильтониане уравнения (18) приводит к тому, что среднее значение энергии системы растет линейно по $\bar{N}$ при $\bar{N} \rightarrow \infty$.

Систему уравнений (32)–(35) также можно свести к системе Гамильтона. Это делается следующим образом. Прежде всего необходимо отметить, что данная система уравнений эквивалентна системе

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \psi_a(x) &= \frac{\delta}{\delta \psi_a^*(x)} K(\psi^*, \psi, \dot{A}, A, \Phi), \\ \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} K(\psi^*, \psi, \dot{A}, A, \Phi) &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta \dot{A}_j(x)} - \frac{\delta}{\delta A_j(x)} \right) K(\psi^*, \psi, \dot{A}, A, \Phi) &= 0, \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} A_j(x) &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\hbar} \sum_{a=1}^{a_0} \int dx \left(\psi_a^*(x) \frac{1}{2m_a} \sum_{j=1}^3 \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{e_a}{c} A_j(x) \right)^2 \psi_a(x) + e_a \Phi(x) \psi_a^*(x) \psi_a(x) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\hbar} \int dx \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{c} \dot{A}_j(x) + \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{j,l=1}^3 \left(\frac{\partial A_l(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j(x)}{\partial x_l} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

и для компактности записи опускается аргумент t . Функционал K играет роль гамильтониана по переменным $\psi_a^*(x)$ и $\psi_a(x)$ и роль функции Лагранжа по потенциалам поля $\Phi(x)$, $A_j(x)$. В силу вырожденности K как функции Лагранжа невозможно представить всю систему уравнений в гамильтоновой форме, просто взяв преобразование Лежандра по скоростям переменных электромагнитного поля. В связи с этим приходится поступить следующим образом. Сначала с помощью уравнения (37) исключаются циклические переменные $\Phi(x)$, $\Phi(x) = \Phi[\psi^*, \psi, \dot{A}, A](x)$. Остающиеся при этом уравнения снова

могут быть записаны частично в гамильтоновой, а частично в лагранжевой форме, причем вместо K следует взять

$$K'(\psi^*, \psi, \dot{A}, A) = K(\psi^*, \psi, \dot{A}, A, \Phi[\psi^*, \psi, \dot{A}, A]).$$

Далее уравнения с K' ограничиваются на конфигурации, удовлетворяющие условию кулоновской калибровки (38). Для этого вектор-потенциал удобно представить в виде

$$A_j(x) = \int' dk \sum_{s=1}^2 e_{sj}(k) (a_s(k) e^{ikx} + a_s^*(k) e^{-ikx}), \quad (39)$$

где $k \in \mathbb{R}^3$, штрих у интеграла означает, что интегрирование ведется по полупространству (задаваемому, скажем, неравенством $k_1 > 0$), $\{e_s(k)\}$, $s = 1, 2$, — произвольная пара ортонормированных векторов, ортогональных k ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 e_{sj}(k) e_{rj}(k) &= \delta_{rs}, & \sum_{j=1}^3 e_{sj}(k) k_j &= 0, \\ \sum_{s=1}^2 e_{si}(k) e_{sj}(k) + \frac{k_i k_j}{|k|^2} &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Действительные и мнимые части функций a_s , умноженные на $\sqrt{2}$ ($a_s(k) = (q_s(k) + i\xi_s(k))/\sqrt{2}$), можно воспринимать как новые координаты. Уравнения для них будут иметь вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta \dot{q}_s(k)} - \frac{\delta}{\delta q_s(k)} \right) K''(\psi^*, \psi, \dot{q}, q, \dot{\xi}, \xi) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta \dot{\xi}_s(k)} - \frac{\delta}{\delta \xi_s(k)} \right) K''(\psi^*, \psi, \dot{q}, q, \dot{\xi}, \xi) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$K'' = K'(\psi^*, \psi, B[\dot{q}, \dot{\xi}], A[q, \xi]),$$

$(A[q, \xi])_j(x)$ — правая часть формулы (39), $(B[\dot{q}, \dot{\xi}])_j(x)$ — правая часть (39), продифференцированная по t . Уравнение для $\psi_a(x)$ можно записать в виде

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_a(x) = \frac{\delta}{\delta \psi_a^*(x)} K''(\psi^*, \psi, \dot{q}, q, \dot{\xi}, \xi).$$

Отметим, что сохранение лагранжовости по одной части переменных $(q_s(k), \xi_s(k))$ и гамильтоновости по другой $(\psi_a(x), \psi_a^*(x))$ обусловлено тем, что при ограничении функционала $K'(\psi^*, \psi, \dot{A}, A)$ на конфигурации вида (39) он распадается на сумму двух слагаемых:

$$K' \rightarrow H_0(\psi^*, \psi, A) + L(\dot{A}, A),$$

первое из которых, содержащее (комплексные) гамильтоновы переменные ψ и ψ^* , не содержит $\dot{A}$, а второе, содержащее $\dot{A}$, не содержит ψ и ψ^* . Функционал K'' (рассматриваемый как аналог функции Лагранжа) в отличие от исходного функционала K не вырожден по скоростям. Соответствующий ему гамильтониан H'' определяется однозначно с помощью преобразования Лежандра и имеет вид

$$\begin{aligned} H'' = & \frac{1}{\hbar} \sum_{a=1}^{a_0} \int dx \psi_a^*(x) \frac{1}{2m_a} \sum_{j=1}^3 \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{e_a}{c} (\tilde{A}[a, a^*])_j(x) \right)^2 \psi_a(x) + \\ & + \frac{1}{2\hbar} \sum_{a,b=1}^{a_0} \iint dx dy \psi_a^*(x) \psi_b^*(y) \frac{e_a e_b}{|x-y|} \psi_b(y) \psi_a(x) + \\ & + \sum_{s=1}^2 \int' dk \left(c^2 \frac{4\pi\hbar}{(2\pi)^3} b_s^*(k) b_s(k) + \frac{(2\pi)^3}{4\pi\hbar} |k|^2 a_s^*(k) a_s(k) \right), \end{aligned} \quad (40)$$

где $a_s(k) = (q_s(k) + i\xi_s(k))/\sqrt{2}$, $b_s(k) = (p_s(k) + i\eta_s(k))/\sqrt{2}$, $p_s(k)$ и $\eta_s(k)$ — импульсы, канонически сопряженные к переменным $q_s(k)$ и $\xi_s(k)$, через $(\tilde{A}[a, a^*])_j(x)$ обозначена правая часть формулы (39). Отметим, что нетривиальные скобки Пуассона между переменными, фигурирующими в правой части (40), равны

$$\langle \psi_a(x), \psi_b^*(y) \rangle = i\delta_{ab}\delta(x-y), \quad \langle b_s(k), a_r^*(q) \rangle = \delta_{rs}\delta(k-q).$$

Остальные скобки равны нулю. Здесь мы использовали обозначение для (“вторичных”) скобок Пуассона $\langle \cdot, \cdot \rangle$, чтобы не путать их с обычными скобками Пуассона $\{ \cdot, \cdot \}$, используемыми в классической механике.

ЗАМЕЧАНИЕ. Гамильтониан H'' позволяет найти энергию E всей системы: $E = \hbar H''$. На статических конфигурациях

$$\dot{a}_s(k) = \frac{\delta H''}{\delta b_s^*(k)} = c^2 \frac{4\pi\hbar}{(2\pi)^3} b_s(k) = 0,$$

и, следовательно, $b_s(k) = b_s^*(k) = 0$. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 \int' dk |k|^2 a_s^*(k) a_s(k) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int dx (\partial_i A_j(x)) \partial_i A_j(x) = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int dx H_i(x) H_i(x), \end{aligned}$$

где $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $H_i(x) = \varepsilon_{ijl} \partial_j A_l$, ε_{ijl} — абсолютно антисимметричный тензор, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, получим выражение для функционала энергии в виде

$$\begin{aligned} E = & \sum_{a=1}^{a_0} \int dx \frac{1}{2m_a} \left| \left(\hbar \partial_j - \frac{ie_a}{c} A_j(x) \right) \psi_a(x) \right|^2 + \\ & + \sum_{a,b=1}^{a_0} \iint dx dy \frac{e_a e_b}{|x-y|} |\psi_a(x)|^2 |\psi_b(y)|^2 + \frac{1}{8\pi} \int dx H_j^2(x) \end{aligned}$$

(по индексу j подразумевается суммирование). Пусть рассматриваемая система представляет собой двухкомпонентную плазму ($a_0 = 2$) такую, что $e_1 = -e_2 = e$. Предположим, далее, что имеет место сильная дебаевская экранировка. Это позволяет заменить в функционале энергии E функции $e^2/|x-y|$, стоящие в подынтегральных выражениях, на $g\delta(x-y)$, где g – константа связи. В итоге функционал энергии E примет вид

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2\mu} \left\{ \cos^2 \alpha \left| \left(\hbar \partial_j - \frac{ie}{c} A_j \right) \psi_1 \right|^2 + \sin^2 \alpha \left| \left(\hbar \partial_j + \frac{ie}{c} A_j \right) \psi_2 \right|^2 \right\} + \frac{1}{8\pi} H_j^2 + g(\psi_2^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_1)^2 \right], \quad (41)$$

где $\mu = m_1 \sin^2 \alpha = m_2 \cos^2 \alpha$ – приведенная масса. Такой функционал рассматривался в работе [8].

Задание четырех функций $q_s(k)$, $\xi_s(k)$, $p_s(k)$ и $\eta_s(k)$ (s фиксировано) на полупространстве эквивалентно заданию двух функций $\mathcal{Q}_s(k)$ и $\mathcal{P}_s(k)$ на всем пространстве $k \in \mathbb{R}^3$. Подберем такое преобразование $q_s, \xi_s, p_s, \eta_s \rightarrow \mathcal{Q}_s, \mathcal{P}_s$, чтобы в терминах переменных $\mathcal{A}_s(k) = (\mathcal{Q}_s(k) + i\mathcal{P}_s(k))/\sqrt{2}$ вектор-потенциал $A_j(x)$ принял вид

$$A_j(x) = \sum_{s=1}^2 \int dk f(k) e_{sj}(k) (e^{ikx} \mathcal{A}_s(k) + e^{-ikx} \mathcal{A}_s^*(k)),$$

а не исчезающая при $\psi = 0$ часть гамильтониана H'' приняла бы вид

$$H''|_{\psi=0} = \sum_{s=1}^2 \int dk g(k) \mathcal{A}_s^*(k) \mathcal{A}_s(k),$$

где $f(k)$ и $g(k)$ – некоторые функции. Оказывается, что эти два требования вместе с требованиями каноничности преобразования,

$$\langle \mathcal{A}_s(k), \mathcal{A}_r^*(q) \rangle = i\delta_{rs}\delta(k-q), \quad \langle \mathcal{A}_s(k), \mathcal{A}_r(q) \rangle = 0,$$

однозначно определяют функции $f(k)$ и $g(k)$:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar c}{|k|}}, \quad g(k) = c|k|.$$

Само же каноническое преобразование дается формулами

$$a_s(k) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar c}{|k|}} \left(\mathcal{A}_s(k) + e_{sj}(k) \sum_{r=1}^2 e_{rj}(-k) \mathcal{A}_r^*(-k) \right),$$

$$b_s(k) = i\pi \sqrt{\frac{\hbar c}{|k|}} \left(-\mathcal{A}_s(k) + e_{sj}(k) \sum_{r=1}^2 e_{rj}(-k) \mathcal{A}_r^*(-k) \right).$$

Обозначим гамильтониан H'' , записанный в терминах переменных $\psi_a(x)$, $\psi_a^*(x)$, $\mathcal{A}_s(k)$ и $\mathcal{A}_s^*(k)$, через $H = H(\psi^*, \psi, \mathcal{A}^*, \mathcal{A})$. Представленное рассуждение означает, что систему уравнений (32)–(35) можно воспринимать как систему, эквивалентную системе Гамильтона, соответствующую предельному переходу $\varepsilon \rightarrow 0$ в уравнении Шредингера с гамильтонианом

$$\hat{H}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} H(\sqrt{\varepsilon} \psi^+, \sqrt{\varepsilon} \psi^-, \sqrt{\varepsilon} \mathcal{A}^+, \sqrt{\varepsilon} \mathcal{A}^-),$$

где $\psi^\pm$ – бозевские операторы рождения–уничтожения, соответствующие переменным ψ^* и ψ , $\mathcal{A}^\pm$ – бозевские операторы рождения–уничтожения, соответствующие переменным $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A}$. Асимптотику по параметру ε можно трактовать как асимптотику по большому среднему числу частиц $\bar{N}_a$ каждого сорта a , $\bar{N}_a \sim \|\psi_a\|^2/\varepsilon \rightarrow \infty$, и числу фотонов $\bar{N}_0 \sim \|\mathcal{A}\|^2/\varepsilon \rightarrow \infty$. Подобный предельный переход имеет место в теории излучения Гайтлера [10]. Отметим, что гамильтониан, аналогичный $\hat{H}_1$, в котором вместо бозевских операторов $\psi^\pm$ стоят фермионные операторы рождения–уничтожения [2], возник в [11].

Представленная схема рассуждений легко переносится на интересующий нас случай классических уравнений (9)–(14). Несложно проверить, что уравнения (9)–(14) эквивалентны системе уравнений

$$i \frac{\partial}{\partial t} u_a(x, p) = \frac{\delta}{\delta u_a^*(x, p)} \mathcal{K}(u^*, u, \dot{A}, A, \Phi, \dot{\tilde{A}}, \tilde{A}, \tilde{\Phi}), \quad (42)$$

$$\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta \Phi(x)} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{K}}{\delta \tilde{\Phi}(x)} = 0, \quad (43)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta \dot{A}_j(x)} - \frac{\delta}{\delta A_j(x)} \right) \mathcal{K} = 0, \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta \dot{\tilde{A}}_j(x)} - \frac{\delta}{\delta \tilde{A}_j(x)} \right) \mathcal{K} = 0, \quad (44)$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} A_j(x) = 0, \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{A}_j(x) = 0, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(u^*, u, \dot{A}, A, \Phi, \dot{\tilde{A}}, \tilde{A}, \tilde{\Phi}) = & \sum_{a=1}^{a_0} \iint dx dp \left(u_a^*(x, p) \times \right. \\ & \times (-i) \left\{ \frac{1}{2m_a} \sum_{j=1}^3 \left(p_j - \frac{e_a}{c} A_j(x) \right)^2 + e_a \Phi(x), u_a(x, p) \right\} + \\ & + u_a^*(x, p) \left[-\frac{e_a}{m_a c} \left(p_j - \frac{e_a}{c} A_j(x) \right) \tilde{A}_j(x) + e_a \tilde{\Phi}(x) \right] u_a(x, p) \Big) - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int dx \left(\sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{c} \dot{A}_j(x) + \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} \right) \left(\frac{1}{c} \dot{\tilde{A}}_j(x) + \frac{\partial \tilde{\Phi}(x)}{\partial x_j} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^3 \left(\frac{\partial A_l(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j(x)}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial \tilde{A}_l(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{A}_j(x)}{\partial x_l} \right) \right). \end{aligned}$$

Гамильтониан, соответствующий $\mathcal{K}$, так же как и в квантовом случае, строится в три этапа. Сначала из уравнений (42)–(45) исключаются циклические переменные $\Phi(x)$ и $\tilde{\Phi}(x)$. Затем получившиеся уравнения ограничиваются на конфигурации, удовлетворяющие калибровочным условиям (45),

$$A_j(x) = \int' dk \sum_{s=1}^2 e_{sj}(k) (a_s(k) e^{ikx} + a_s^*(k) e^{-ikx}),$$

$$\tilde{A}_j(x) = \int' dk \sum_{s=1}^2 e_{sj}(k) (\tilde{a}_s(k) e^{ikx} + \tilde{a}_s^*(k) e^{-ikx})$$

(где $e_{sj}(k)$ имеют тот же смысл, что и в (39)), и вычисляется преобразование Лежандра по скоростям

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \operatorname{Re} \dot{a}_s(k), \sqrt{2} \operatorname{Im} \dot{a}_s(k), \sqrt{2} \operatorname{Re} \dot{\tilde{a}}_s(k), \sqrt{2} \operatorname{Im} \dot{\tilde{a}}_s(k) \rightarrow \\ & \rightarrow \sqrt{2} \operatorname{Re} b_s(k), \sqrt{2} \operatorname{Im} b_s(k), \sqrt{2} \operatorname{Re} \tilde{b}_s(k), \sqrt{2} \operatorname{Im} \tilde{b}_s(k). \end{aligned}$$

Наконец, осуществляется каноническое преобразование

$$\begin{aligned} a_s(k) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{|k|}} \left(\mathcal{A}_s(k) + e_{sj}(k) \sum_{r=1}^2 e_{rj}(-k) \mathcal{A}_r^*(-k) \right), \\ \tilde{a}_s(k) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{|k|}} \left(\tilde{\mathcal{A}}_s(k) + e_{sj}(k) \sum_{r=1}^2 e_{rj}(-k) \tilde{\mathcal{A}}_r^*(-k) \right), \\ b_s(k) &= i\pi \sqrt{\frac{c}{|k|}} \left(-\mathcal{A}_s(k) + e_{sj}(k) \sum_{r=1}^2 e_{rj}(-k) \mathcal{A}_r^*(-k) \right), \\ \tilde{b}_s(k) &= i\pi \sqrt{\frac{c}{|k|}} \left(-\tilde{\mathcal{A}}_s(k) + e_{sj}(k) \sum_{r=1}^2 e_{rj}(-k) \tilde{\mathcal{A}}_r^*(-k) \right), \end{aligned}$$

в результате которого вектор-потенциалы $A_j(x)$ и $\tilde{A}_j(x)$ принимают вид

$$\begin{aligned} A_j(x) &= \sum_{s=1}^2 \int dk \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{|k|}} e_{sj}(k) (e^{ikx} \mathcal{A}_s(k) + e^{-ikx} \mathcal{A}_s^*(k)), \\ \tilde{A}_j(x) &= \sum_{s=1}^2 \int dk \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{|k|}} e_{sj}(k) (e^{ikx} \tilde{\mathcal{A}}_s(k) + e^{-ikx} \tilde{\mathcal{A}}_s^*(k)), \end{aligned}$$

а гамильтониан —

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(u^*, u, \mathcal{A}^*, \mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}}^*, \tilde{\mathcal{A}}) &= \sum_{a=1}^{a_0} \iint dx dp \left(u_a^*(x, p) \times \right. \\ & \times (-i) \left\{ \frac{1}{2m_a} \sum_{j=1}^3 \left(p_j - \frac{e_a}{c} A_j(x) \right)^2 + e_a \Phi(x), u_a(x, p) \right\} + \\ & + u_a^*(x, p) \left[-\frac{e_a}{m_a c} \left(p_j - \frac{e_a}{c} A_j(x) \right) \tilde{A}_j(x) + e_a \tilde{\Phi}(x) \right] u_a(x, p) \Big) + \\ & + c \sum_{s=1}^2 \int dk |k| (\tilde{\mathcal{A}}_s^*(k) \mathcal{A}_s(k) + \mathcal{A}_s^*(k) \tilde{\mathcal{A}}_s(k)). \end{aligned}$$

Нетривиальные фундаментальные скобки Пуассона даются формулами

$$\begin{aligned}\langle u(x, p), u^*(\xi, \eta) \rangle &= i\delta(x - \xi)\delta(p - \eta), \\ \langle \mathcal{A}_s(x), \mathcal{A}_r^*(y) \rangle &= i\delta_{rs}\delta(x - y), \\ \langle \tilde{\mathcal{A}}_s(x), \tilde{\mathcal{A}}_r^*(y) \rangle &= i\delta_{rs}\delta(x - y).\end{aligned}$$

Остальные скобки равны нулю.

В качестве аналога уравнения (1) теперь следует взять уравнение

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) &= \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{H}(\sqrt{\varepsilon}u^+, \sqrt{\varepsilon}u^-, \sqrt{\varepsilon}\mathcal{A}^+, \sqrt{\varepsilon}\mathcal{A}^-, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\mathcal{A}}^+, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\mathcal{A}}^-)\Psi(t), \\ \Psi(t) \in \Gamma &:= \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))^{\otimes a_0} \otimes \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})) \otimes \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})),\end{aligned}$$

где $u_a^\pm(x, p)$, $\mathcal{A}^\pm(x)$ и $\tilde{\mathcal{A}}^\pm(x)$ – операторы рождения–уничтожения в Γ . Асимптотические решения этого уравнения можно построить с помощью метода комплексного роста.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Л. Д. Фаддееву, обратившему их внимание на важность формулы (41).

Список литературы

- [1] V. P. Maslov, O. Yu. Shvedov. Russ. J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 2. P. 217–234.
- [2] Ф. А. Березин. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [3] В. П. Маслов. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [4] В. А. Рубаков. Классические калибровочные поля. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
- [5] В. П. Маслов. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
- [6] М. В. Карасев, В. П. Маслов. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [7] V. P. Maslov, O. Yu. Shvedov. Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 1. P. 65–80.
- [8] L. D. Faddeev, A. J. Niemi. Magnetic geometry and confinement of electrically conducting plasmas. physics/0003083.
- [9] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов. ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 310–329.
- [10] В. Гайтлер. Квантовая теория излучения. М.: ИЛ, 1956.
- [11] Х. Хакен. Квантовополевая теория твердого тела. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 25.VII.2000 г.