Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Ахиезер, Л. Н. Давыдов, С. В. Пелетминский, К кинетической теории магнитной гидродинамики нейтронной материи, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 3, 471–490

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf680>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 15:08:36

© 2000 г. А. И. Ахиезер, Л. Н. Давыдов*, С. В. Пелетминский*

К КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ НЕЙТРОННОЙ МАТЕРИИ

В микроскопическом подходе, основанном на теории ферми-жидкости Ландау, выведены уравнения магнитной гидродинамики нейтронной материи, в которых, наряду с сильными короткодействующими ядерными взаимодействиями, учитываются слабые дальнедействующие магнитные взаимодействия. Рассмотрены приложения полученных уравнений магнитной гидродинамики к теории ударных волн в нейтронной материи.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] на основе феноменологического подхода были построены уравнения магнитной гидродинамики нейтронной материи, в которых, наряду с сильными короткодействующими ядерными взаимодействиями, учитывались слабые дальнедействующие магнитные взаимодействия. В данной работе на основе ферми-жидкостного подхода Ландау дан микроскопический вывод этих уравнений, а также рассмотрены приложения полученных уравнений магнитной гидродинамики к теории ударных волн в нейтронной материи.

Основополагающую роль в ферми-жидкостном подходе Ландау играет энергия системы, которая является функционалом одночастичной матрицы плотности квазичастиц. В работе сформулированы и широко используются свойства симметрии функционала энергии по отношению к преобразованиям пространственных трансляций и пространственных поворотов. Кроме того, важную роль при построении гидродинамики играет интеграл столкновений квазичастиц. В работе сформулированы наиболее общие свойства интеграла столкновений, приводящего в процессе эволюции к формированию квазиравновесного состояния квазичастиц, которое определяется не только пространственно-неоднородным распределением обычных гидродинамических параметров, но и пространственно-неоднородным распределением магнитных моментов.

На основе этого квазиравновесного состояния найдены выражения для плотностей потоков всех гидродинамических параметров с учетом слабых магнитных взаимодействий. Найдены ограничения, налагаемые на уравнения магнитной гидродинамики требованием галилеевой инвариантности теории.

* Национальный научный центр “Харьковский физико-технический институт”, Харьков, Украина

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ ЛАНДАУ

Как известно, состояние ферми-жидкости характеризуется одночастичной матрицей плотности $f_{\kappa\kappa'}$, где $\kappa = (\mathbf{p}, \sigma)$ – квантовые числа, описывающие состояние квазичастиц ($\mathbf{p}$ – импульс и σ – проекция спина). Для описания состояния системы (как равновесного, так и неравновесного) необходимо задать энергию ферми-жидкости как функционал одночастичной матрицы плотности. Этот функционал играет роль гамильтониана в обычной микроскопической теории. Равновесное состояние ферми-жидкости соответствует максимуму комбинаторной энтропии

$$S(\hat{f}) = -\text{Sp}[\hat{f} \ln \hat{f} + (1 - \hat{f}) \ln(1 - \hat{f})] \quad (2.1)$$

при фиксированном функционале энергии $E(\hat{f})$ и фиксированных аддитивных интегралах движения $\gamma_\alpha(\hat{f}) = \text{Sp} \hat{f} \hat{\gamma}_\alpha$, где $\hat{\gamma}_\alpha$ – операторы аддитивных интегралов движения ($\hat{\gamma}_k = \hat{p}_k$ ($k = 1, 2, 3$) – оператор импульса, $\hat{\gamma}_4 = 1$ – оператор числа квазичастиц). Здесь $\hat{f}$ – статистический оператор, соответствующий матрице плотности $f_{\kappa\kappa'}$. Задаче на условный максимум функционала $S(\hat{f})$ соответствует задача определения безусловного минимума функционала

$$\Omega(\hat{f}) = -S(\hat{f}) + \beta E(\hat{f}) + Y_\alpha \gamma_\alpha(\hat{f}), \quad (2.2)$$

где $\beta = T^{-1}$ и Y_α – множители Лагранжа (T – температура, $\mu = -Y_4/\beta$ – химический потенциал, $v_k = -Y_k/\beta$ ($k = 1, 2, 3$) – скорость). Решение этой задачи дается выражением

$$\hat{f} = \left[\exp[\beta \hat{\varepsilon}(\hat{f}) + Y_\alpha \hat{\gamma}_\alpha(\hat{f})] + 1 \right]^{-1}, \quad (2.3)$$

где матричный элемент оператора $\hat{\varepsilon}(\hat{f})$ определяется формулой

$$\varepsilon_{\kappa\kappa'} = \frac{\partial E(\hat{f})}{\partial f_{\kappa\kappa'}}. \quad (2.4)$$

Для описания неравновесных процессов в ферми-жидкости в приближении $\omega\tau \gg 1$ (ω – характерная частота исследуемых процессов, τ – время релаксации), когда можно пренебречь интегралом столкновений, используется кинетическое уравнение

$$i \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} - [\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{f}] = 0. \quad (2.5)$$

Для формулировки свойств симметрии функционала энергии по отношению к тем или иным преобразованиям введем функционал плотности энергии $E(\mathbf{x}, \hat{f})$, связанный с функционалом энергии $E(\hat{f})$ ферми-жидкости формулой

$$E(\hat{f}) = \int d^3x E(\mathbf{x}, \hat{f}). \quad (2.6)$$

Будем говорить, что этот функционал инвариантен по отношению к преобразованию трансляции, если

$$E(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \hat{f}) = E(\mathbf{x}, e^{i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}} \hat{f} e^{-i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}}), \quad (2.7)$$

где $\mathbf{y}$ – произвольный вектор трансляции.

Функционал плотности энергии $E(\mathbf{x}, \hat{f})$ будет инвариантен относительно пространственных поворотов, если выполняется следующее соотношение:

$$E(\mathbf{x}, \hat{f}) = E(\hat{a}\mathbf{x}, U^+(a)\hat{f}U(a)), \quad (2.8)$$

где $\hat{a}$ – матрица ортогональных поворотов и унитарный оператор $U(a)$ определяется из соотношения $U\hat{x}_iU^+ = a_{ik}\hat{x}_k$ ($\hat{x}_i$ – оператор координаты). В случае бесконечно малых поворотов

$$a_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon_{ik}, \quad U(a) = 1 - \frac{i}{2}\varepsilon_{ik}J_{ik},$$

где J_{ik} – полный момент количества движения квазичастицы,

$$\hat{J}_{ik} = \varepsilon_{ikl}\hat{J}_l, \quad \hat{J}_l = \hat{L}_l + \hat{S}_l. \quad (2.9)$$

Здесь $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$ – орбитальный момент количества движения, $\hat{\mathbf{S}}$ – спиновый момент количества движения квазичастицы, ε_{ikl} – единичный антисимметричный тензор.

Перечисленные свойства симметрии функционала энергии всегда выполняются в отсутствие внешних полей, т.к. они связаны со свойствами симметрии пространства по отношению к трансляциям и поворотам. Однако функционал энергии в пренебрежении обменными релятивистскими взаимодействиями (такими, как спин-орбитальное и магнитодипольное взаимодействия) по сравнению с ядерными взаимодействиями может обладать дополнительными свойствами симметрии, связанными, например, с инвариантностью относительно поворотов спинов (спиновая инвариантность),

$$E(\mathbf{x}, \hat{f}) = E(\mathbf{x}, e^{i\omega_i S_i} \hat{f} e^{-i\omega_i S_i}), \quad (2.10)$$

где ω_i – произвольный вектор поворота спинов.

Введем оператор плотности энергии квазичастицы

$$\varepsilon_{\kappa\kappa'}(\mathbf{x}, \hat{f}) = \frac{\partial E(\mathbf{x}, \hat{f})}{\partial f_{\kappa'\kappa}}. \quad (2.11)$$

Эта величина связана с оператором энергии квазичастицы $\hat{\varepsilon}(\hat{f})$ соотношением

$$\hat{\varepsilon}(\hat{f}) = \int d^3x \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}). \quad (2.12)$$

С помощью введенной величины $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})$ легко сформулировать инфинитезимальные свойства рассмотренных симметрий. Так, в случае пространственных трансляций согласно (2.7) имеем

$$i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}), p_k] = \frac{\partial E(\mathbf{x})}{\partial x_k}. \quad (2.13)$$

В случае пространственных вращений согласно (2.8)

$$i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}), J_i] = \varepsilon_{ikl} x_k \frac{\partial E(\mathbf{x})}{\partial x_l}. \quad (2.14)$$

Если пренебречь релятивистским взаимодействием, то в соответствии с (2.10) имеем

$$i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}), S_i] = 0. \quad (2.15)$$

Кроме того, варьируя соотношения (2.7) и (2.10) по матрице плотности $f_{\kappa\kappa'}$, получим в случае пространственных трансляций

$$e^{-i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}}\varepsilon(\mathbf{x}, e^{i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}}\hat{f}e^{-i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}})e^{i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}} = \varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \hat{f}) \quad (2.16)$$

и в случае спиновых вращений

$$e^{-i\omega_i\hat{S}_i}\varepsilon(\mathbf{x}, e^{i\omega_i\hat{S}_i}\hat{f}e^{-i\omega_i\hat{S}_i})e^{i\omega_i\hat{S}_i} = \varepsilon(\mathbf{x}, \hat{f}). \quad (2.17)$$

Подчеркнем, что соотношения (2.13)–(2.17) должны выполняться для произвольного статистического оператора $\hat{f}$. Эти соотношения будут нами использованы в дальнейшем для получения плотностей потоков аддитивных интегралов движения и соответствующих им законов сохранения, связанных с указанными свойствами симметрии.

3. УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ НЕЙТРОННОЙ МАТЕРИИ

Мы в дальнейшем будем интересоваться низкочастотными явлениями в ферми-жидкости, когда $\omega\tau \ll 1$. В этом случае неприменимо кинетическое уравнение (2.5), которое справедливо в области $\omega\tau \gg 1$, и необходимо учитывать столкновения между квазичастицами, т.е. дополнить уравнение (2.5) интегралом столкновений $I(\hat{f})$ [2]. Поэтому кинетическое уравнение примет вид

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + i[\hat{\varepsilon}(\hat{f}) + \hat{\varepsilon}'(\hat{f}), \hat{f}] = I(\hat{f}), \quad (3.1)$$

где $\hat{\varepsilon}(\hat{f})$ – энергия квазичастицы, обусловленная ядерными взаимодействиями (которые мы будем предполагать не зависящими от спинов), а $\hat{\varepsilon}'(\hat{f})$ – более слабыми магнитными взаимодействиями. Интеграл столкновений $I(\hat{f})$ обусловлен только сильным ядерным взаимодействием.

В дальнейшем мы не будем интересоваться диссипативными гидродинамическими процессами, поэтому для получения уравнений идеальной гидродинамики не нужна явная структура интеграла столкновений, а будут необходимы только его некоторые общие свойства. Так же как и в случае интеграла столкновений Больцмана, взаимодействие в процессе столкновений носит локальный характер, в силу чего среднее значение плотности аддитивных интегралов движения $\hat{a}(\mathbf{x})$ и плотности энергии квазичастиц $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})$ не будут меняться в процессе столкновений, т.е.

$$\text{Sp } \hat{a}(\mathbf{x})I(\hat{f}) = 0, \quad \text{Sp } \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})I(\hat{f}) = 0, \quad (3.2)$$

где величины $\hat{a}(\mathbf{x})$ означают либо оператор плотности числа квазичастиц

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \quad (3.3)$$

($\hat{\mathbf{x}}$ – оператор координаты), либо оператор плотности импульса

$$\hat{\pi}_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\{\hat{p}_i, \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\} \quad (3.4)$$

($\hat{p}_i$ – оператор импульса), либо оператор плотности спина

$$\hat{s}_i(\mathbf{x}) = \hat{S}_i \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \quad (3.5)$$

($\hat{S}_i$ – оператор спина).

Сделаем несколько общих замечаний об используемых нами понятиях. Теория ферми-жидкости была бы неполной, если бы в ней, наряду с одночастичным статистическим оператором $\hat{f}$, не вводились вполне определенные операторы различных физических величин. Как известно, состояние ферми-жидкости описывается одночастичной матрицей плотности $f_{p_1, p_2} \equiv \langle \mathbf{p}_1 | \hat{f} | \mathbf{p}_2 \rangle$, где $|\mathbf{p}\rangle$ – собственный вектор квазичастицы с определенным импульсом $\hat{p}_i |\mathbf{p}\rangle = p_i |\mathbf{p}\rangle$ (здесь для простоты мы опускаем индекс спина) и $\hat{f}$ – одночастичный статистический оператор (не зависящий от выбора квантово-механического представления). Наряду с матрицей плотности в импульсном представлении часто используется вигнеровская функция распределения в фазовом пространстве

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}'} e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{x}} \left\langle \mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}'}{2} \left| \hat{f} \right| \mathbf{p} - \frac{\mathbf{p}'}{2} \right\rangle, \quad (3.6)$$

причем величина $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ интерпретируется как “функция распределения” квазичастиц в фазовом пространстве $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, а величина $\int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}$ – как плотность квазичастиц. Оператор координаты квазичастицы мы определяем формулой $[\hat{p}_i, \hat{x}_i] = -i\delta_{ik}$. Тогда собственный вектор оператора координаты $\hat{x}_i |\mathbf{x}\rangle = x_i |\mathbf{x}\rangle$ связан с собственным вектором $|\mathbf{p}\rangle$ оператора импульса соотношением

$$|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} |\mathbf{p}\rangle.$$

Используя эту формулу и формулу (3.6), легко найти, что

$$\int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = \langle \mathbf{x} | \hat{f} | \mathbf{x} \rangle, \quad \int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{p} | \hat{f} | \mathbf{p} \rangle$$

или

$$\int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} = \text{Sp } \hat{f} \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}).$$

Так как в полуфеноменологической теории ферми-жидкости Ландау левая часть последнего равенства трактуется как плотность числа квазичастиц, то операторы $\hat{\mathbf{x}}$ и $\delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$ должны трактоваться как оператор координаты и оператор плотности числа квазичастиц, соответственно.

Подчеркнем, что соотношения (3.2) справедливы при произвольном статистическом операторе $\hat{f}$. Кроме того, мы будем предполагать, что интеграл столкновений обращается в нуль:

$$I(\hat{f}) = 0, \quad (3.7)$$

для квазиравновесного статистического оператора. Последний определяется как решение функционального уравнения, в котором учтены только ядерные взаимодействия

$$\hat{f} = \left\{ \exp \beta \left[\hat{\varepsilon}(\hat{f}) - \mu - \hat{\mathbf{p}}\mathbf{v} - \hat{\mathbf{m}}\hat{\mathbf{h}} \right] + 1 \right\}^{-1}, \quad \hat{m}_i = \mu_f \hat{S}_i, \quad (3.8)$$

где $\mathbf{v}$ – скорость ферми-жидкости и $\tilde{\mathbf{h}}$ – термодинамическая переменная, определяющая магнитный момент $\mathbf{m}$ аналогично тому, как β и μ определяют энергию и число квазичастиц ферми-жидкости. В отличие от равновесной матрицы плотности (2.3), матрица плотности (3.8) является квазиравновесной и соответствует равновесию, обусловленному только ядерными взаимодействиями. Благодаря этому, кроме обычных интегралов движения, в (3.8) появляется новый интеграл движения, связанный со спином. Вообще говоря, если бы квазичастицы обладали спином s , то появилось бы $r = (2s + 1)^2$ дополнительных (кроме энергии и импульса) интегралов движения. При $s = 1/2$ имеем $r = 4$ интеграла движения. Это единичный оператор в спиновом пространстве $\hat{I}$, соответствующий термодинамической силе μ , и три оператора проекций спина $\hat{s}_i$, соответствующих силе $\mathbf{h}$ (для бозонов при $s = 1$ имели бы $r = 9$ интегралов движения. Кроме $\hat{I}$ и $\hat{s}_i$ возникает пять интегралов движения, связанных с квадрупольным моментом $\hat{s}_i \hat{s}_k + \hat{s}_k \hat{s}_i - (2/3)\delta_{ik}s(s+1)$). Мы будем рассматривать фермионы со спином $s = 1/2$. Поэтому вместо термина “квазичастица” будем иногда пользоваться термином “фермион”.

В соответствии со сказанным в начале этого раздела, представим плотность энергии ферми-жидкости в виде

$$E_t(\mathbf{x}, \hat{f}) = E(\mathbf{x}, \hat{f}) + E'(\mathbf{x}, \hat{f}), \quad (3.9)$$

где $E(\mathbf{x}, \hat{f})$ – плотность энергии ядерных взаимодействий и

$$E'(\mathbf{x}, \hat{f}) = \frac{\mathbf{h}^2}{8\pi} + \frac{1}{2}\alpha_{ik}\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}R(m^2) - \mathbf{m}\mathbf{H}_0 \quad (3.10)$$

– плотность энергии, обусловленная магнитодипольным взаимодействием, неоднородным и однородным обменными взаимодействиями, а также взаимодействием ферми-жидкости с внешним магнитным полем $\mathbf{H}_0$ [3]. В формуле (3.10)

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}, \hat{f}) = \text{Sp } \hat{f}\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \quad \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \mu_f \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \quad (3.11)$$

α_{ik} – тензор обменных постоянных и $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ – магнитное поле, обусловленное существованием магнитного момента и определяемое уравнениями магнитостатики

$$\text{rot } \mathbf{h} = 0, \quad \text{div}(\mathbf{h} + 4\pi\mathbf{m}) = 0. \quad (3.12)$$

Последние уравнения можно переписать в виде

$$\mathbf{h} = \nabla\varphi, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi\mathbf{m}, \quad (3.13)$$

откуда следует, что

$$\delta \int d^3x \frac{h^2}{8\pi} = \int d^3x \frac{1}{4\pi} \mathbf{h} (\delta \mathbf{b} - 4\pi \delta \mathbf{m}) = - \int d^3x \mathbf{h} \delta \mathbf{m}(\mathbf{x}, t).$$

Поэтому из формул (3.9), (3.10) вытекает соотношение

$$\hat{\varepsilon}'(\hat{f}) = - \int d^3x \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \mathbf{h}^{\text{eff}}, \quad \mathbf{h}^{\text{eff}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} + \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_i \partial x_k} - R(m^2)\mathbf{m}. \quad (3.14)$$

Из кинетического уравнения (3.1) и формул (3.2) следует, что

$$\frac{\partial \zeta_\alpha(\mathbf{x})}{\partial t} = i \text{Sp } \hat{f} \left[\hat{\varepsilon}(\hat{f}) + \hat{\varepsilon}'(\hat{f}), \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) \right], \quad (3.15)$$

где величины $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ соответствуют либо плотности $\hat{\rho}(\mathbf{x})$, либо плотности импульса $\hat{\pi}_i(\mathbf{x})$, либо плотности магнитного момента $\hat{s}_i(\mathbf{x})$. Замечая, что коммутатор $[\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \hat{\rho}(\mathbf{x})] = 0$, имеем

$$\frac{\partial \hat{\rho}(\mathbf{x})}{\partial t} = i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{\rho}(\mathbf{x})]. \quad (3.16)$$

Учитывая, что

$$[\hat{m}_i(\mathbf{x}'), \hat{\pi}_k(\mathbf{x})] = i \hat{m}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x_k},$$

получаем из (3.15) при $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \hat{\pi}_k(\mathbf{x})$ формулу

$$\frac{\partial \pi_k(\mathbf{x})}{\partial t} = i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{\pi}_k(\mathbf{x})] + \mathbf{m}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{h}^{\text{eff}}(x)}{\partial x_k}. \quad (3.17)$$

Полагая далее в (3.15) $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \hat{m}_k(\mathbf{x})$ и учитывая, что

$$[\hat{m}_i(\mathbf{x}'), \hat{m}_k(\mathbf{x})] = \mu_f \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varepsilon_{ikl} \hat{m}_l(\mathbf{x}),$$

имеем

$$\frac{\partial m_k(\mathbf{x})}{\partial t} = i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{m}_k(\mathbf{x})] + \mu_f [\mathbf{m}(\mathbf{x}) \times \mathbf{h}^{\text{eff}}(x)]_k. \quad (3.18)$$

Приведем теперь уравнения (3.16)–(3.18) к виду дифференциальных законов сохранения. Замечая, что

$$\begin{aligned} i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] &= i \text{Sp } \hat{f}\left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}), \int d^3x \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})\right] - \\ &- i \frac{\partial}{\partial x_k} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')], \end{aligned}$$

и используя формулы

$$i \text{Sp } \hat{f}\left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}), \int d^3x \hat{\rho}(\mathbf{x})\right] = 0, \quad (3.19)$$

$$i \text{Sp } \hat{f}\left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}), \int d^3x \hat{\pi}_k(\mathbf{x})\right] = i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}), \hat{p}_k] = \frac{\partial E(\mathbf{x}, \hat{f})}{\partial x_k}, \quad (3.20)$$

$$i \text{Sp } \hat{f}\left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}), \int d^3x \hat{m}_k(\mathbf{x})\right] = 0, \quad (3.21)$$

выражающие свойства симметрии функционала ядерной энергии ферми-жидкости по отношению к пространственным трансляциям и спиновым поворотам (см. (2.13)–(2.15)), получим

$$i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{\rho}(\mathbf{x})] = -\frac{\partial j_l(\mathbf{x})}{\partial x_l}, \quad (3.22)$$

$$i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{\pi}_k(\mathbf{x})] = -\frac{\partial t_{kl}(x)}{\partial x_l}, \quad (3.23)$$

$$i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{m}_k(\mathbf{x})] = -\frac{\partial m_{kl}(\mathbf{x})}{\partial x_l}, \quad (3.24)$$

где

$$j_k(\mathbf{x}) = i \int d^3 x' x'_k \int_0^1 d\xi \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\rho}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')], \quad (3.25)$$

$$t_{kl}(\mathbf{x}) = -E(\mathbf{x}, \hat{f}) \delta_{kl} + i \int d^3 x' x'_l \int_0^1 d\xi \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\pi}_k(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')], \quad (3.26)$$

$$m_{kl}(\mathbf{x}) = i \int d^3 x' x'_l \int_0^1 d\xi \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{m}_k(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')]. \quad (3.27)$$

Получим теперь уравнения для плотности энергии ферми-жидкости, обусловленной ядерным взаимодействием $E(\mathbf{x}, \hat{f})$. Согласно определению (2.11) имеем

$$\frac{\partial E(\mathbf{x}, \hat{f})}{\partial t} = \operatorname{Sp} \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}) \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}. \quad (3.28)$$

Замечая, далее, что $\operatorname{Sp} \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}) I(\hat{f}) = 0$, и используя кинетическое уравнение (3.1), получаем

$$\frac{\partial E(\mathbf{x})}{\partial t} = i \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})] - i \int d^3 x' \mathbf{h}^{\text{eff}}(\mathbf{x}') \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{x}'), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})]. \quad (3.29)$$

Для вывода дифференциального закона сохранения энергии с источником, обусловленным магнитным взаимодействием, заметим, что

$$\begin{aligned} i \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})] &= i \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}), \hat{\varepsilon}(\hat{f})] - \\ &- i \frac{\partial}{\partial x_k} \int d^3 x' x'_k \int_0^1 d\xi \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}', \hat{f})], \end{aligned} \quad (3.30)$$

откуда следует соотношение

$$\begin{aligned} i \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})] &= \\ &= -i \frac{\partial}{\partial x_k} \int d^3 x' x'_k \int_0^1 d\xi \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}', \hat{f})]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Поэтому согласно (3.29) находим

$$\frac{\partial E(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial q_k(\mathbf{x})}{\partial x_k} = -i \int d^3 x' \mathbf{h}^{\text{eff}}(\mathbf{x}') \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{x}'), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})], \quad (3.32)$$

где

$$q_k(\mathbf{x}) = \frac{i}{2} \int d^3 x' x'_k \int_0^1 d\xi \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}', \hat{f})]. \quad (3.33)$$

Так как функция $\operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})]$ имеет резкий максимум при $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, а функция $\mathbf{h}^{\text{eff}}(\mathbf{x}')$ медленно меняется по переменной $\mathbf{x}'$, правую часть равенства (3.32) можно представить в виде

$$-i \int d^3 x' \mathbf{h}^{\text{eff}}(\mathbf{x}') \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{x}'), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})] = i \frac{\partial \mathbf{h}^{\text{eff}}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\mathbf{m}}(0), \hat{\varepsilon}_k(\hat{f})], \quad (3.34)$$

где

$$\hat{\varepsilon}_k(\hat{f}) = \int d^3x x_k \hat{\varepsilon}(x, \hat{f}) \quad (3.35)$$

(при получении последней формулы мы предположили, что $[\hat{f}, \hat{p}_k] = 0$, см. далее). Таким образом, уравнения (3.16)–(3.18) и (3.32) с учетом (3.22)–(3.27) и (3.34) могут быть представлены в виде дифференциальных законов сохранения с магнитными источниками

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial j_k(\mathbf{x})}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \pi_k(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial t_{kl}(\mathbf{x})}{\partial x_l} = \mathbf{m}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{h}^{\text{eff}}(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial m_k(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial m_{kl}(\mathbf{x})}{\partial x_l} = \mu_f [\mathbf{m}(\mathbf{x}) \times \mathbf{h}^{\text{eff}}(\mathbf{x})]_k, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial E(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial q_k(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial h_l^{\text{eff}}(\mathbf{x})}{\partial x_k} m_{lk}. \quad (3.38)$$

Последнее уравнение следует из того, что, как будет показано в следующем разделе,

$$i \text{Sp } \hat{f} [\hat{m}_l(0), \hat{\varepsilon}_k(\hat{f})] = m_{lk}. \quad (3.39)$$

4. ПОТОКИ АДДИТИВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ЯДЕРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Формулы (3.25)–(3.27) и (3.33) для потоков значительно упрощаются в случае приближения малых неоднородностей. Для получения дифференциальных законов сохранения аддитивных интегралов движения в приближении, линейном по пространственным градиентам (уравнения идеальной гидродинамики), достаточно найти плотности потоков для пространственно-однородной матрицы плотности,

$$[\hat{f}, p_k] = 0,$$

и считать после этого термодинамические параметры $\rho(\mathbf{x})$, $\pi(\mathbf{x})$, $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ медленно меняющимися функциями координат и времени.

Дадим некоторое разъяснение этого утверждения. Согласно функциональной гипотезе Боголюбова [4], при временах t , много больших времени однородной релаксации τ , статистический оператор $\hat{f}(t)$ становится универсальным функционалом гидродинамических параметров $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)$:

$$\hat{f}(t) \xrightarrow[t \gg \tau]{} \hat{f}(\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t)), \quad (4.1)$$

причем, согласно определению параметров $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$,

$$\text{Sp } \hat{f}(\zeta_\alpha(\mathbf{x}')) \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}). \quad (4.2)$$

Замечая, что $e^{-i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}} \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) e^{i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}} = \zeta_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y})$, из этих соотношений и кинетического уравнения (3.1) имеем

$$e^{i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}} \hat{f}(\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}')) e^{-i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}} = \hat{f} \zeta_\alpha(\mathbf{x}' + \mathbf{y}). \quad (4.3)$$

При вычислении средних $\text{Sp } \hat{f}(\zeta_\alpha(\mathbf{x}')) \hat{a}(\mathbf{x})$ (где $\hat{a}(\mathbf{x})$ – оператор плотности некоторой величины $\hat{a}$, например оператор плотности потока одной из величин ζ_α) главный вклад в след дают те значения $\mathbf{x}'$, которые близки к $\mathbf{x}$. Поэтому, полагая

$$\zeta_\alpha(\mathbf{x}') = \zeta_\alpha(\mathbf{x}) + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \frac{\partial \zeta_\alpha(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \dots,$$

получим разложение функционала $\hat{f}$ по градиентам параметров $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\zeta_\alpha(\mathbf{x}')) &= \hat{f}_0(\mathbf{x}) + \hat{f}_1(\mathbf{x}) + \dots, \\ \hat{f}_0(\mathbf{x}) &= \hat{f}(\zeta_\alpha(\mathbf{x})), \quad \hat{f}_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial \zeta_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_k} \hat{g}_{\alpha k}(\zeta_\beta(\mathbf{x})), \quad \dots\end{aligned}$$

($\hat{g}_{\alpha k}$ — некоторые функции $\zeta_\beta(\mathbf{x})$). Подставляя это разложение в (4.3), имеем

$$e^{i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}}(\hat{f}_0(\mathbf{x}) + \hat{f}_1(\mathbf{x}) + \dots)e^{-i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}} = \hat{f}_0(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \hat{f}_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \dots,$$

откуда, дифференцируя по $\mathbf{y}$, полагая $\mathbf{y} = 0$ и отбирая члены одинакового порядка по градиентам, получим

$$i[\hat{p}_k, \hat{f}_0(\mathbf{x})] = 0, \quad i[\hat{p}_k, \hat{f}_1(\mathbf{x})] = \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad \dots \quad (4.4)$$

Первое из этих соотношений доказывает наше утверждение, т.к. $\hat{f}_0(\mathbf{x}) = \hat{f}(\zeta(\mathbf{x}))$.

Замечая, что в пространственно-однородном случае

$$\text{Sp } \hat{f}[\varepsilon(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')] = \text{Sp } \hat{f}[\varepsilon(-\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\zeta}_\alpha(0)],$$

имеем

$$j_k = -i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}_k(\hat{f}), \hat{\rho}(0)], \quad (4.5)$$

$$t_{kl} = -E\delta_{kl} - i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}_l(\hat{f}), \hat{\pi}_k(0)], \quad (4.6)$$

$$m_{kl} = -i \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}_l(\hat{f}), \hat{m}_k(0)], \quad (4.7)$$

$$q_k = -\frac{i}{2} \text{Sp } \hat{f}[\hat{\varepsilon}_k(\hat{f}), \hat{\varepsilon}(0, \hat{f})], \quad (4.8)$$

где оператор $\hat{\varepsilon}_k(\hat{f})$ определяется формулой (3.35). Заметим, что формула (4.7) доказывает формулу (3.39). Используя (2.16), в пространственно-однородном случае имеем

$$e^{-i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}}\varepsilon(\mathbf{x}, \hat{f})e^{i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{y}} = \varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \hat{f}).$$

Дифференцируя это соотношение по y_k и полагая $\mathbf{y} = 0$, получаем

$$-i[\hat{p}_k, \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})] = \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})}{\partial x_k}.$$

Отсюда следует, что

$$i[\hat{p}_k, \hat{\varepsilon}_l(\hat{f})] = \delta_{kl}\hat{\varepsilon}(\hat{f}).$$

Поэтому, замечая, что матрица $\hat{\varepsilon}(\hat{f})$ единична в спиновом пространстве (в силу предположения о независимости ядерных сил от спина) и коммутирует с оператором импульса (в силу предположения о пространственной однородности), имеем

$$i[\hat{f}, \hat{\varepsilon}_l(\hat{f})] = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{p}_l}\varepsilon(\hat{f}). \quad (4.9)$$

Используя выражение (4.5) для j_l , из (4.9) находим

$$j_l = -\text{Sp} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{p}_l} \varepsilon(\hat{f}) \hat{\rho}(0),$$

или вследствие пространственной однородности

$$j_l = -\frac{1}{V} \text{Sp} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{p}_l} \hat{\varepsilon}(\hat{f}).$$

Интегрируя при вычислении следа по частям, получаем окончательно выражение для потока плотности квазичастиц ферми-жидкости

$$j_l = \frac{1}{V} \text{Sp} \hat{f} \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\hat{f})}{\partial \hat{p}_l}. \quad (4.10)$$

Используя аналогичные вычисления, находим потоки плотности импульса, магнитного момента и энергии:

$$t_{kl} = -\left(E - \frac{1}{V} \text{Sp} \hat{f} \hat{\varepsilon}(\hat{f})\right) \delta_{kl} + \frac{1}{V} \text{Sp} \hat{f} \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\hat{f})}{\partial \hat{p}_l} p_k, \quad (4.11)$$

$$m_{kl} = \frac{1}{V} \text{Sp} \hat{f} \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\hat{f})}{\partial \hat{p}_l} \hat{m}_k, \quad (4.12)$$

$$q_k = \frac{1}{V} \text{Sp} \hat{f} \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\hat{f})}{\partial \hat{p}_k} \hat{\varepsilon}(\hat{f}). \quad (4.13)$$

Эти формулы для потоков справедливы для любой пространственно-однородной матрицы плотности и имеют довольно наглядный вид, если учесть, что величина $\partial \hat{\varepsilon}(\hat{f}) / \partial \hat{p}_k$ является групповой скоростью квазичастиц.

Матрица плотности, входящая в (4.10)–(4.13), определяется формулой (3.8) и реализуется минимум функционала Ω_0 , обусловленного только ядерным взаимодействием,

$$\Omega_0 = -S(\hat{f}) + \beta[E(\hat{f}) - \mu \text{Sp} \hat{f} - \mathbf{v} \text{Sp} \hat{f} \hat{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{h}} \text{Sp} \hat{f} \hat{\mathbf{m}}]. \quad (4.14)$$

Вводя вместо термодинамических переменных β , v_k ($k = 1, 2, 3$), μ и $\tilde{h}_a$ ($a = 5, 6, 7$) новые термодинамические переменные

$$Y_0 = \beta, \quad Y_k = -\beta v_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad Y_4 = -\beta \mu, \quad Y_a = -\beta \tilde{h}_a \quad (a = 5, 6, 7), \quad (4.15)$$

этот потенциал можно переписать в виде

$$\Omega_0(\hat{f}) = -S(\hat{f}) + Y_0 E(\hat{f}) + Y_k \text{Sp} \hat{f} \hat{p}_k + Y_4 \text{Sp} \hat{f} + Y_a \text{Sp} \hat{f} \hat{m}_a. \quad (4.16)$$

Так как состоянию статистического равновесия, согласно ранее сказанному, соответствует минимум термодинамического потенциала $\Omega_0(\hat{f})$ при фиксированных Y , то

$$\delta_f \Omega_0(\hat{f}) = 0, \quad \hat{f} = \hat{f}_0(Y). \quad (4.17)$$

Отсюда следует, что для плотности равновесного термодинамического потенциала справедливо соотношение

$$\zeta_\alpha = \frac{\partial \omega(Y)}{\partial Y_\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, 7, \quad (4.18)$$

где $\zeta_0 = E$ – плотность энергии, $\zeta_k = \pi_k$ ($k = 1, 2, 3$) – плотность импульса, $\zeta_4 = \rho$ – плотность числа квазичастиц и $\zeta_a = m_a$ ($a = 5, 6, 7$) – плотность магнитного момента.

Найдем, наконец, плотности потоков в состоянии, описываемом матрицей плотности (3.8). Введем с этой целью функцию $f(z) = (e^z + 1)^{-1}$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln(1 - f(z)) = f(z). \quad (4.19)$$

Согласно (3.8)

$$\hat{f} = f(z), \quad z = \beta[\hat{\varepsilon}(\hat{f}) - \mu - \hat{\mathbf{p}}\mathbf{v} - \hat{\mathbf{m}}\tilde{\mathbf{h}}]. \quad (4.20)$$

Тогда из (4.10) следует

$$j_l = \frac{1}{\beta V} \text{Sp} \hat{f} \frac{\partial(z + \beta(\mu + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{v} + \hat{\mathbf{m}}\tilde{\mathbf{h}}))}{\partial p_l} = \frac{1}{V} v_l \text{Sp} \hat{f} + \frac{1}{\beta V} \text{Sp} \frac{\partial z}{\partial p_k} \frac{d}{dz} \ln(1 - \hat{f}(z)).$$

По теореме Гаусса второе слагаемое в правой части этого выражения исчезает, и мы получаем

$$j_l = n v_l, \quad (4.21)$$

где $n = N/V$ – плотность числа квазичастиц ферми-жидкости.

Аналогичным образом находим

$$\text{Sp} \hat{f} p_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_l} = v_l \pi_k + \frac{1}{\beta V} \text{Sp} p_k \frac{\partial z}{\partial p_l} \frac{d}{dz} \ln(1 - \hat{f}(z)) \quad (4.22)$$

или, интегрируя по частям,

$$\text{Sp} \hat{f} p_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_l} = v_l \pi_k - \delta_{lk} \frac{1}{\beta V} \text{Sp} \ln(1 - \hat{f}(z)) \quad (4.23)$$

и, следовательно,

$$t_{kl} = v_l \pi_k + \delta_{lk} \left[\frac{1}{V} \text{Sp} \hat{f} \hat{\varepsilon}(\hat{f}) - E - \frac{1}{\beta V} \text{Sp} \ln(1 - \hat{f}(z)) \right]. \quad (4.24)$$

Подобным же образом нетрудно показать, что

$$q_l = v_l \left(\frac{1}{V} \text{Sp} \hat{f} \hat{\varepsilon}(\hat{f}) - \frac{1}{\beta V} \text{Sp} \ln(1 - \hat{f}(z)) \right), \quad (4.25)$$

$$m_{kl} = m_k v_l. \quad (4.26)$$

С другой стороны, из (4.14) вытекает, что потенциал $\omega = \Omega_0/V$ можно представить в виде

$$\omega = \frac{1}{V} \text{Sp} \ln(1 - \hat{f}) + \beta \left(E - \frac{1}{V} \text{Sp} \hat{f} \hat{\varepsilon}(\hat{f}) \right). \quad (4.27)$$

Поэтому формулы (4.21), (4.24)–(4.26) можно переписать в виде

$$j_l = n v_l, \quad t_{lk} = v_k \pi_l - \frac{\omega}{\beta} \delta_{lk}, \quad q_l = v_l \left(E - \frac{\omega}{\beta} \right), \quad m_{kl} = m_k v_l, \quad (4.28)$$

так что величину $-\omega/\beta = P$ следует интерпретировать как давление, а величину $E - \omega/\beta$ – как плотность энтальпии.

Из (4.28) и (4.18) следует, что потоки физических величин $\zeta_{\alpha k}$ можно представить в виде

$$\zeta_{\alpha k} = -\frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{\omega Y_k}{Y_0}, \quad (4.29)$$

где $\zeta_{0k} = q_k$, $\zeta_{1k} = t_{1k}$, $\zeta_{4k} = j_k$, $\zeta_{ak} = m_{ak}$. Поэтому уравнения гидродинамики нейтронной материи имеют вид

$$\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_{\alpha k}}{\partial x_k} = X_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, 7, \quad (4.30)$$

где

$$X_0 = \frac{\partial h_i^{\text{eff}}}{\partial x_k} m_i v_k, \quad X_k = \frac{\partial h_i^{\text{eff}}}{\partial x_k} m_i, \quad X_4 = 0, \quad X_a = \mu_f [\mathbf{m} \times \mathbf{h}^{\text{eff}}]_a, \quad (4.31)$$

причем в согласии с принципом локального статистического равновесия величины ζ_α и $\zeta_{\alpha k}$ зависят от $\mathbf{x}$ и t только посредством медленно меняющихся параметров $Y_\alpha(\mathbf{x}, t)$ (см. (4.18)).

5. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГАЛИЛЕЯ

Будем говорить, что ферми-жидкость обладает свойством галилеевой инвариантности, если функционал плотности энергии удовлетворяет соотношению

$$E(\mathbf{x}, U_u \hat{f} U_u^+) = E(\mathbf{x}, \hat{f}) + u_i \pi_i(\mathbf{x}, \hat{f}) + \frac{1}{2} m u^2 \rho(\mathbf{x}, \hat{f}), \quad (5.1)$$

где

$$\pi_i(\mathbf{x}, \hat{f}) = \text{Sp } \hat{f} \hat{\pi}_i(\mathbf{x}), \quad \rho_i(\mathbf{x}, \hat{f}) = \text{Sp } \hat{f} \hat{\rho}_i(\mathbf{x}) \quad (5.2)$$

и

$$U_u = e^{i m u \hat{\mathbf{x}}} \quad (5.3)$$

(m — масса фермиона).

Если плотность энергии представить в виде

$$E(\mathbf{x}, \hat{f}) = E_0(\mathbf{x}, \hat{f}) + E_{\text{int}}(\mathbf{x}, \hat{f}), \quad (5.4)$$

где

$$E_0(\mathbf{x}, \hat{f}) = \frac{1}{2m} \text{Sp } \hat{f} \hat{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{p}}, \quad (5.5)$$

и учесть, что

$$E_0(\mathbf{x}, U_u \hat{f} U_u^+) = E_0(\mathbf{x}, \hat{f}) + u_i \pi_i(\mathbf{x}, \hat{f}) + \frac{1}{2} m u^2 \rho(\mathbf{x}, \hat{f}), \quad (5.6)$$

то соотношение (5.1) можно переписать как

$$E_{\text{int}}(\mathbf{x}, U_u \hat{f} U_u^+) = E_{\text{int}}(\mathbf{x}, \hat{f}). \quad (5.7)$$

Из определения (2.11) плотности энергии квазичастицы и соотношения (5.1) следует, что

$$U_u^+ \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}) U_u = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, U_u^+ \hat{f} U_u) + u_i \hat{\pi}_i(\mathbf{x}, \hat{f}) + \frac{1}{2} m u^2 \hat{\rho}(\mathbf{x}, \hat{f}). \quad (5.8)$$

Эта формула показывает, что для квазиравновесной матрицы плотности (3.8) справедливо соотношение

$$U_v^+ \hat{f} U_v = \left\{ \exp \left[\hat{\varepsilon}(U_v^+ \hat{f} U_v) - \mu - \frac{1}{2} m v^2 - \hat{m}_i \tilde{h}_i \right] + 1 \right\}^{-1}, \quad (5.9)$$

из которого следует, что если ввести обозначение

$$\hat{f} = \hat{f}(Y), \quad (5.10)$$

то

$$U_v^+ \hat{f}(Y) U_v = \hat{f}(Y^0), \quad (5.11)$$

где термодинамические силы Y^0 определяются формулами

$$Y_0^0 = Y_0, \quad Y_k^0 = 0, \quad Y_4^0 = Y_4 - \frac{1}{2} m v^2 Y_0, \quad Y_a^0 = Y_a. \quad (5.12)$$

Эти формулы показывают, что среднее значение произвольной физической величины $\hat{a}$ в состоянии Y можно представить в виде

$$\text{Sp } \hat{f}(Y) \hat{a} = \text{Sp } \hat{f}(Y^0) U_v^+ \hat{a} U_v. \quad (5.13)$$

Замечая, что

$$U_v^+ \hat{\rho}(\mathbf{x}) U_v = \hat{\rho}(\mathbf{x}), \quad U_v^+ \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) U_v = \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) + m v_i \hat{\rho}(\mathbf{x}), \quad U_v^+ \hat{m}_i(\mathbf{x}) U_v = \hat{m}_i(\mathbf{x}), \quad (5.14)$$

и учитывая, что $\text{Sp } \hat{f}(Y^0) \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) = 0$, получим отсюда

$$\rho(Y) = \rho(Y^0), \quad \pi_i(Y) = m v_i \rho(Y^0), \quad m_i(Y) = m_i(Y^0). \quad (5.15)$$

Сравнение этих формул с выражением (4.21) для j_i показывает, что в галилеео-инвариантной теории имеет место соотношение

$$\pi_i(Y) = m j_i(Y). \quad (5.16)$$

Подчеркнем, что только в галилеео-инвариантной теории есть понятие массы фермиона m , причем эта величина вводится в теорию с помощью соотношения (5.1).

Преобразуем, наконец, выражение для плотности энергии $E(Y)$ в состоянии статистического равновесия. Согласно (5.1) имеем

$$E(Y) = E(\mathbf{x}, U_u^+ \hat{f} U_u) + u_i \pi_i(\mathbf{x}, U_u^+ \hat{f} U_u) + \frac{1}{2} m u^2 \rho(\mathbf{x}, U_u^+ \hat{f} U_u) \quad (5.17)$$

или, учитывая (5.11), имеем при $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

$$E(Y) = E(Y^0) + v_i \text{Sp } \hat{f}(Y^0) \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} m v^2 \text{Sp } \hat{f}(Y^0) \hat{\rho}(\mathbf{x}), \quad (5.18)$$

и, следовательно,

$$E(Y) = E_0 + \frac{1}{2} m v^2 \rho(Y^0), \quad (5.19)$$

где $E_0 = E(Y^0)$.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В отсутствие внешнего магнитного поля функционал энергии (3.9) инвариантен относительно преобразований пространственно-временных трансляций и пространственных (с учетом спина) поворотов. Поэтому в этом случае уравнения магнитной гидродинамики можно привести к виду дифференциальных законов сохранения.

Уравнение (4.30) при $\alpha = 4$ уже имеет вид дифференциального закона сохранения

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial j_k(\mathbf{x})}{\partial x_k} = 0, \quad j_k = \rho v_k, \quad (6.1)$$

где $v_k = -Y_k/Y_0$.

Уравнение (4.30) при $\alpha = i = 1, 2, 3$ принимает вид дифференциального закона сохранения для плотности импульса $\pi_i = m\rho v_i$ (при учете галилеевой инвариантности, см. раздел 5)

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik} = 0, \quad (6.2)$$

$$\Pi_{ik} = m\rho v_i v_k + P\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi} \left(h_i b_k - \frac{1}{2} \mathbf{h}^2 \delta_{ik} \right) - \alpha_{ks} \mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_s \partial x_i} + \frac{1}{2} \delta_{ik} \alpha_{ls} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_l} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_s}, \quad (6.3)$$

где

$$P = -\frac{\omega}{\beta} + \mathbf{m}^2 R' - \frac{1}{2} R.$$

Мы учли при этом, что

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{4\pi} (h_i b_k - \frac{1}{2} \mathbf{h}^2 \delta_{ik}), \\ \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_{ls} \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_l \partial x_s} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha_{ks} \mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_s \partial x_i} - \frac{1}{2} \delta_{ik} \alpha_{ls} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_l} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_s} \right). \end{aligned}$$

Уравнение (4.30) при $\alpha = a = 5, 6, 7$ может быть записано в виде

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} + \operatorname{div} m_i \mathbf{v} = \mu_f [\mathbf{m} \times \mathbf{h}^{\text{eff}}]_i. \quad (6.4)$$

Для того чтобы придать этому уравнению вид дифференциального закона сохранения, введем плотность полного момента количества движения

$$J_i = \varepsilon_{ikl} x_k \pi_l + \frac{1}{\mu_f} m_i. \quad (6.5)$$

Тогда согласно (6.2) и (6.4) имеем

$$\frac{\partial J_i}{\partial t} + \frac{\partial J_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (6.6)$$

$$J_{ik} = \varepsilon_{ipl} x_p \Pi_{lk} + \frac{1}{\mu_f} m_i v_k - \varepsilon_{ipl} m_p \alpha_{kr} \frac{\partial m_l}{\partial x_r}. \quad (6.7)$$

Мы учли при этом, что (см. (3.14), (6.3))

$$\varepsilon_{isl} \Pi_{ls} + \varepsilon_{isl} m_s h_l^{\text{eff}} = \frac{\partial}{\partial x_p} \varepsilon_{isl} m_s \alpha_{pr} \frac{\partial m_l}{\partial x_r}. \quad (6.8)$$

Получим, наконец, дифференциальный закон сохранения энергии. С этой целью заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{h}^2}{8\pi} + \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} R \right) = \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} [\mathbf{e} \times \mathbf{h}]_k - \mathbf{h}^{\text{eff}} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (6.9)$$

где учтено, что

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{e}, \quad (6.10)$$

и использовано определение эффективного поля $\mathbf{h}^{\text{eff}}$. Вводя полную плотность энергии

$$E_t = E + \frac{h^2}{8\pi} + \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} R \quad (6.11)$$

и используя уравнение (4.30) при $\alpha = 0$, получим окончательно

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_k}{\partial x_k} = 0, \quad (6.12)$$

$$\Pi_k = v_k \left(E + P + \frac{1}{2} R - \mathbf{m}^2 R' \right) + \frac{1}{8\pi} [\mathbf{e} \times \mathbf{h}]_k - \mathbf{m} \mathbf{h}^{\text{eff}} v_k - \alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}. \quad (6.13)$$

В нулевом приближении по градиентам формулы для плотностей потоков принимают вид

$$j_k = \rho v_k, \quad \Pi_{ik} = m \rho v_i v_k + P \delta_{ik} - \frac{1}{4\pi} \left(h_i b_k - \frac{1}{2} \mathbf{h}^2 \delta_{ik} \right), \quad (6.14)$$

$$J_{ik} = \varepsilon_{ipl} x_p \Pi_{lk} + \frac{1}{\mu_f} m_i v_k, \quad \Pi_k = v_k \left(\frac{m \rho v^2}{2} + w_0 + P \right) + \frac{1}{8\pi} [\mathbf{e} \times \mathbf{h}]_k - \mathbf{m} h v_k, \quad (6.15)$$

где $w_0 = E_0 + R/2$.

Вместо закона сохранения энергии часто используют закон адиабатичности для плотности энтропии σ . Согласно (4.16) $\omega = -\sigma + Y_a \zeta_a$, причем в соответствии с (4.18)

$$d\omega = \zeta_a dY_a, \quad (6.16)$$

и, следовательно,

$$d\sigma = Y_a d\zeta_a. \quad (6.17)$$

Таким образом, согласно (4.30)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = Y_a \frac{\partial \zeta_a}{\partial t} = Y_a \left(-\frac{\partial \zeta_{ak}}{\partial x_k} + X_a \right) \quad (6.18)$$

или

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} (Y_a \zeta_{ak}) + \zeta_{ak} \frac{\partial Y_a}{\partial x_k} + Y_a X_a. \quad (6.19)$$

Так как

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{\omega Y_k}{Y_0},$$

то

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(Y_a \zeta_{ak} + \frac{\omega Y_k}{Y_0} \right) + Y_a X_a. \quad (6.20)$$

Замечая, что

$$Y_a \zeta_{ak} = -Y_a \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{\omega Y_k}{Y_0} \quad \text{и} \quad Y_a \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{Y_k}{Y_0} = 0,$$

имеем

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{Y_k}{Y_0} (\omega - Y_a \zeta_a) + Y_a X_a = -\frac{\partial}{\partial x_k} v_k \sigma + Y_a X_a. \quad (6.21)$$

С другой стороны, в соответствии с (4.31)

$$Y_a X_a = Y_0 \frac{\partial h_i^{\text{eff}}}{\partial x_k} m_i v_k + Y_k m_i \frac{\partial h_i^{\text{eff}}}{\partial x_k} + \mu_f \mathbf{Y} [\mathbf{h}^{\text{eff}} \times \mathbf{m}] = 0, \quad (6.22)$$

т.к. согласно (4.18) вектор $\mathbf{Y}$ параллелен $\mathbf{m}$ (термодинамический потенциал ω зависит от квадрата вектора $\mathbf{Y}$).

Таким образом, имеем окончательно

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div } \sigma \mathbf{v} = 0. \quad (6.23)$$

Вектор $\sigma \mathbf{v}$ следует интерпретировать как плотность потока энтропии.

7. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В НЕЙТРОННОЙ МАТЕРИИ

В качестве приложения полученных уравнений рассмотрим волны большой амплитуды, которые могут распространяться в нейтронной материи, — ударные волны [1]. Будем для простоты вначале считать течение одномерным, т.е. считать, что все величины зависят только от одной координаты x . Обозначим через $a_\alpha(x)$ плотность физических величин

$$a_\alpha(x) = \rho(x), \quad \rho(x) v_i(x), \quad [\mathbf{r}, \rho \mathbf{v}]_i + \frac{1}{\mu_f} m_i,$$

а через $b_{\alpha k}(x)$ — соответствующие плотности потоков, которые являются функциями плотностей $a_\alpha(x)$, $b_{\alpha k}(x) = b_{\alpha k}(a_\alpha(x))$. Тогда дифференциальные законы сохранения (5.1), (5.2), (5.6) и (5.12) могут быть представлены в виде

$$\dot{a}_\alpha + \frac{\partial b_{\alpha k}}{\partial x_k} = 0 \quad (7.1)$$

или в одномерном случае

$$\dot{a}_\alpha + \frac{\partial b_\alpha}{\partial x} = 0, \quad b_\alpha(x) = b_\alpha(a_\beta(x)), \quad (7.2)$$

где $b_\alpha = b_{\alpha x}$.

Чтобы описать разрывные течения, положим

$$a_\alpha(x) = a_\alpha^+(x)\theta(x - x(t)) + a_\alpha^-(x)\theta(-x + x(t)), \quad (7.3)$$

где $x(t)$ — x -координата поверхности разрыва в момент времени t ,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

В соответствии с этим величины b_α представятся в виде

$$b_\alpha(x) = b_\alpha^+(x)\theta(x - x(t)) + b_\alpha^-(x)\theta(-x + x(t)), \quad (7.4)$$

где $b_\alpha^\pm(x) = b_\alpha(a_\alpha^\pm)$.

Подставляя (7.3) и (7.4) в уравнение (7.2) и замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(x - x(t)) = -\dot{x}(t)\delta(x - x(t)),$$

получим

$$\begin{aligned} & \left(\dot{a}_\alpha^+ + \frac{\partial b_\alpha^+}{\partial x} \right) \theta(x - x(t)) + \left(\dot{a}_\alpha^- + \frac{\partial b_\alpha^-}{\partial x} \right) \theta(-x + x(t)) + \\ & + \delta(x - x(t))(-\dot{x}(t)(a_\alpha^+ - a_\alpha^-) + b_\alpha^+ - b_\alpha^-) = 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Отсюда находим уравнения магнитной гидродинамики слева и справа от поверхности разрыва

$$\dot{a}_\alpha^\pm + \frac{\partial b_\alpha^\pm}{\partial x} = 0 \quad (7.6)$$

и граничные условия на поверхности разрыва

$$\{b_\alpha\} = \dot{x}(t)\{a_\alpha\}, \quad (7.7)$$

где через $\{\dots\}$ обозначена разность значений физических величин слева и справа от поверхности разрыва. Например,

$$\{a_\alpha\} = (a_\alpha^+ - a_\alpha^-)|_{x=x(t)}.$$

Представляя уравнения Максвелла в виде, аналогичном формуле (7.6), найдем граничные условия для электромагнитных полей на поверхности разрыва

$$\{\varepsilon_{i1k}e_k\} = \frac{\dot{x}(t)}{c}\{b_i\}, \quad \{\varepsilon_{i1k}h_k\} = 0, \quad \{b_1\} = 0.$$

Эти условия можно переписать в виде

$$\left\{ \left(\mathbf{e} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}, \mathbf{b}] \right)_t \right\} = 0, \quad \{\mathbf{h}_t\} = 0, \quad \{\mathbf{b}_n\} = 0, \quad (7.8)$$

где индексом t обозначены тангенциальные составляющие полей, а индексом n — нормальные составляющие. Причем $\mathbf{u}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ — нормальная составляющая скорости движения поверхности разрыва. В такой форме эти граничные условия справедливы для

любого течения, не обязательно одномерного. Аналогичным образом формулы (7.7) могут быть записаны для произвольного разрывного течения

$$\{b_{\alpha k} n_k\} = u(t)\{a_{\alpha}\}, \quad u(t) = u_k(t)n_k$$

($\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности разрыва). В случае плоской поверхности разрыва, которая движется равномерно со скоростью u , уравнения магнитной гидродинамики допускают решения

$$a_{\alpha}^{+} = \text{const}, \quad a_{\alpha}^{-} = \text{const},$$

причем указанные константы связаны между собой соотношениями

$$b_{\alpha}(a^{+}) - b_{\alpha}(a^{-}) = u(a_{\alpha}^{+} - a_{\alpha}^{-}). \quad (7.9)$$

Уравнения (7.9) справедливы в произвольной системе отсчета. Мы рассмотрим эти уравнения в системе отсчета, где разрыв покоится, $u = 0$,

$$\{\rho v_k n_k\} = 0, \quad \{\pi_{ik} n_k\} = 0, \quad \{\Pi_k n_k\} = 0, \quad \{J_{ik} n_k\} = 0. \quad (7.10)$$

Именно в таком виде граничные условия на поверхности разрыва обычно и используются [5, 6].

К этим соотношениям должны быть добавлены уравнения для скачков электромагнитных полей

$$\{b_k n_k\} = 0, \quad \varepsilon_{ikl}\{h_k n_l\} = 0, \quad \varepsilon_{ikl}\{e_k n_l\} = 0. \quad (7.11)$$

Используя определения (5.7) и (5.13) плотностей потоков и учитывая галилееву инвариантность, представим уравнения (7.10) и (7.11) в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \rho m v_n \left(\frac{v_n^2}{2} + \frac{v_t^2}{2} \right) + \rho m v_n \left(\frac{P + w_0}{\rho} \right) - \mathbf{h} \mathbf{m} v_n \right\} &= 0, \\ \left\{ P + \rho m v_n^2 - \frac{h_n^2}{8\pi} - h_n m_n \right\} &= 0, \\ \left\{ \rho m \mathbf{v}_t v_n - \frac{1}{4\pi} \mathbf{h}_t b_n \right\} &= 0, \quad \{v_n \mathbf{m}\} = 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

При получении второго из этих уравнений мы учли, что $\{h_t^2\} = 0$. Учитывая первое из уравнений (7.11), представим третье из уравнений (7.12) в виде $\{\rho \mathbf{v}_t v_n\} = 0$.

Под ударными волнами понимаются такие волны, в которых на поверхности разрыва плотность ρ испытывает скачок [6]. Обозначая через j^m нормальную составляющую плотности потока вещества $j^m = m j = \rho m v_n$ (она непрерывна на поверхности разрыва, $j \neq 0$) и вводя обозначение $V = 1/(\rho m)$ (V – удельный объем), перепишем уравнения (7.12) в виде

$$\begin{aligned} \left\{ (P + w_0)V + \frac{(j^m)^2 V^2}{2} - V \mathbf{h} \mathbf{m} \right\} &= 0, \\ \left\{ P + (j^m)^2 V - \frac{h_n^2}{8\pi} - h_n m_n \right\} &= 0, \\ \{\mathbf{v}_t\} &= 0, \quad \{V \mathbf{m}\} = 0. \end{aligned}$$

Исключая из первых двух уравнений величину $(j^m)^2$, получим

$$\{(P + w_0)V\} - \frac{V_1 + V_2}{2}\{P\} + \frac{V_1 + V_2}{2}\frac{\{h_n^2\}}{8\pi} + \frac{V_1 + V_2}{2}\{h_n m_n\} - \{V \mathbf{h} \mathbf{m}\} = 0.$$

Используя (7.11), запишем последнее уравнение в виде

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{P_1 + P_2}{2}(V_1 - V_2) + \pi(V_1 - V_2)(m_{n1} - m_{n2})^2 = 0, \quad (7.13)$$

где $\varepsilon = w_0 V$ — энергия единицы массы среды. Это уравнение представляет собой обобщение уравнения адиабаты Гюгонио для ударных волн в нейтронной материи. Оно отличается от уравнения адиабаты Гюгонио в обычной гидродинамике [6] тем, что имеется дополнительное слагаемое

$$\pi(V_1 - V_2)(m_{n1} - m_{n2})^2 = \frac{1}{16\pi}(V_1 - V_2)(h_{n1} - h_{n2})^2. \quad (7.14)$$

В свою очередь, уравнение (7.13) отличается от уравнения ударной адиабаты в обычной магнитной гидродинамике [5] тем, что $(\mathbf{h}_{t1} - \mathbf{h}_{t2})^2$ заменяется, как это видно из (7.14), на $(h_{n1} - h_{n2})^2$.

В заключение выпишем выражения для скачков скорости и квадрата нормальной составляющей магнитного момента

$$(v_1 - v_2) = \sqrt{(P_2^* - P_1^*)(V_1 - V_2)},$$

$$2\pi(V_1 - V_2)(m_{n1} - m_{n2})^2 = \frac{(v_1 - v_2)^2}{V_1 - V_2} - (P_2^* - P_1^*) = 0,$$

где $P^* = P + 2\pi m_n^2$.

Скачок магнитного момента может двигаться с произвольной скоростью. Наличие движущегося скачка магнитного момента приводит к изменению в пространстве и во времени магнитного момента среды, что, в свою очередь, приводит к излучению электромагнитных волн. Иными словами, распространение ударной волны должно сопровождаться излучением электромагнитных волн. Мы, однако, в этой статье данный вопрос изучать не будем.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Украинского научно-технического центра (проект 1499).

Список литературы

- [1] *A. I. Akhiezer, N. V. Laskin, S. V. Peletminskii.* Phys. Rev. E. 1996. V. 58. № 5. P. 6512–6516.
- [2] *Л. Д. Ландау.* ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 59; Собрание трудов. Т. 2. М.: Наука, 1969.
- [3] *А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский.* Спиновые волны. М.: Наука, 1967.
- [4] *Н. Н. Боголюбов.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1946; Избранные труды в 3-х томах. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1970.
- [5] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
- [6] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Механика сплошных сред. М.: ГТТИ, 1945.

Поступила в редакцию 14.III.2000 г.,
после доработки 23.VI.2000 г.