Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Данилов, О спектре двумерного периодического оператора Дирака, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 1, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf682>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:19:19

© 1999 г.

Л. И. Данилов*

О СПЕКТРЕ ДВУМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Доказана абсолютная непрерывность спектра оператора Дирака в $\mathbf{R}^2$ с периодическими (с общей решеткой периодов) скалярным V и векторным $A = (A_1, A_2)$ потенциалами, для которых $V, A_j \in L^q_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)$, $q > 2$.

Пусть

$$\widehat{D} = \widehat{D}_0 + V - \sum_{j=1}^2 A_j \widehat{\alpha}_j = \sum_{j=1}^2 \widehat{\alpha}_j \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j \right) + \widehat{\beta} m + V$$

— оператор Дирака в $\mathbf{R}^2$, где $m \in \mathbf{R}$, $\widehat{\alpha}_j$ и $\widehat{\beta}$ — эрмитовы $(M \times M)$ -матрицы, удовлетворяющие антикоммутиационным соотношениям

$$\widehat{\alpha}_i \widehat{\alpha}_j + \widehat{\alpha}_j \widehat{\alpha}_i = 2\delta_{ij} \widehat{I}, \quad \widehat{\alpha}_i \widehat{\beta} + \widehat{\beta} \widehat{\alpha}_i = \widehat{O}, \quad \widehat{\beta}^2 = \widehat{I},$$

$\widehat{O}$ и $\widehat{I}$ — нулевая и единичная матрицы, δ_{ij} — символ Кронекера. Конкретный вид матриц $\widehat{\alpha}_j$ и $\widehat{\beta}$ выбираться не будет (это могут быть матрицы Дирака или матрицы Паули). Скалярный (электрический) потенциал $V: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ и компоненты векторного (магнитного) потенциала $A_j: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ — периодические функции с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$. Координаты в $\mathbf{R}^2$ задаются относительно ортогонального базиса $\{\mathcal{E}_j\}$, $j = 1, 2$. Базис обратной решетки Λ^* образуют векторы E_i^* , удовлетворяющие условиям $(E_i^*, E_j) = \delta_{ij}$, где $\{E_j\}$ — базис решетки Λ . Положим $K = \mathbf{R}^2/\Lambda$,

$$K^* = \{k = \eta_1 E_1^* + \eta_2 E_2^*: 0 \leq \eta_i < 1, i = 1, 2\},$$

$s(K)$ и $s(K^*)$ — площади двумерного тора K и элементарной ячейки K^* решетки Λ^* .

Через $|\cdot|$ и $(\cdot, \cdot)$ обозначаются длина и скалярное произведение векторов в $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{M}_M$ — линейное пространство (комплексных) $(M \times M)$ -матриц с нормой

$$\|L\|_{\mathcal{M}_M} = \max_{\|c\|_{\mathbf{C}^M} = 1} \|Lc\|_{\mathbf{C}^M}, \quad L \in \mathcal{M}_M.$$

Используются стандартные обозначения для непрерывных, бесконечно дифференцируемых, интегрируемых в p -й степени (в существенном) ограниченных функций $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}$:

* Физико-технический институт УРО РАН, Ижевск, Россия

$C(\mathcal{O}; \mathcal{P})$, $C^\infty(\mathcal{O}; \mathcal{P})$, $L^p(\mathcal{O}; \mathcal{P})$, $p \geq 1$ или $p = \infty$, где $\mathcal{O} = K$, $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, и $\mathcal{P} = \mathbf{C}^M$, $\mathcal{M}_M$, $\mathbf{C}$ (в последнем случае применяется сокращенная запись $C(\mathcal{O})$, $C^\infty(\mathcal{O})$ и $L^p(\mathcal{O})$), $L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)$ – множество функций $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}$, сужение которых на каждое (измеримое) ограниченное множество $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^2$ принадлежит пространству $L^p(\mathcal{O})$. Скалярные произведения $(\cdot, \cdot)$ и нормы $\|\cdot\|$ в пространствах $\mathbf{C}^M$, $L^2(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}^M)$ и $L^2(K; \mathbf{C}^M)$ вводятся обычным образом и будут обозначаться одинаково (без указания, как правило, в обозначениях самих пространств); $H^1(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}^M)$ и $H^1(K; \mathbf{C}^M)$ – пространства Соболева квадратично-интегрируемых вместе со своими частными производными первого порядка вектор-функций.

Если $V, A_j: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ – периодические с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$ функции, для которых $V, A_j \in L^q_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)$, $j = 1, 2$, $q > 2$, то оператор $V - A_1 \hat{\alpha}_1 - A_2 \hat{\alpha}_2$ имеет нулевую грань относительно оператора $\hat{D}_0$, поэтому $\hat{D}$ – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}^M)$ [1, теорема X.12] с областью определения $D(\hat{D}) = D(\hat{D}_0) = H^1(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}^M)$.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $V, A_j: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ – периодические с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$ функции, для которых $V, A_j \in L^q_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)$, $j = 1, 2$, $q > 2$. Тогда спектр оператора Дирака $\hat{D} = \hat{D}_0 + V - A_1 \hat{\alpha}_1 - A_2 \hat{\alpha}_2$ абсолютно непрерывен.

Оператор $\hat{D}$ унитарно-эквивалентен прямому интегралу

$$\int_{2\pi K^*}^{\oplus} \hat{D}(k) \frac{dk}{(2\pi)^2 s(K^*)}, \quad (1)$$

где $\hat{D}(k) = \hat{D}_0(k) + V - A_1 \hat{\alpha}_1 - A_2 \hat{\alpha}_2$,

$$\hat{D}_0(k) = \sum_{j=1}^2 \hat{\alpha}_j \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} + k_j \right) + \hat{\beta} m,$$

$k_j = (k, \mathcal{E}_j)$, вектор $k \in \mathbf{R}^2$ называется квазиимпульсом. Функции V и A_j отождествляются с функциями, определенными на торе K . В [2] разложение оператора $\hat{D}$ в прямой интеграл (1) приведено для случая $A_j \equiv 0$, $j = 1, 2$ (унитарная эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Гельфанда [3]), но без всяких изменений оно переносится и на общий случай. Отметим, что область определения $D(\hat{D}(k)) = D(\hat{D}_0(k)) = H^1(K; \mathbf{C}^M) \subset L^2(K; \mathbf{C}^M)$ операторов $\hat{D}(k)$ в прямом интеграле (1) не зависит от квазиимпульса $k \in 2\pi K^*$. Оператор $V - A_1 \hat{\alpha}_1 - A_2 \hat{\alpha}_2$ имеет нулевую грань относительно оператора $\hat{D}_0(k)$, $k \in \mathbf{R}^2$, поэтому резольвента самосопряженных операторов $\hat{D}(k)$ компактна и, следовательно, их спектр дискретен. Пусть $E_\nu(k)$, $\nu \in \mathbf{Z}$, – собственные значения операторов $\hat{D}(k)$ (с учетом их кратности), упорядоченные по возрастанию. Нумерацию собственных значений $E_\nu(k)$ при разных $k \in \mathbf{R}^2$ можно выбрать так, чтобы функции $\mathbf{R}^2 \ni k \rightarrow E_\nu(k)$ были непрерывными. Спектр оператора $\hat{D}$ совпадает с $\bigcup_{\nu \in \mathbf{Z}} \Delta_\nu$ [4, теорема XIII.85], где Δ_ν – область значений функции $E_\nu(k)$, $k \in 2\pi K^*$.

Зафиксируем вектор $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$. Пусть единичный вектор $e \in \mathbf{R}^2$ определяется вектором γ : $e = |\gamma|^{-1}\gamma$. Для $k \in \mathbf{R}^2$ и $\kappa \in \mathbf{R}$ обозначим $\widehat{D}_0(k + i\kappa e) = \widehat{D}_0(k) + i\kappa(e_1\widehat{\alpha}_1 + e_2\widehat{\alpha}_2)$, $\widehat{D}(k + i\kappa e) = \widehat{D}_0(k + i\kappa e) + V - A_1\widehat{\alpha}_1 - A_2\widehat{\alpha}_2$. Операторы $\widehat{D}(k + i\kappa e)$ можно также рассматривать для функций $V, A_j: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}$, $V, A_j \in L^q(K)$, $q > 2$; $D(\widehat{D}(k + i\kappa e)) = D(\widehat{D}_0(k + i\kappa e)) = H^1(K; \mathbf{C}^M)$; $\widehat{D}_0(k + i\kappa e)$ и $\widehat{D}(k + i\kappa e)$ — замкнутые операторы. Обозначим через $a \in \mathbf{R}^2$ вектор, для которого

$$a_j = (a, \mathcal{E}_j) = s^{-1}(K) \int_K A_j(x) dx, \quad j = 1, 2.$$

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся методом Томаса [5], с помощью которого доказательство абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Дирака сводится к доказательству обратимости и получению оценок для нормы обратных операторов к операторам $\widehat{D}(k + i\kappa e) - \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$, при комплексных значениях квазимпульса $k + i\kappa e \in \mathbf{C}^2$. Основным утверждением работы является теорема 2, из которой теорема 1 вытекает как следствие.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции $V, A_j: K \rightarrow \mathbf{C}$, $j = 1, 2$, принадлежат пространству $L^q(K)$, $q > 2$, и $\lambda \in \mathbf{C}$. Тогда для любого $\theta \in [0, 1)$ найдется (достаточно большое) число $\kappa > 0$ такое, что для всех $k \in \mathbf{R}^2$: $(k - a, e) = \pi|\gamma|^{-1}$ и для всех вектор-функций $\phi \in H^1(K; \mathbf{C}^M)$ справедливо неравенство

$$\|(\widehat{D}_0(k + i\kappa e) + V - A_1\widehat{\alpha}_1 - A_2\widehat{\alpha}_2 - \lambda)\phi\| \geq \theta \frac{\pi}{|\gamma|} \exp \left\{ -c_1 \sum_{j=1}^2 \|A_j - a_j\|_{L^q(K)} \right\} \|\phi\|,$$

где константа $c_1 = c_1(q, \Lambda) > 0$ зависит только от q и решетки Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из теории возмущений следует, что собственные значения $E_\nu(k + \xi e)$ операторов $\widehat{D}(k + \xi e)$ являются аналитическими по $\xi \in \mathbf{R}$ функциями вне их пересечений (без учета кратности). Поэтому из разложения оператора $\widehat{D}$ в прямой интеграл (1) и теорем XIII.85 и XIII.86 из [4] получаем, что для доказательства абсолютной непрерывности спектра оператора $\widehat{D}$ достаточно доказать, что для всех $\nu \in \mathbf{Z}$ и $k \in \mathbf{R}^2$ функции $E_\nu(k + \xi e)$, $\xi \in \mathbf{R}$, не являются постоянными ни на одном отрезке $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, $\xi_1 < \xi_2$. Докажем последнее утверждение. Предположим, что оно неверно. Тогда найдутся число $\lambda \in \mathbf{R}$, вектор $k \in \mathbf{R}^2$ и отрезок $[\xi_1, \xi_2]$, $\xi_1 < \xi_2$, такие, что оператор $\widehat{D}(k + \xi e) - \lambda$ будет необратимым при всех $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$. С другой стороны, для любого числа $\xi_0 + i\kappa_0 \in \mathbf{C}$ найдутся некоторая окрестность $\mathcal{O}(\xi_0 + i\kappa_0) \subset \mathbf{C}$ и число $\delta = \delta(\xi_0, \kappa_0) \in \mathbf{R}$ такие, что оператор $\widehat{D}_0(k + (\xi + i\kappa)e) + \delta$ окажется обратимым для всех $\xi + i\kappa \in \mathcal{O}(\xi_0 + i\kappa_0)$ (см. лемму 1 в [6]). Так как оператор $V - A_1\widehat{\alpha}_1 - A_2\widehat{\alpha}_2$ имеет нулевую грань относительно оператора $\widehat{D}_0(k)$, то оператор $(V - A_1\widehat{\alpha}_1 - A_2\widehat{\alpha}_2 - \lambda - \delta)(\widehat{D}_0(k + (\xi + i\kappa)e) + \delta)^{-1}$ компактен для всех $\xi + i\kappa \in \mathcal{O}(\xi_0 + i\kappa_0)$. Поэтому из аналитической теоремы Фредгольма [7, теорема VI.14], примененной к операторам $\widehat{I} + (V - A_1\widehat{\alpha}_1 - A_2\widehat{\alpha}_2 - \lambda - \delta)(\widehat{D}_0(k + (\xi + i\kappa)e) + \delta)^{-1}$, $\xi + i\kappa \in \mathcal{O}(\xi_0 + i\kappa_0)$, $\xi_0 + i\kappa_0 \in \mathbf{C}$, где $\widehat{I}$ — единичный оператор, и необратимости оператора $\widehat{D}(k + \xi e) - \lambda$ для всех $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$

следует, что λ – собственное значение оператора $\widehat{D}(k + (\xi + i\kappa)e)$ при всех $\xi + i\kappa \in \mathbf{C}$. Последнее противоречит теореме 2. Теорема 1 доказана.

Использованный при доказательстве теоремы 1 метод Томаса предложен в [5] для доказательства абсолютной непрерывности спектра оператора Шредингера в $\mathbf{R}^3$ с периодическим (электрическим) потенциалом $V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^3)$. В [4] результаты работы [5] перенесены на n -мерные периодические операторы Шредингера, $n \geq 2$. В [8] доказана абсолютная непрерывность спектра двумерного оператора Шредингера с периодическими электрическим потенциалом V и магнитным (векторным) потенциалом A , для которых $V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)$, $A_j \in C(\mathbf{R}^2)$, $j = 1, 2$ (и выполнено условие калибровки $\text{div } A = 0$). Для оператора Дирака в $\mathbf{R}^n$ с периодическим электрическим потенциалом V абсолютная непрерывность спектра доказана в следующих случаях: 1) $n = 2$, $V \in L^q_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)$, $q > 2$ [9]; 2) $n = 3$, $V \in L^q_{\text{loc}}(\mathbf{R}^3)$, $q > 3$ [2]; 3) $n \geq 2$, $V \in C(\mathbf{R}^n)$ [6, 10]; 4) $n \geq 3$ и коэффициенты Фурье V_N потенциала V удовлетворяют условию $\sum |V_N|^p < +\infty$, где $p = q/(q-1)$ и $q > q(n) > n$; наименьшие значения $q(n)$ (из полученных ранее) приведены в [11]: числа $q(n)$ определяются как корни некоторых алгебраических уравнений четвертой степени, $q(3) \approx 11.645$, $n^{-2}q(n) \rightarrow 3$ при $n \rightarrow \infty$.

Следующая теорема используется при доказательстве теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (матричные) функции $\widehat{W}^{(l)} \in L^q(K; \mathcal{M}_M)$, $l = 1, 2$, $q > 2$, при (почти) всех $x \in K$ удовлетворяют условиям $\widehat{\alpha}_j \widehat{W}^{(1)}(x) = \widehat{W}^{(1)}(x) \widehat{\alpha}_j$ и $\widehat{\alpha}_j \widehat{W}^{(2)}(x) = -\widehat{W}^{(2)}(x) \widehat{\alpha}_j$, $j = 1, 2$. Тогда для любого $\theta \in [0, 1]$ найдется (достаточно большое) число $\kappa > 0$ такое, что для всех $k \in \mathbf{R}^2$: $(k, e) = \pi|\gamma|^{-1}$ и для всех вектор-функций $\phi \in H^1(K; \mathbf{C}^M)$ справедливо неравенство

$$\|(\widehat{D}_0(k + i\kappa e) + \widehat{W}^{(1)} + \widehat{W}^{(2)})\phi\| \geq \theta \frac{\pi}{|\gamma|} \|\phi\|.$$

Для функций $\chi \in L^1(K; \mathcal{P})$, где $\mathcal{P} = \mathbf{C}, \mathbf{C}^M, \mathcal{M}_M$, обозначим

$$\chi_N = s^{-1}(K) \int_K \chi(x) e^{-2\pi i(N, x)} dx, \quad N \in \Lambda^*.$$

Из теоремы вложения Соболева [12, с. 146] для всех функций $\mathcal{W} \in L^q(K)$, $q > 2$, и всех вектор-функций $\phi \in H^1(K; \mathbf{C}^M)$ вытекает оценка

$$\|\mathcal{W}\phi\|_{L^2(K; \mathbf{C}^M)} \leq c_2 \|\mathcal{W}\|_{L^q(K)} \|\phi\|_{H^1(K; \mathbf{C}^M)}, \quad (2)$$

где $c_2 = c_2(q, \Lambda) > 0$, из которой, в частности, следует, что оператор $V - A_1 \widehat{\alpha}_1 - A_2 \widehat{\alpha}_2$ имеет нулевую грань относительно операторов $\widehat{D}_0(k)$, $k \in \mathbf{R}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сделав замену $k - a \rightarrow k$, можно считать, что $(k, e) = \pi|\gamma|^{-1}$ и $(A_j)_0 = 0$, $j = 1, 2$. Найдем функции $\Phi^{(n)} \in L^2(K)$, $n = 1, 2$, для которых $\Phi_0^{(n)} = 0$, так, чтобы выполнялись равенства (в смысле теории распределений)

$$A_1 = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_2}, \quad A_2 = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1}.$$

Для коэффициентов Фурье $\Phi_N^{(n)}$, $N \in \Lambda^* \setminus \{0\}$, имеем

$$2\pi i \Phi_N^{(1)} = \frac{N_1}{|N|^2} (A_1)_N + \frac{N_2}{|N|^2} (A_2)_N, \quad 2\pi i \Phi_N^{(2)} = \frac{N_2}{|N|^2} (A_1)_N - \frac{N_1}{|N|^2} (A_2)_N, \quad (3)$$

где $N_j = (N, \mathcal{E}_j)$, $j = 1, 2$.

ЛЕММА. *Функции*

$$\mathcal{F}^{(j)}(x) = \frac{s^{-1}(K)}{2\pi i} \sum_{N \in \Lambda^* \setminus \{0\}} \frac{N_j}{|N|^2} e^{2\pi i(N, x)}, \quad x \in K, \quad j = 1, 2,$$

принадлежат пространствам $L^p(K)$ для всех $p \in [1, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Будем считать функции $\mathcal{F}^{(j)}$ периодическими в $\mathbf{R}^2$ с решеткой периодов Λ . Пусть

$$b \in \left(0, \frac{1}{2} \min_{\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}} |\gamma|\right).$$

Определим функции $G_b^{(j)}(\xi_1, \xi_2) = \xi_j (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1}$, если $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq b^2$, и $G_b^{(j)}(\xi_1, \xi_2) = 0$, если $\xi_1^2 + \xi_2^2 > b^2$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}$. Справедливо равенство

$$\iint_{\mathbf{R}^2} G_b^{(j)}(\xi_1, \xi_2) e^{i(\eta_1 \xi_1 + \eta_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{2\pi i \eta_j}{\eta_1^2 + \eta_2^2} \left(1 - J_0\left(b\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}\right)\right), \quad \eta_1, \eta_2 \in \mathbf{R},$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Положим

$$\mathcal{F}^{(j,1)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \Lambda} G_b^{(j)}(x_1 - n_1, x_2 - n_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}.$$

Тогда $\mathcal{F}^{(j,1)}$ — периодическая функция с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$,

$$\mathcal{F}_N^{(j,1)} = \frac{s^{-1}(K)}{2\pi i} \frac{N_j}{|N|^2} (1 - J_0(2\pi b|N|))$$

при $N \in \Lambda^* \setminus \{0\}$ и $\mathcal{F}_0^{(j,1)} = 0$. При этом $\mathcal{F}^{(j,1)} \in L^p(K)$ для всех $p \in [1, 2)$. С другой стороны, функция $\mathcal{F}^{(j,2)}$ с коэффициентами Фурье $\mathcal{F}_0^{(j,2)} = 0$ и

$$\mathcal{F}_N^{(j,2)} = \frac{s^{-1}(K)}{2\pi i} \frac{N_j}{|N|^2} J_0(2\pi b|N|)$$

при $N \in \Lambda^* \setminus \{0\}$ принадлежит пространству $L^2(K)$. Поэтому $\mathcal{F}^{(j)} = \mathcal{F}^{(j,1)} + \mathcal{F}^{(j,2)} \in L^p(K)$ для всех $p \in [1, 2)$. Лемма доказана.

Из (3) следуют равенства

$$\Phi^{(1)} = \mathcal{F}^{(1)} * A_1 + \mathcal{F}^{(2)} * A_2, \quad \Phi^{(2)} = \mathcal{F}^{(2)} * A_1 - \mathcal{F}^{(1)} * A_2 \quad (4)$$

($*$ – свертка на торе K), из которых с помощью неравенства Гельдера и леммы получаем

$$\|\Phi^{(n)}\|_{L^\infty(K)} \leq c_3 \sum_{j=1}^2 \|A_j\|_{L^q(K)}, \quad n = 1, 2, \quad (5)$$

где $c_3 = c_3(q, \Lambda) > 0$.

Пусть $A^{(j,l)} \in C^\infty(K)$, $j = 1, 2$, $l \in \mathbb{N}$, – последовательности функций такие, что $A_0^{(j,l)} = 0$ и $\|A_j - A^{(j,l)}\|_{L^q(K)} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Определим функции $\Phi^{(n,l)}$, $n = 1, 2$, $l \in \mathbb{N}$, по функциям $A^{(j,l)}$, $j = 1, 2$, с помощью формул (4). Имеем $\Phi^{(n,l)} \in C^\infty(K)$ и

$$\|\Phi^{(n)} - \Phi^{(n,l)}\|_{L^\infty(K)} \leq c_3 \sum_{j=1}^2 \|A_j - A^{(j,l)}\|_{L^q(K)}, \quad n = 1, 2, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Отсюда, в частности, при $l \rightarrow \infty$ следует, что $\Phi^{(n)} \in C(K)$. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} e^{-i\Phi^{(1,l)}} e^{-i\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \Phi^{(2,l)}} (\hat{D}(k + i\kappa e) - \lambda) e^{i\Phi^{(1,l)}} e^{-i\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \Phi^{(2,l)}} = \\ = \hat{D}_0(k + i\kappa e) - (A_1 - A^{(1,l)})\hat{\alpha}_1 - (A_2 - A^{(2,l)})\hat{\alpha}_2 + \\ + (V - \lambda + m\hat{\beta})e^{-2i\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \Phi^{(2,l)}} - m\hat{\beta}, \end{aligned}$$

из которого и из оценок (2), (5), (6) и замкнутости оператора $\hat{D}(k + i\kappa e)$ вытекает (при $l \rightarrow \infty$), что

$$e^{i\Phi^{(1)}} e^{-i\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \Phi^{(2)}} \phi = s\text{-}\lim_{l \rightarrow \infty} e^{i\Phi^{(1,l)}} e^{-i\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \Phi^{(2,l)}} \phi \in D(\hat{D}(k + i\kappa e)) = H^1(K; \mathbf{C}^M)$$

для любой вектор-функции $\phi \in H^1(K; \mathbf{C}^M)$ и

$$\begin{aligned} e^{-i\Phi^{(1)}} e^{-i\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \Phi^{(2)}} (\hat{D}(k + i\kappa e) - \lambda) e^{i\Phi^{(1)}} e^{-i\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \Phi^{(2)}} = \\ = \hat{D}_0(k + i\kappa e) + \hat{W}^{(1)} + \hat{W}^{(2)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\hat{W}^{(1)} = (V - \lambda) \operatorname{ch} 2\Phi^{(2)} - im\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \hat{\beta} \operatorname{sh} 2\Phi^{(2)}$, $\hat{W}^{(2)} = m\hat{\beta}(1 - \operatorname{ch} 2\Phi^{(2)}) - i\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \times (V - \lambda) \operatorname{sh} 2\Phi^{(2)}$, $\hat{\alpha}_j \hat{W}^{(1)} = \hat{W}^{(1)} \hat{\alpha}_j$ и $\hat{\alpha}_j \hat{W}^{(2)} = -\hat{W}^{(2)} \hat{\alpha}_j$, $j = 1, 2$. Из возможности сделать замену $A \rightarrow -A$ следует, что для любой вектор-функции $\phi \in H^1(K; \mathbf{C}^M)$ имеем $e^{-i\Phi^{(1)}} e^{i\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \Phi^{(2)}} \phi \in H^1(K; \mathbf{C}^M)$. Поэтому теорема 2 следует из равенства (7), теоремы 3, оценок (5) и

$$\|e^{\pm i\Phi^{(1)}(x)} e^{-i\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \Phi^{(2)}(x)}\|_{\mathcal{M}_M} \leq e^{|\Phi^{(1)}(x)| + |\Phi^{(2)}(x)|}, \quad x \in K,$$

при этом $c_1 = 4c_3$. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Воспользуемся методом доказательства, предложенным в [9] (в случае $\widehat{W}^{(2)} \equiv \widehat{O}$ и $\widehat{W}^{(1)} = \mathcal{W}\widehat{I}$, где $\widehat{O}$ и $\widehat{I}$ – нулевая и единичная матрицы в $\mathcal{M}_M$ и $\mathcal{W} \in L^q(K)$, $q > 2$). Будет использован также ряд оценок из [13] и [14]. Без ограничения общности считаем, что $m = 0$ (можно добавить слагаемое $m\widehat{\beta}$ к (матричной) функции $\widehat{W}^{(2)}$). Выберем число $Q \in \mathbf{N}$ и числа δ_j , $j = 1, \dots, Q$, так, что $0 < \delta_1 < \dots < \delta_{Q-1} < \delta_Q = 1/2$,

$$\delta_1 < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{q-2}{4}\right\}, \quad \delta_j - \delta_{j-1} < \frac{1}{4}, \quad \delta_j < \frac{q}{2}\delta_{j-1}$$

при $j = 2, \dots, Q$. Пусть

$$\frac{1}{2} < \delta < \frac{q}{q+2}.$$

Через $\widehat{P}^{\mathcal{C}}$, где $\mathcal{C} \subset \Lambda^*$, обозначим ортогональный проектор в гильбертовом пространстве $L^2(K; \mathbf{C}^M)$ на подпространство $\{\chi \in L^2(K; \mathbf{C}^M): \chi_N = 0 \text{ при } N \notin \mathcal{C}\}$. Будем использовать краткое обозначение $\widehat{P}^{\mathcal{C}}\chi = \chi^{\mathcal{C}}$, $\chi \in L^2(K; \mathbf{C}^M)$. Для конечных множеств $\mathcal{C} \subset \Lambda^*$ через $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ обозначается число элементов в $\mathcal{C}$.

Выберем (и зафиксируем) любую функцию $\eta \in C^\infty(\mathbf{R})$ такую, что $\eta(\xi) = 1$ при $\xi \leq 1$, $0 \leq \eta(\xi) \leq 1$ при $1 < \xi \leq 2$ и $\eta(\xi) = 0$ при $\xi > 2$.

Определим функцию

$$\omega(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbf{R}^2} \eta(|y|) e^{i(y,x)} dy, \quad x \in \mathbf{R}^2.$$

Для $t > 0$ положим $\omega_{1/t}(x) = t^2 \omega(tx)$.

В дальнейшем функции, заданные на торе K , отождествляются с периодическими функциями в $\mathbf{R}^2$ с решеткой периодов Λ . Если $\widehat{W} \in L^2(K; \mathcal{M}_M)$, то

$$\left(\widehat{W} * \omega_{\frac{1}{t}}\right)(x) = \sum_{N \in \Lambda^*} \eta\left(\frac{2\pi|N|}{t}\right) \widehat{W}_N e^{2\pi i(N,x)}$$

($*$ – свертка в $\mathbf{R}^2$). Найдутся константы $c_4 = c_4(\eta) > 0$ и $c_5 = c_5(\Lambda, \eta) > 0$ такие, что при $l = 1, 2$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{W}^{(l)} * \omega_{\frac{1}{t}}) \right\|_{L^\infty(K; \mathcal{M}_M)} \leq c_4 t \left\| \widehat{W}^{(l)} * \omega_{\frac{1}{t}} \right\|_{L^\infty(K; \mathcal{M}_M)}, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

$$\left\| \widehat{W}^{(l)} * \omega_{\frac{1}{t}} \right\|_{L^\infty(K; \mathcal{M}_M)} \leq c_5 t^{\frac{2}{q}} \left\| \widehat{W}^{(l)} \right\|_{L^q(K; \mathcal{M}_M)}, \quad t \geq 1. \quad (9)$$

Пусть E – единичный вектор в $\mathbf{R}^2$, для которого $(e, E) = 0$ (любой из двух векторов). Для $k \in \mathbf{R}^2$, $\kappa \in \mathbf{R}$ и $N \in \Lambda^*$ обозначим

$$\widehat{D}_N(k; \kappa) = \sum_{j=1}^2 (k_j + 2\pi N_j + i\kappa e_j) \widehat{\alpha}_j,$$

$$G_N^\pm(k; \kappa) = \left((k + 2\pi N, e)^2 + (|\kappa| \pm |(k + 2\pi N, E)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$G_N(k; \kappa) = G_N^-(k; \kappa)$, где $N_j = (N, \mathcal{E}_j)$, $j = 1, 2$. Для всех $c \in \mathbf{C}^M$ имеем [6, лемма 1; 14]

$$G_N(k; \kappa) \|c\| \leq \|\widehat{D}_N(k; \kappa)c\| \leq G_N^+(k; \kappa) \|c\|,$$

при этом

$$G_N(k; \kappa) \geq |(k + 2\pi N, e)| \geq \frac{2\pi}{|\gamma|} \left\langle \frac{1}{2\pi}(k, \gamma) \right\rangle,$$

где $\langle \xi \rangle$ – расстояние от $\xi \in \mathbf{R}$ до ближайшего целого числа. Если $(k, e) = \pi|\gamma|^{-1}$, то $G_N(k; \kappa) \geq \pi|\gamma|^{-1}$. Для вектор-функции $\phi \in H^1(K; \mathbf{C}^M)$ будем обозначать $\psi = \psi(\phi) = (\widehat{D}_0(k + i\kappa e) + \widehat{W}^{(1)} + \widehat{W}^{(2)})\phi$. Тогда

$$\psi_N = \widehat{D}_N(k; \kappa)\phi_N + \sum_{l=1}^2 \sum_{n \in \Lambda^*} \widehat{W}_n^{(l)} \phi_{N-n}, \quad N \in \Lambda^*.$$

Для всех $k \in \mathbf{R}^2$: $(k, e) = \pi|\gamma|^{-1}$, всех $\kappa \geq \kappa_0 = 2^{\frac{2}{2\delta-1}}$ и всех вектор-функций $\phi \in H^1(K; \mathbf{C}^M)$ определим множества

$$\begin{aligned} B &= \{N \in \Lambda^*: \|\widehat{D}_N(k; \kappa)\phi_N\| \geq \kappa^{\frac{1}{2}} \|\phi_N\|\}, \\ T_1 &= \{N \in \Lambda^*: G_N(k; \kappa) < \kappa^{\delta_1}\} \setminus B, \\ T_j &= \{N \in \Lambda^*: \kappa^{\delta_{j-1}} \leq G_N(k; \kappa) < \kappa^{\delta_j}\} \setminus B, \quad j = 2, \dots, Q. \end{aligned}$$

Положим

$$T = \bigcup_{j=1}^Q T_j.$$

Пусть $\text{sign } \xi = \xi|\xi|^{-1}$, $\xi \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Если $N \in T$, то $(k + 2\pi N, E) \neq 0$. Обозначим $T_j^\pm = \{N \in T_j: \text{sign}(k + 2\pi N, E) = \pm 1\}$,

$$T^\pm = \bigcup_{j=1}^Q T_j^\pm.$$

Справедливы оценки

$$\mathcal{N}(T_j) \leq \frac{1}{2\pi} s^{-1}(K^*)(1 + o(1)) \kappa^{2\delta_j}, \quad j = 1, \dots, Q.$$

Здесь и далее величины, обозначаемые через $o(1)$, имеют при $\kappa \rightarrow +\infty$ обычный смысл. Они могут зависеть от решетки Λ , числа q , матричных функций $\widehat{W}^{(1)}$ и $\widehat{W}^{(2)}$, но не будут зависеть от вектора $k \in \mathbf{R}^2$: $(k, e) = \pi|\gamma|^{-1}$ и вектор-функции $\phi \in H^1(K; \mathbf{C}^M)$. Такое же соглашение используется и для вводимых далее констант c_μ , $\mu = 6, \dots, 10$.

Обозначим $B_1 = \{N \in B: G_N(k; \kappa) < \kappa^{1/2}\}$, $B_2 = B \setminus B_1$;

$$\mathcal{N}(B_1) \leq \frac{1}{2\pi} s^{-1}(K^*)(1 + o(1)) \kappa.$$

Для $N \in B$ положим $h_N = \kappa^{1/2}$, если $N \in B_1$, и $h_N = G_N(k; \kappa)$, если $N \in B_2$. Тогда

$$\left(\sum_{N \in B} h_N^{-q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c_6 (1 + o(1)) \kappa^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}},$$

где $c_6 = c_6(q, \Lambda) > 0$. Пусть $\tau > 2$, $1 < \sigma < 2$ и $1/\tau + 1/q = 1/2$, $1/\sigma + 1/\tau = 1$. Для всех $N \in B$ имеем

$$\kappa^{\frac{1}{2}} \|\phi_N\| \leq h_N \|\phi_N\| \leq \|\widehat{D}_N(k; \kappa) \phi_N\| \leq \|\psi_N\| + \sum_{l=1}^2 \|(\widehat{W}^{(l)} \phi)_N\|.$$

Обозначим

$$B_3 = \left\{ N \in B : \|\psi_N\| \geq \sum_{l=1}^2 \|(\widehat{W}^{(l)} \phi)_N\| \right\}, \quad B_4 = B \setminus B_3.$$

Используя неравенства Гельдера и Хаусдорфа–Юнга, получаем

$$\begin{aligned} \|\phi^{B_3}\| &\leq 2 \kappa^{-\frac{1}{2}} \|\psi^{B_3}\|, \\ \|\phi^{B_4}\| &\leq s^{\frac{1}{2}}(K) \left(\sum_{N \in B_4} h_N^{-q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{N \in B} h_N^\tau \|\phi_N\|^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \leq \\ &\leq 2c_6 s^{\frac{1}{2}}(K) (1 + o(1)) \kappa^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \sum_{l=1}^2 \left(\sum_{N \in \Lambda^*} \|(\widehat{W}^{(l)} \phi)_N\|^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \leq \\ &\leq 2c_6 s^{-\frac{1}{q}}(K) (1 + o(1)) \kappa^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \sum_{l=1}^2 \left(\int_K \|\widehat{W}^{(l)} \phi\|_{\mathbf{G}_M}^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \\ &\leq 2c_6 s^{-\frac{1}{q}}(K) \left(\sum_{l=1}^2 \|\widehat{W}^{(l)}\|_{L^q(K; \mathcal{M}_M)} \right) (1 + o(1)) \kappa^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \|\phi\|. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\|\phi^B\| \leq \|\phi^{B_3}\| + \|\phi^{B_4}\| \leq c_7 (1 + o(1)) \kappa^{-\frac{1}{2}} (\|\psi^B\| + \kappa^{\frac{1}{q}} \|\phi\|)$$

и, следовательно,

$$\|\phi^B\| \leq c_7 (1 + o(1)) \kappa^{-\frac{1}{2}} (\|\psi^B\| + \kappa^{\frac{1}{q}} \|\phi^A\|). \quad (10)$$

Положим $\widehat{W}^{(l,1)} = \widehat{W}^{(l)} * \omega_{\kappa^{-\delta}}$, $\widehat{W}^{(l,2)} = \widehat{W}^{(l)} - \widehat{W}^{(l,1)}$, $\kappa \geq \kappa_0$, $l = 1, 2$. Пусть $N \in T_j$, $j = 1, \dots, Q$. Тогда

$$\begin{aligned} 2\kappa(1 + o(1))G_N(k; \kappa) \|\phi_N\|^2 &= G_N^+(k; \kappa) G_N(k; \kappa) \|\phi_N\|^2 = \\ &= |(k + 2\pi N + i\kappa e)^2| \cdot \|\phi_N\|^2 = |(\phi_N, \widehat{D}_N^2(k; \kappa) \phi_N)| = \\ &= \left| \left(\widehat{D}_N(k; -\kappa) \phi_N, \psi_N - \sum_{l=1}^2 (\widehat{W}^{(l)} \phi)_N \right) \right| \leq \\ &\leq \|\widehat{D}_N(k; -\kappa) \phi_N\| \cdot \left(\|\psi_N\| + \sum_{l=1}^2 \|(\widehat{W}^{(l)} \phi^B)_N\| + \sum_{l=1}^2 \|(\widehat{W}^{(l,2)} \phi^T)_N\| \right) + \\ &+ \sum_{l=1}^2 \left| \left(\phi_N, \left(\left(-i \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \widehat{W}^{(l,1)} \right) \widehat{\alpha}_j + \widehat{W}^{(l,1)} \widehat{D}_0(k + i\kappa e) \right) \phi^T \right)_N \right) \right|. \quad (11) \end{aligned}$$

Обозначим $b_1 = \pi|\gamma|^{-1}$ и $b_j = \kappa^{\delta_{j-1}}$, $j = 2, \dots, Q$. Поскольку $\|\widehat{D}_N(k; -\kappa)\phi_N\| \leq (2\kappa + \kappa^{\delta_j})\|\phi_N\|$ (при $N \in T_j$), то из (11) получаем

$$\begin{aligned} (1 + o(1))b_j \|\phi_N\| &\leq \|\psi_N\| + \sum_{l=1}^2 \|(\widehat{W}^{(l)}\phi^B)_N\| + \sum_{l=1}^2 \|(\widehat{W}^{(l,2)}\phi^T)_N\| + \\ &+ \frac{1}{2\kappa} \sum_{l=1}^2 \|(\widehat{W}^{(l,1)}\widehat{D}_0(k + i\kappa e)\phi^T)_N\| + \\ &+ \frac{1}{2\kappa} \sum_{l=1}^2 \left\| \left(\left(-i \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \widehat{W}^{(l,1)} \right) \widehat{\alpha}_j \right) \phi^T \right)_N \right\|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (1 + o(1))b_j \|\phi^{T_j}\| &\leq \|\psi^{T_j}\| + \sum_{l=1}^2 \|\widehat{P}^{T_j} \widehat{W}^{(l)}\phi^B\| + \sum_{l=1}^2 \|\widehat{P}^{T_j} \widehat{W}^{(l,2)}\phi^T\| + \\ &+ \frac{1}{2\kappa} \sum_{l=1}^2 \|\widehat{W}^{(l,1)}\widehat{D}_0(k + i\kappa e)\phi^T\| + \\ &+ \frac{1}{2\kappa} \sum_{l=1}^2 \left\| \left(\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \widehat{W}^{(l,1)} \right) \widehat{\alpha}_j \right) \phi^T \right\|. \end{aligned} \quad (12)$$

Получим оценки для слагаемых в правой части последнего неравенства. Из (8) и (9) (при $l = 1, 2$) следует

$$\frac{1}{2\kappa} \|\widehat{W}^{(l,1)}\widehat{D}_0(k + i\kappa e)\phi^T\| \leq c_5 \|\widehat{W}^{(l)}\|_{L^q(K; \mathcal{M}_M)} \kappa^{-\frac{1}{2} + \frac{2\delta}{q}} \|\phi^T\|, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2\kappa} \left\| \left(\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \widehat{W}^{(l,1)} \right) \widehat{\alpha}_j \right) \phi^T \right\| \leq c_4 c_5 \|\widehat{W}^{(l)}\|_{L^q(K; \mathcal{M}_M)} \kappa^{-1 + (1 + \frac{2}{q})\delta} \|\phi^T\|. \quad (14)$$

Используя (10), получаем

$$\begin{aligned} \|\widehat{P}^{T_j} \widehat{W}^{(l)}\phi^B\| &\leq s^{\frac{1}{2}}(K) \left(\sum_{N \in T_j} 1 \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{N \in T_j} \|(\widehat{W}^{(l)}\phi^B)_N\|^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \leq \\ &\leq s^{-\frac{1}{q}}(K) \mathcal{N}^{\frac{1}{q}}(T_j) \left(\int_K \|\widehat{W}^{(l)}\phi^B\|_{\mathbf{C}^M}^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \\ &\leq c_8(q, \Lambda) \|\widehat{W}^{(l)}\|_{L^q(K; \mathcal{M}_M)} (1 + o(1)) \kappa^{\frac{2\delta_j}{q}} \|\phi^B\| \leq \\ &\leq c_9(1 + o(1)) \kappa^{-\frac{1}{2} + \frac{2\delta_j}{q}} (\|\psi^B\| + \kappa^{\frac{1}{q}} \|\phi^T\|), \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим теперь норму $\|\widehat{P}^{T_j}\widehat{W}^{(l,2)}\phi^T\|$, $l = 1, 2$. Имеем

$$\begin{aligned}
\|\widehat{P}^{T_j}\widehat{W}^{(l,2)}\phi^T\|^2 &= s(K) \sum_{N \in T_j} \left\| \sum_{n: N-n \in T} \widehat{W}_n^{(l,2)} \phi_{N-n} \right\|^2 \leq \\
&\leq s(K) \sum_{N \in T_j} \left(\sum_{n: N-n \in T} \|\widehat{W}_n^{(l,2)}\|_{\mathcal{M}_M}^2 \right) \left(\sum_{n: N-n \in T} \|\phi_{N-n}\|^2 \right) = \\
&= \left(\sum_{N \in T_j} \sum_{n: N-n \in T} \|\widehat{W}_n^{(l,2)}\|_{\mathcal{M}_M}^2 \right) \|\phi^T\|^2 = \\
&= \left(\sum_{n \in \Lambda^*} S_j(n) \|\widehat{W}_n^{(l,2)}\|_{\mathcal{M}_M}^2 \right) \|\phi^T\|^2, \tag{16}
\end{aligned}$$

где $S_j(n)$ – количество таких векторов $N \in T_j$, для которых $N - n \in T$. Для всех $n \in \Lambda^*$ справедлива оценка $S_j(n) \leq \mathcal{N}(T_j)$. Поскольку $\widehat{W}_n^{(l,2)} = \widehat{O}$ при $2\pi|n| \leq \kappa^\delta$, а при любых $N', N'' \in T^+$ или $N', N'' \in T^-$ выполняются неравенства $2\pi|N' - N''| \leq 2\kappa^{1/2} \leq \kappa^\delta$ (т.к. $\kappa \geq \kappa_0$), то $S_j(n) \|\widehat{W}_n^{(l,2)}\|_{\mathcal{M}_M}^2 > 0$ только в случае, если существует вектор $N \in \Lambda^*$, для которого $N \in T_j^+$, $N - n \in T^-$ или $N \in T_j^-$, $N - n \in T^+$. Следовательно, в случае $S_j(n) \|\widehat{W}_n^{(l,2)}\|_{\mathcal{M}_M}^2 > 0$ имеем

$$2\kappa - \kappa^{\delta_j} - \kappa^{\frac{1}{2}} < 2\pi|(n, E)| < 2\kappa + \kappa^{\delta_j} + \kappa^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда $|\kappa - \pi|(n, E)| \leq \kappa^{1/2}$. Обозначим

$$\mathcal{F}_l(\kappa) = \sum_{n \in \Lambda^*: |\kappa - \pi|(n, E)| \leq \kappa^{\frac{1}{2}}} \|\widehat{W}_n^{(l,2)}\|_{\mathcal{M}_M}^2, \quad l = 1, 2.$$

Из (16) получаем

$$\|\widehat{P}^{T_j}\widehat{W}^{(l,2)}\phi^T\| \leq \mathcal{N}^{\frac{1}{2}}(T_j) \mathcal{F}_l^{\frac{1}{2}}(\kappa) \|\phi^T\|.$$

Так как

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^2 \int_{\kappa_0}^{+\infty} \kappa^{-\frac{1}{2}} \mathcal{F}_l(\kappa) d\kappa &\leq 2 \sum_{l=1}^2 \sum_{n \in \Lambda^*: \pi|(n, E)| \geq \kappa_0 - \kappa_0^{\frac{1}{2}}} \|\widehat{W}_n^{(l,2)}\|_{\mathcal{M}_M}^2 \leq \\
&\leq 2M^2 s^{-1}(K) \sum_{l=1}^2 \|\widehat{W}^{(l)}\|_{L^2(K; \mathcal{M}_M)}^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

то существуют числа $\kappa_\nu \geq \kappa_0$, $\nu \in \mathbf{N}$, такие, что $\kappa_\nu \rightarrow \infty$ при $\nu \rightarrow +\infty$ и $\mathcal{F}_l(\kappa_\nu) \leq \kappa_\nu^{1/2}$ для всех $\nu \in \mathbf{N}$ и $l = 1, 2$. Будем далее предполагать, что $\kappa = \kappa_\nu$ для некоторого $\nu \in \mathbf{N}$. В этом случае

$$\|\widehat{P}^{T_j}\widehat{W}^{(l,2)}\phi^T\| \leq c_{10} (1 + o(1)) \kappa^{\delta_j - \frac{1}{4}} \|\phi^T\|. \tag{17}$$

Выберем числа

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_j \in \left(\max \left\{ \frac{2}{q} \delta_j, \delta_j - \frac{1}{4} \right\}, \delta_{j-1} \right), \quad j = 2, \dots, Q.$$

Сложим неравенства (12) при $j = 1, \dots, Q$, предварительно умножив их на $\kappa^{-\rho_j}$. Используя оценки (13)–(15) и (17), получаем

$$(1 + o(1)) \sum_{j=1}^Q b_j \kappa^{-\rho_j} \|\phi^{T_j}\| \leq \sum_{j=1}^Q \kappa^{-\rho_j} \|\psi^{T_j}\| + (1 + o(1)) \kappa^{-\frac{1}{2} + \frac{2\delta_1}{q}} \|\psi^B\| + o(1) \|\phi^T\|.$$

Следовательно,

$$\frac{\pi}{|\gamma|} (1 + o(1)) \|\phi^T\| \leq \|\psi\|.$$

Отсюда и из неравенства (10) вытекает требуемая оценка

$$\frac{\pi}{|\gamma|} (1 + o(1)) \|\phi\| \leq \|\psi\|$$

(при $\kappa = \kappa_\nu \rightarrow +\infty$, $\nu \rightarrow +\infty$). Теорема 3 доказана.

Список литературы

- [1] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1978.
- [2] *Л. И. Данилов.* ТМФ. 1995. Т. 103. № 1. С. 3–22.
- [3] *И. М. Гельфанд.* ДАН СССР. 1950. Т. 73. № 6. С. 1117–1120.
- [4] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.
- [5] *L. E. Thomas.* Commun. Math. Phys. 1973. V. 33. P. 335–343.
- [6] *Л. И. Данилов.* ТМФ. 1990. Т. 85. № 1. С. 41–53.
- [7] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [8] *М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина.* Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. № 1. С. 32–48.
- [9] *Л. И. Данилов.* Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. III. Деп. в ВИНТИ 10.07.92. № 2252-B92. М.: ВИНТИ, 1992.
- [10] *Л. И. Данилов.* О спектре оператора Дирака с периодическим потенциалом. Препринт. Свердловск: ФТИ УрО АН СССР, 1987.
- [11] *Л. И. Данилов.* Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. VI. Деп. в ВИНТИ 31.12.96. № 3855-B96. М.: ВИНТИ, 1996.
- [12] *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [13] *Л. И. Данилов.* Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. I. Деп. в ВИНТИ 12.12.91. № 4588-B91. М.: ВИНТИ, 1991.
- [14] *Л. И. Данилов.* Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. IV. Деп. в ВИНТИ 31.01.95. № 264-B95. М.: ВИНТИ, 1995.

Поступила в редакцию 25.VI.1998 г.