Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Жислин, Спектральные свойства гамильтонианов с магнитным полем при фиксации псевдомомента. II, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 1, 15–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf683>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:51:02

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГАМИЛЬТониАнов с МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ПРИ ФИКСАЦИИ ПСЕВДОМОМЕНТА. II

Изучен дискретный спектр многочастичных гамильтонианов H_0 нейтральных систем в однородном магнитном поле при фиксации псевдомомента. Установлена общая теорема, описывающая при некоторых условиях дискретный спектр оператора H_0 в терминах свойств дискретного спектра построенных эффективных одномерных дифференциальных операторов, структура спектра которых известна. На этой основе получены условия конечности и бесконечности дискретного спектра и спектральные асимптотики оператора H_0 . Результаты работы применимы к гамильтонианам любых атомов. Работа продолжает исследование, начатое в [1].

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе продолжено начатое в [1] изучение спектра многочастичных гамильтонианов H_0 нейтральных систем в однородном магнитном поле после фиксации псевдомомента и отделения движения центра масс в направлении поля. Здесь мы начинаем исследование с найденного в [1] оператора H_0 (см. (1.1)) и с установленной там теоремы о локализации существенного спектра. Главная цель данной работы – получить информацию о дискретном спектре оператора H_0 , ибо ранее дискретный спектр был изучен только для системы типа атома водорода [1].

Как и в большинстве работ о дискретном спектре, мы рассматриваем здесь ситуацию, когда граница дискретного (и существенного) спектра оператора H_0 определяется только распадами $Z_2 = \{C_1, C_2\}$ исходной системы¹⁾ на две устойчивые подсистемы, т.е. когда величина $\inf H_{03}(Z_2)$ (см. (1.4)) есть точка дискретного спектра этого оператора. При выполнении этого условия в работе впервые получены достаточные условия

¹⁾Мы называем систему распадающейся на подсистемы C_1, C_2 , если ее гамильтониан не содержит потенциалов взаимодействия между частицами из разных подсистем. В то же время разности координат $x_i - x_j$, $y_i - y_j$, $i \in C_1$, $j \in C_2$, могут входить в кинетическую часть гамильтониана.

* Научно-исследовательский радиофизический институт Министерства общего и профессионального образования Российской Федерации, Нижний Новгород, Россия

конечности и бесконечности дискретного спектра (теоремы 1.2, 1.3) и – в ситуации когда дискретный спектр бесконечен – спектральные асимптотики (теорема 1.4).

Чтобы определить область применимости этих результатов, нами предпринято изучение спектральных свойств операторов $H_{03}(Z_2)$, отвечающих распавшейся системе. Показано, что если кластеры C_1, C_2 в Z_2 не нейтральны, то граница существенного спектра оператора $H_{03}(Z_2)$ есть $\inf H_{03}(Z'_3)$ для некоторого разбиения $Z'_3 = \{C'_1, C'_2, C'_3\}$, получающегося из Z_2 дроблением какой-либо из подсистем C_1, C_2 (теорема 1.5). Отсюда следует, что условие применимости теорем 1.2–1.4 есть неравенство

$$\inf H_{03}(Z_2) < \inf H_{03}(Z'_3). \quad (1)$$

Для его проверки надо исследовать природу нижней точки спектра операторов $H_{03}(Z_2), H_{03}(Z'_3)$. С этой целью для n -электронных атомов мы устанавливаем некоторое достаточное условие, обеспечивающее выполнение неравенства (1) (теорема 1.6). С его помощью нам удалось доказать это неравенство для $n = 2, 3$. Таким образом для трехчастичных систем, включая атом гелия, впервые найдены спектральные асимптотики (двухчастичные системы были изучены ранее в [1]).

Когда данная статья готовилась к печати, справедливость условия типа (1) была доказана [2] с применением теорем типа 1.5, 1.6 для произвольных атомов. Следовательно, наши общие результаты (теоремы 1.2, 1.4) применимы к любым атомам, для которых таким образом получены спектральные асимптотики.

В заключение отметим, что главные результаты статьи – теоремы 1.2, 1.5, 1.6 – установлены путем дальнейшего развития геометрических методов с применением более сложных, чем ранее, типов разбиения конфигурационного пространства и что все утверждения работы учитывают перестановочную симметрию системы.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Мы рассматриваем нейтральную квантовую систему $Z_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ n частиц в однородном магнитном поле, направление которого принято за направление оси z . Пусть $m_i, e_i, r_i = (x_i, y_i, z_i)$ – масса, заряд и радиус-вектор частицы с номером i ,

$$M = \sum_{j=1}^n m_j, \quad Q = \sum_{j=1}^n e_j = 0.$$

Относительные координаты j -й частицы мы обозначаем через q_j :

$$q_j = (q_{j\perp}, q_{j3}) = (q_{j1}, q_{j2}, q_{j3}) = r_j - \sum_{t=1}^n m_t r_t \cdot M^{-1}.$$

Тогда оператор энергии системы Z_1 после отделения движения центра масс в направлении 3-й оси и после сужения на подпространство функций с фиксированными значениями ν_1, ν_2 компонент псевдомомента может быть записан в следующей форме [1]:

$$H_0 = T_{\perp}^0 + T_3^0 + F + V(q), \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned}
T_{\perp}^0 &= \sum_{t=1}^n m_t \sum_{p=1}^2 \left(\frac{1}{i} \nabla_{tp}^0 - \mathcal{D}_{tp} \right)^2, \quad T_3^0 = - \sum_{t=1}^n m_t (\nabla_{t3}^0)^2, \\
\nabla_{tp}^0 &= \frac{1}{m_t} \frac{\partial}{\partial q_{tp}} - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_{jp}}, \quad p = 1, 2, 3, \\
\mathcal{D}_{t1} &= \nu_1 \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{nm_t} \right) + B \sum_{j=1}^n (q_{j2} - q_{t2}) \left(\frac{e_t - e_j}{nm_t} + \frac{2e_j}{M} \right), \\
\mathcal{D}_{t2} &= \nu_2 \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{nm_t} \right) - B \sum_{j=1}^n (q_{j1} - q_{t1}) \left(\frac{e_t - e_j}{nm_t} + \frac{2e_j}{M} \right), \\
F &= (\nu_1 + \mathcal{E}_2)^2 + (\nu_2 - \mathcal{E}_1)^2, \quad \mathcal{E}_j = 2B \sum_{t=1}^n q_{tj} e_t, \quad V(q) = \sum_{s < t}^{1, n} V_{st}(|q_s - q_t|).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Относительно потенциалов $V_{st}(|q_1|)$ мы предполагаем, что

$$\begin{aligned}
V_{st}(|q_1|) &\in \mathcal{L}_{2, \text{loc}}(R^3), \quad V_{st}(|q_1|) \in C^2 \quad \text{при } |q_1| \neq 0, \\
V_{st}(|q_1|) &= e_s e_t |q_1|^{-\gamma} \quad \text{при } |q_1| > a,
\end{aligned}$$

где $\gamma > 0$, $a > 0$ — некоторые константы.

1.2. Пусть

$$R_0 = \left\{ q \mid q = (q_1, \dots, q_n), \quad q_i = r_i - \sum_{t=1}^n m_t r_t \cdot M^{-1}, \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

— конфигурационное пространство относительного движения системы Z_1 ; очевидно, при $q \in R_0$

$$\sum_{j=1}^n m_j q_j = 0.$$

Оператор H_0 рассматривается в пространстве $\mathcal{L}_2(R_0)$. Расширим H_0 с области $\mathcal{D}(H_0) = C_0^2(R_0)$ до самосопряженного оператора, сохраняя для последнего и его области прежние обозначения H_0 и $\mathcal{D}(H_0)$. Пусть S — группа перестановок тождественных частиц системы Z_1 и α — произвольный тип неприводимого представления группы²⁾ S , $P^{(\alpha)}$ — проектор в $\mathcal{L}_2(R_0)$ на подпространство функций, преобразующихся под действием операторов T_g : $T_g \psi(q) = \psi(g^{-1}q)$, $g \in S$, по представлению типа α , $H_0^{(\alpha)}$ — ограничение оператора H_0 на подпространство $B^{(\alpha)} = P^{(\alpha)} \mathcal{L}_2(R_0)$.

В настоящей работе изучается дискретный спектр оператора $H_0^{(\alpha)}$ с областью $\mathcal{D}(H_0^{(\alpha)}) = P^{(\alpha)} \mathcal{D}(H_0)$.

²⁾ Для физической значимости результатов нужно брать только те α , которые разрешены для системы Z_1 принципом запрета Паули; в настоящей работе α может быть любым.

1.3. Пусть $Z_s = \{C_1, \dots, C_s\}$ – произвольное разбиение системы Z_1 на s непересекающихся непустых кластеров C_t ,

$$\begin{aligned} M[C_t] &= \sum_{i \in C_t} m_i, & Q[C_t] &= \sum_{i \in C_t} e_i, \\ R_{03}(Z_s) &= \left\{ q \mid q \in R_0, \sum_{k \in C_t} m_k q_{k3} = 0, \quad t = 1, 2, \dots, s \right\}, \\ R_{c3}(Z_s) &= \left\{ q \mid q \in R_0, \quad q_j = (0, 0, q_{j3}), \quad j = 1, \dots, n, \right. \\ &\quad \left. (q, q')_1 = 0 \quad \forall q' \in R_{03}(Z_s) \right\}, \end{aligned}$$

где для любых $q = (q_1, \dots, q_n)$, $q' = (q'_1, \dots, q'_n)$ из R_0

$$(q, q')_1 = \sum_{j=1}^n m_j (q_j, q'_j)_{R^3}. \quad (1.3)$$

Очевидно,

$$R_0 = R_{03}(Z_s) \oplus R_{c3}(Z_s).$$

$R_{03}(Z_s)$ и $R_{c3}(Z_s)$ суть конфигурационное пространство относительного движения и пространство движения центров масс кластеров $C_1 \dots C_s$ в направлении от z .

Оператор энергии составной системы Z_s , состоящей из не взаимодействующих между собой кластеров C_t , после отделения движения центра масс каждого кластера в направлении оси z может быть записан в виде

$$H_{03}(Z_s) = T_{\perp}^0 + T_3^0(Z_s) + F + V_{Z_s}(q), \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} T_3^0(Z_s) &= - \sum_{t=1}^s \sum_{i \in C_t} \frac{1}{m_t} \left(\frac{\partial}{\partial q_{i3}(Z_s)} - \frac{m_i}{M[C_t]} \sum_{p \in C_t} \frac{\partial}{\partial q_{p3}} \right)^2, \\ V_{Z_s}(q) &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^s \sum_{i, j \in C_t, i \neq j} V_{ij}(|q_i - q_j|), \\ q_i - q_j &= (q_{i1} - q_{j1}, q_{i2} - q_{j2}, q_{i3}(Z_s) - q_{j3}(Z_s)), \\ q_{i3}(Z_s) &= q_{i3} - \frac{1}{M[C_t]} \sum_{k \in C_t} m_k q_{k3} \quad \text{при } i \in C_t. \end{aligned}$$

Оператор $H_{03}(Z_s)$ будет рассматриваться в пространстве $\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_s))$.

1.4. Пусть $\widehat{S} = \widehat{S}(Z_s)$ – группа перестановочной симметрии системы Z_s , порожденная группами $S[C_t]$, $t = 1, 2, \dots, s$, перестановок тождественных частиц в кластерах $C_1, \dots, C_s$ и перестановками между собой тождественных кластеров C_i из Z_s , если таковые имеются. Обозначим возможные типы неприводимых представлений группы $\widehat{S}$ в $\mathcal{L}_2(R_0)$, $\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_s))$ и $\mathcal{L}_2(R_{c3}(Z_s))$ соответственно через $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\alpha}_c$ ³⁾, их матрицы – через $\mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha})}$, $\mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha}_0)}$ и $\mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha}_c)}$, их размерности – через $|\hat{\alpha}|$, $|\hat{\alpha}_0|$ и $|\hat{\alpha}_c|$. Будем писать (следуя схеме [3]), что

$(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_c) \prec \alpha$, если хотя бы одна неприводимая компонента тензорного произведения представлений $\mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha}_0)} \otimes \mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha}_c)}$ группы $\widehat{S}(Z_s)$ содержится в неприводимом представлении типа α группы S после сужения его с S на $\widehat{S}$;

$\hat{\alpha}_0 \prec \alpha$, если найдется такой тип $\hat{\alpha}_c$, что $(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_c) \prec \alpha$.

Обозначим через $P^{(\hat{\alpha}_0)}(Z_s)$ проектор в $\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_s))$ на подпространство функций, преобразующихся по представлению типа $\hat{\alpha}_0$, и положим

$$H_{03}^{(\hat{\alpha}_0)}(Z_s) = H_{03}(Z_s)P^{(\hat{\alpha}_0)},$$

$$H_{03}(\alpha; Z_s) = \sum_{\hat{\alpha}_0 \prec \alpha} H_{03}^{(\hat{\alpha}_0)}(Z_s) = \sum_{\hat{\alpha}_0 \prec \alpha} H_0(Z_s)P^{(\hat{\alpha}_0)},$$

$$\mu^{(\alpha)} = \min_{Z_s, s \geq 2} \inf H_{03}(\alpha; Z_s).$$

Если разбиение $Z'_k = \{C'_1, \dots, C'_k\}$ получено из Z_s дроблением хотя бы одного кластера из Z_s , то мы будем писать $Z'_k < Z_s$. Так как

$$\inf H_{03}(\alpha; Z_s) \leq \inf H_{03}(\alpha; Z'_k) \quad \text{при} \quad Z'_k < Z_s,$$

то

$$\mu^{(\alpha)} = \min_{Z_2} \inf H_{03}(\alpha; Z_2). \quad (1.5)$$

Для произвольного оператора A мы обозначаем далее через $\sigma_{\text{ess}}(A)$, $\sigma_d(A)$, $\sigma_p(A)$ и $\sigma_{\text{pp}}(A)$ соответственно его существенный, дискретный, точечный и чисто точечный спектры.

1.5. ТЕОРЕМА 1.1. *Для любых α*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_0^\alpha) = [\mu^\alpha; +\infty). \quad (1.6)$$

Доказательство теоремы 1.1 дано в [1]. Мы приводим ее здесь потому, что будем неоднократно к ней обращаться и т.к. хотим дать более простое (эквивалентное) определение соотношения $\hat{\alpha}_0(Z_2) \prec \alpha$, используемого в определении оператора $H_{03}(\alpha; Z_2)$ и, значит, в выражении (1.5) для числа $\mu^{(\alpha)}$.

³⁾ Когда мы говорим о представлении группы S или ее подгрупп в каком-либо подпространстве из $\mathcal{L}_2(R_0)$, мы всегда имеем в виду представление операторами T_g (см. п. 1.2).

Пусть $\mathcal{N}_{\hat{\alpha}}^{\alpha}(Z_2)$ – кратность представления типа $\hat{\alpha}$ группы $\hat{S}(Z_2)$ в представлении типа α после сужения последнего с S на $\hat{S}(Z_2)$. Если кластеры C_1, C_2 не тождественны ($C_1 \not\sim C_2$), то группа $\hat{S}(Z_2)$ в $\mathcal{L}_2(R_{c3}(Z_2))$ имеет только тождественное представление, т.к. перестановки из $\hat{S}(Z_2)$ не меняют координаты векторов из $R_{c3}(Z_2)$. Поэтому в данном случае $\mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_0} \otimes \mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_c} = \mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_0}$ и соотношение $\hat{\alpha}_0(Z_2) \prec \alpha$ означает, что $\mathcal{N}_{\hat{\alpha}_0}^{\alpha} \geq 1$. Если кластеры C_1 и C_2 тождественны ($C_1 \sim C_2$), то группа $\hat{S}(Z_2)$ имеет в $R_{c3}(Z_2)$ два одномерных неприводимых представления, типы которых мы обозначаем через $\hat{\alpha}_c^{\pm}$. В обоих представлениях перестановкам частиц внутри C_j , $j = 1, 2$, отвечает число 1; перестановке кластеров $C_1 \leftrightarrow C_2$ в представлении типа $\hat{\alpha}_c^+$ отвечает число 1, а в представлении типа $\hat{\alpha}_c^-$ – число -1 . Поэтому представление $\mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}} := \hat{\mathcal{D}}_g^{\hat{\alpha}_0} \otimes \mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_c}$ при $\hat{\alpha}_c = \hat{\alpha}_c^{\pm}$ неприводимо; $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_0$ при $\hat{\alpha}_c = \hat{\alpha}_c^+$; при $\hat{\alpha}_c = \hat{\alpha}_c^-$ мы обозначим его тип через $-\hat{\alpha}_0$. Соотношение $\hat{\alpha}_0 \prec \alpha$ в этом случае означает, что хотя бы одна из величин $\mathcal{N}_{\hat{\alpha}_0}^{\alpha}(Z_2), \mathcal{N}_{-\hat{\alpha}_0}^{\alpha}(Z_2)$ не равна нулю. Положим

$$\begin{aligned} d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0) &= \mathcal{N}_{\hat{\alpha}_0}^{\alpha}(Z_2) && \text{при } C_1 \not\sim C_2, \\ d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0) &= \mathcal{N}_{\hat{\alpha}_0}^{\alpha}(Z_2) + \mathcal{N}_{-\hat{\alpha}_0}^{\alpha}(Z_2) && \text{при } C_1 \sim C_2. \end{aligned}$$

Тогда условие $\hat{\alpha}_0 \prec \alpha$ эквивалентно условию $d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0) \geq 1$.

1.6. Пусть

$$\begin{aligned} O(\alpha) &= \{Z_2 \mid \inf H_{03}(\alpha; Z_2) = \mu^{(\alpha)}\}, \\ O_d(\alpha) &= \{Z_2 \mid Z_2 \in O(\alpha), \mu^{(\alpha)} \in \sigma_d(H_{03}(\alpha; Z_2))\}. \end{aligned}$$

$O_d(\alpha)$ – это множество устойчивых двухкластерных систем Z_2 , нижняя грань энергии которых является нижней гранью существенного спектра оператора $H_0^{(\alpha)}$. Мы будем изучать дискретный спектр оператора $H_0^{(\alpha)}$ в предположении, что

$$O(\alpha) = O_d(\alpha). \quad (1.7)$$

Разумеется, это условие выполняется не всегда, однако оно является обычным для работ по исследованию дискретного спектра (см., например, [3–5]). Кроме того, отметим, что в отсутствие магнитного поля равенство (1.7) выполняется, в частности, для любых атомов и положительных ионов, а также для однократных отрицательных ионов [5]. При $Z_2 \in O_d(\alpha)$ обозначим через $W(\alpha; Z_2)$ собственное подпространство оператора $H_{03}(\alpha; Z_2)$, отвечающее его собственному значению $\mu^{(\alpha)}$.

Кроме выполнения равенства (1.7) мы предполагаем также, что:

A_1 . Все $Z_2' \in O(\alpha)$ могут быть получены из одного $Z_2 \in O(\alpha)$ перестановками тождественных частиц.

A_2 . Представление группы $\hat{S}(Z_2)$ в $W(\alpha; Z_2)$ неприводимо, т.е. найдется такой тип $\hat{\alpha}_0$, что

$$P^{(\hat{\alpha}_0)}W(\alpha; Z_2) = W(\alpha; Z_2) \quad \text{и} \quad \dim W(\alpha; Z_2) = |\hat{\alpha}_0|.$$

Условия A_1, A_2 носят чисто технический характер и служат для упрощения формулировок и доказательств. Мы будем указывать, какие изменения в формулировках необходимо сделать, если A_1 или A_2 не выполняется.

1.7. Условие (1.7) подсказывает, что вклад распадаения $Z_2 = \{C_1, C_2\}$ в дискретный спектр оператора $H_0^{(\alpha)}$ должен зависеть от взаимодействия между кластерами C_1, C_2 из Z_2 , когда система Z_2 находится в основном состоянии. Оценивая это взаимодействие сверху и снизу для больших значений

$$|\zeta_3| = \left| \sum_{j \in C_1} \frac{m_j q_{j3}}{M[C_1]} - \sum_{i \in C_2} \frac{m_i q_{i3}}{M[C_2]} \right|,$$

можно получить одномерные эффективные потенциалы

$$\begin{aligned} V_{Z_2}^{\pm}(\zeta_3) &= Q(Z_2) |\zeta_3|^{-\gamma} \pm c_0 |\zeta_3|^{-\gamma_0}, & \text{если } |\zeta_3| \geq b_0, \\ V_{Z_2}^+(\zeta_3) &= Q(Z_2) b_0^{-\gamma}, \quad V_{Z_2}^-(\zeta_3) \equiv 0, & \text{если } |\zeta_3| < b_0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

и ввести, далее, эффективные одномерные операторы в $\mathcal{L}_2(R^1)$:

$$h_{Z_2}^{\pm} = -M(Z_2)^{-1} \frac{d^2}{d\zeta_3^2} + V_{Z_2}^{\pm}(\zeta_3), \quad (1.9)$$

где b_0 и c_0 – некоторые константы, $M(Z_2)^{-1} = M[C_1]^{-1} + M[C_2]^{-1}$, $Q(Z_2) = Q[C_1] \times Q[C_2]$, $\gamma_0 = \min(\gamma + d, 3)$. Здесь $d = 2$, если выполнено условие A_2 или более общее условие

A_3 . Все функции из $W(\alpha; Z_2)$, отвечающие одному и тому же типу перестановочной симметрии, имеют одну и ту же четность относительно инверсии $q_{i3} \rightarrow -q_{i3}$ ⁴⁾.

В остальных случаях в выражении для γ_0 $d = 1$.

Для $\lambda < 0$ обозначим через $N(\lambda; h_{Z_2}^{\pm})$ и $N(\mu^{(\alpha)} + \lambda, H_0^{(\alpha)})$ размерности линейных оболочек собственных векторов операторов $h_{Z_2}^{\pm}$ и $H_0^{(\alpha)}$, отвечающих собственным значениям этих операторов, не превосходящим соответственно λ и $\mu^{(\alpha)} + \lambda$.

1.8. Основной результат этой работы – теорема 1.2.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть условие (1.7) верно и $Q(Z_2) < 0 \quad \forall Z_2 \in O(\alpha)$. Тогда для любого типа α неприводимого представления группы S , всех $\lambda < 0$ и некоторой константы c^0

$$-c^0 + d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0) N(\lambda; h_{Z_2}^+) \leq N(\mu^{(\alpha)} + \lambda; H_0^{(\alpha)}) \leq c^0 + d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0) N(\lambda; h_{Z_2}^-). \quad (1.10)$$

⁴⁾ Условие A_2 является достаточным для справедливости A_3 , ибо если бы A_3 не выполнялось для какого-то типа $\hat{\alpha}'_0$ неприводимого представления группы $\hat{S}(Z_2)$ в $W(\alpha; Z_2)$, то тогда подпространство $W(\alpha; Z_2)$ содержало бы не менее двух базисов представления типа $\hat{\alpha}'_0$, один из которых четный, а другой нечетный по отношению к инверсии $q_{j3} \rightarrow -q_{j3}$, что противоречило бы требованию $\dim W(\alpha, Z_2) = |\hat{\alpha}'_0|$, содержащемуся в A_2 .

ЗАМЕЧАНИЯ.

1. Эффективные операторы $h_{Z_2}^\pm$ не зависят явно от фиксированного значения псевдомомента $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, однако от ν может зависеть константа c^0 в (1.10). Кроме того (и это наиболее важно), от ν могут зависеть граница существенного спектра – число μ^α и класс $O(\alpha)$, а следовательно, и эффективный потенциал. Однако сейчас мы не готовы привести какие-либо примеры.

2. Если $Q(Z_2) = 0$, то доказательство теоремы 1.2 остается в силе, однако для получения содержательных результатов надо иметь более точные выражения для эффективных потенциалов $V_{Z_2}^\pm(\zeta_3)$. Чтобы не усложнять изложение, мы не будем их искать. Кроме того, при $Q(Z_2) \equiv Q[C_1] \cdot Q[C_2] = 0$ выполняется равенство $Q[C_1] = -Q[C_2] = 0$. В такой ситуации мы не имеем подходов к проверке условия (1.7) (см. теорему 1.5) и не можем указать ни одного примера, где оно выполняется.

3. При нарушении условия A_1 множество $O(\alpha)$ разбивается на непересекающиеся классы $\mathcal{K}_i$ так, чтобы все Z'_2 из класса $\mathcal{K}_i$ получались из некоторого $Z_{2i} \in \mathcal{K}_i$ перестановками тождественных частиц и чтобы ни одно $Z_2 \in \mathcal{K}_j$ при $j \neq i$ не обладало этим свойством. Тогда вместо (1.10) будет справедливо соотношение

$$\begin{aligned} -c^0 + \sum_i d_{Z_{2i}}(\alpha; \hat{\alpha}_{0i}) N(\lambda; h_{Z_{2i}}^+) &\leq N(\mu^{(\alpha)} + \lambda, H_0^{(\alpha)}) \leq \\ &\leq c^0 + \sum_i d_{Z_{2i}}(\alpha, \hat{\alpha}_{0i}) N(\lambda; h_{Z_{2i}}^-), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $\hat{\alpha}_{0i}$ определяется для разбиения Z_{2i} так же, как $\hat{\alpha}_0$ для Z_2 . При этом мы предполагаем, что для каждого Z_{2i} условие A_2 выполняется, если там положить $Z_2 = Z_{2i}$, $\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_{0i}$.

4. Если условие A_2 не выполнено для разбиения Z_2 или для какого-то разбиения Z_{2i} (см. замечание 3), то в неравенствах (1.10), (1.11) вместо коэффициентов $d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0)$ и $d_{Z_{2i}}(\alpha, \hat{\alpha}_{0i})$ надо взять соответственно

$$d_{Z_2}(\alpha) = \sum_{s=1}^{s_0} k_0^{(s)} d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0^{(s)}) \quad \text{и} \quad d_{Z_{2i}}(\alpha) = \sum_{t=1}^{t_i} k_i^{(t)} d_{Z_{2i}}(\alpha, \hat{\alpha}_{0i}^{(t)}),$$

где $\hat{\alpha}_0^{(s)}$ и $\hat{\alpha}_{0i}^{(t)}$ – все типы неприводимых представлений групп $\widehat{S}(Z_2)$ и $\widehat{S}(Z_{2i})$, для которых соответственно

$$\begin{aligned} P^{(\hat{\alpha}_0^{(s)})} W(\alpha; Z_2) &\neq 0, \quad s = 1, \dots, s_0, \\ P^{(\hat{\alpha}_{0i}^{(t)})} W(\alpha; Z_{2i}) &\neq 0, \quad t = 1, 2, \dots, t_i, \end{aligned}$$

$k_0^{(s)}$ и $k_i^{(t)}$ – кратности представлений типов $\hat{\alpha}_0^{(s)}$ и $\hat{\alpha}_{0i}^{(t)}$ в $W(\alpha; Z_2)$ и $W(\alpha; Z_{2i})$. При этом в зависимости от выполнения (или невыполнения) условия A_3 (п. 1.7) показатель γ_0 во втором слагаемом эффективного потенциала (1.8) равен $\min(\gamma + 2, 3)$ или $\min(\gamma + 1, 3)$.

5. Эффективные операторы $h_{Z_2}^\pm$ и формулировка теоремы 1.2 практически совпадают с эффективными операторами и теоремой 1 из [4], однако это совпадение чисто внешнее. В [4] исследуются ограничения операторов многочастичных систем на подпространства функций фиксированного веса m $SO(2)$ -симметрии, в то время как здесь изучаются ограничения на подпространство состояний с фиксированным значением псевдомомента. А главное, результаты [4] вообще не применимы к нейтральным системам, ибо для таких систем использование $SO(2)$ -симметрии не позволяет найти границу существенного спектра (отсутствует аналог теоремы Хуншикера–ван Винтера–Жислина).

1.9. Используя теорему 1.2 и известные спектральные свойства операторов $h_{Z_2}^\pm$ [6, 7], можно установить спектральные свойства оператора $H_0^{(\alpha)}$. Считаем далее, что α произвольно, (1.7) выполняется и $Q(Z_2) < 0$ для всех $Z_2 \in O(\alpha)$.

ТЕОРЕМА 1.3. *Дискретный спектр оператора $H_0^{(\alpha)}$ конечен, если $\gamma > 2$ или если $\gamma = 2$ и $Q(Z_2) \geq -4^{-1}M(Z_2)^{-1}$, и бесконечен, если $\gamma = 2$ и $Q(Z_2) < -4^{-1}M(Z_2)^{-1}$ или если $\gamma < 2$ и $Q(Z_2) < 0$.*

ТЕОРЕМА 1.4.

1. При $\lambda \rightarrow -0$, $\gamma < 2$ и $Q(Z_2) < 0$

$$N(\mu^{(\alpha)} + \lambda; H_0^{(\alpha)}) = |\lambda|^{(\gamma-2)/2\gamma} d(\alpha, \hat{\alpha}_0) M(Z_2)^{1/2} |Q(Z_2)|^{1/\gamma} J(\gamma) + \mathcal{R},$$

где

$$J(\gamma) = \gamma^{-1} \int_1^\infty (u-1)^{1/2} u^{-(\gamma+1)/\gamma} du, \quad \mathcal{R} = O(|\ln |\lambda||).$$

2. При $\lambda \rightarrow -0$, $\gamma = 2$ и $Q(Z_2) < -4^{-1}M(Z_2)^{-1}$

$$N(\mu^{(\alpha)} + \lambda; H_0^{(\alpha)}) = \frac{1}{2\pi} |\ln |\lambda|| d(\alpha, \hat{\alpha}_0) (4|Q(Z_2)|M(Z_2) - 1)^{1/2} + o(|\ln |\lambda||).$$

ЗАМЕЧАНИЯ.

1. Теоремы 1.3, 1.4 сформулированы для простоты в предположениях A_1, A_2 . Для получения формулировок в общем случае надо использовать замечания 3, 4 к теореме 1.2 и учесть, что если нарушено условие A_2 и хотя бы для одного Z_{2i} не выполняется A_3 , то при $\gamma < 1$ $\mathcal{R} = O(|\lambda|^{(\gamma-1)/2\gamma})$.

2. При $\gamma = 1$ (кулоновские потенциалы) $J(\gamma) = J(1) = \pi/2$.

1.10. Полученные результаты можно применить к гамильтониану любого атома с фиксированным псевдомоментом (см. п. 1.11–1.14). Мы ограничимся здесь только случаем атома гелия, так как для него формулировка результатов достаточно проста. Пусть $Z_1 = (1, 2, 3)$, где 1 – номер ядра, 2 и 3 – номера электронов, $e_2 = e_3 = -e_1/2$, $m_2 = m_3$, $V_{ij}(r_{ij}) = e_i e_j |r_{ij}|^{-1}$. Возможные типы симметрии α системы Z_1 отвечают симметричному (тождественному) и антисимметричному представлениям группы перестановок двух электронов. Для обоих типов α

$$O(\alpha) = \{Z_2(2), Z_2(3)\}, \quad \text{где } Z_2(j) = \{C_{1j}, C_{2j}\}, \\ C_{1j} = Z_1 \setminus (j), \quad C_{2j} = (j), \quad j = 2, 3.$$

Очевидно, $Q(Z_2(j)) < 0$. Так как оператор $H_{03}(Z_2(j))$ не обладает перестановочной симметрией, то $H_{03}(\alpha; Z_2(j)) = H_{03}(Z_2(j))$. В п. 1.13, 1.14 будет показано, что $\sigma_d(H_{03}(Z_2(j))) \neq \emptyset$ и, значит, (1.7) выполняется. Используя теоремы 1.2, 1.4 и замечание 4 к теореме 1.2, мы получаем

$$N(\mu^\alpha + \lambda; H_0^\alpha) = |\lambda|^{-1/2} c_2^2 \left(\frac{m_2(m_1 + m_2)}{M} \right)^{1/2} d(\alpha) \cdot \frac{\pi}{2} + O(|\ln |\lambda||),$$

где $d(\alpha) = \dim W(\alpha; Z_2(j))$. Мы ожидаем, что $d(\alpha) = 1$, но пока это не доказано.

1.11. Применимость теорем 1.2–1.4 к конкретным системам зависит от справедливости для них соотношения (1.7). Так как проверка (1.7) должна быть основана на знании положения $\sigma_{\text{ess}}(H_{03}(\alpha; Z_2))$ для $Z_2 \in O(\alpha)$, то далее мы устанавливаем теорему 1.5 о локализации $\sigma_{\text{ess}}(H_{03}(\alpha; Z_2))$ и на ее основе для систем типа атомов даем простое достаточное условие непустоты $\sigma_d(H_{03}(\alpha; Z_2))$ – теорему 1.6. Использование теорем 1.5, 1.6 позволило доказать здесь соотношение (1.7) для трехчастичных систем типа атома гелия, а в [2] и для произвольных атомов. Введем обозначение

$$\mu(\alpha; Z_2) = \min_{Z'_s < Z_2} \inf H_{03}(\alpha; Z'_s). \quad (1.12)$$

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $Q(Z_2) < 0$. Тогда

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{03}(\alpha; Z_2)) = [\mu(\alpha; Z_2), +\infty). \quad (1.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как каждое разбиение системы Z_1 на s подсистем при $s > 3$ одновременно является и разбиением на 3 подсистемы, то в (1.12) мы можем брать только $Z'_s = Z'_3$.

1.12. Чтобы понять смысл теоремы 1.5, сравним ситуации с магнитным полем и без него. Будем обозначать через $\hat{H}_0(Z'_s)$ оператор энергии составной системы $Z'_s = \{C'_1, \dots, C'_s\}$ в отсутствие магнитного поля после отделения движения центров масс кластеров $C'_1 \dots C'_s$ в R^3 . Тогда в ситуации без магнитного поля именно оператор $\hat{H}_0(Z_2)$ соответствует оператору $H_{03}(Z_2)$. Согласно [8] (см. также [9])

$$\inf \{ \lambda \mid \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(H_{03}(Z_2)) \} = \inf_{\{\psi_p\}} \lim (\hat{H}_0(Z_2) \psi_p, \psi_p), \quad (1.14)$$

где $\{\psi_p\}$ – последовательности Вейля, отвечающие всем возможным распадам $Z'_2 = \{C'_1, C'_2\}$ исходной системы $Z_2 = \{C_1, C_2\}$. Если ψ_p описывает распадение $Z'_2 = Z_2$, т.е. уход частиц кластера $C_1\{C_2\}$ от кластера $C_2\{C_1\}$, то “уходящая на бесконечность” подсистема C_j обязана распадаться, ибо положение ее центра масс фиксировано. Если ψ_p описывает распадение $Z'_2 = \{C'_1, C'_2\} \neq Z_2$, то, т.к. взаимодействие между кластерами C_1 и C_2 отсутствует, Z'_2 отвечает распадению на кластеры $C'_1 \cap C_1$, $C'_1 \cap C_2$,

$C'_2 \cap C_1$, $C'_2 \cap C_2$, из которых не менее трех непустые. Таким образом, в отсутствие магнитного поля любая последовательность Вейля ψ_p для оператора $\hat{\mathcal{H}}_0(Z_2)$ описывает какое-то распадение Z'_s , $s \geq 3$ и, значит,

$$\inf \{ \lambda \mid \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H}_0(Z_2)) \} \geq \min_{Z'_s < Z_2} \inf \hat{\mathcal{H}}_0(Z'_s). \quad (1.15)$$

Рассмотрим теперь ситуацию с магнитным полем. Аналогично (1.14) (см. [8, 9])

$$\inf \{ \lambda \mid \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(H_{03}(Z_2)) \} = \inf_{\{\psi_p\}} \lim (H_{03}(Z_2)\psi_p, \psi_p), \quad (1.16)$$

где $\{\psi_p\}$ – последовательности Вейля для оператора $H_{03}(Z_2)$. Движение центра масс каждого кластера $C_j \in Z_2$ отделено лишь в направлении от z . Поэтому рассуждения, приведенные ранее для ситуации в отсутствие магнитного поля, применимы только к последовательностям Вейля, описывающим или распада $Z'_2 \neq Z_2$, или $Z'_2 = Z_2$, но в направлении оси z . Другими словами, если ψ_p отвечает распаду $Z'_2 = \{C'_1, C'_2\} \neq Z_2$ или распаду $Z'_2 = Z_2$ за счет увеличения расстояний между частицами кластеров C_1, C_2 в направлении оси z , то аналогично предыдущему можно заключить, что ψ_p описывает какое-то распадение $Z'_s < Z_2$, $s \geq 3$. Однако если ψ_p описывает распад $Z'_2 = Z_2$ за счет увеличения расстояний между кластерами C_1, C_2 в плоскости x, y , то сделать такой вывод априори нельзя. Другими словами, априори мы не можем исключить, что существенный спектр оператора $H_{03}(Z_2)$ возникает за счет бесконечного увеличения расстояний между кластерами C_1, C_2 в плоскости x, y . Теорема 1.5 показывает, что в случае $Q(Z_2) < 0$ такая ситуация невозможна (вследствие фиксации псевдомомента), т.е. что при $Q(Z_2) < 0$ граница существенного спектра оператора $H_0(\alpha; Z_2)$ определяется распадом не менее чем одного кластера $C_i \in Z_2$ (а не движением нераспавшихся кластеров C_1, C_2 в плоскости x, y). Доказательство теоремы 1.5 дано в п. 3.1–3.8.

1.13. Для систем типа атомов с помощью теоремы 1.5 можно получить простое достаточное условие того, что $\mu^{(\alpha)} \in \sigma_d(H_{03}(\alpha, Z_2))$ при $Z_2 \in O(\alpha)$. Пусть, далее, система $Z_1 = (1, \dots, n)$ состоит из $(n-1)$ тождественных частиц с номерами $2, 3, \dots, n$ и зарядами $e_i = e$, $i = 2, \dots, n$, и частицы с номером 1 и зарядом $e_1 = -(n-1)e$, $n \geq 2$. Пусть потенциалы взаимодействия

$$V_{ij}(|r_1|) = e_i e_j \cdot |r_1|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.5.$$

Как показано в [10] без учета симметрии (с учетом симметрии это следует из [1]), множество $O(\alpha)$ содержит все двухкластерные распадения $Z_2(j) = \{C_{1j}, C_{2j}\}$, где $C_{1j} = Z_1 \setminus (j)$, $C_{2j} = j$, $j = 2, 3, \dots, n$, и, значит, $\mu^{(\alpha)} = \inf H_{03}(\alpha; Z_2(2))$. Из теоремы 1.5 следует, что

$$\mu(\alpha; Z_2) = \inf H_{03}(\alpha; Z_3(2, 3)),$$

где $Z_3(2, 3) = \{Z_1 \setminus (2, 3); (2); (3)\}$.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть

$$\mu(\alpha; Z_2) \in \sigma_p(H_{03}(\alpha; Z_3(2, 3))). \quad (1.17)$$

Тогда

$$\mu^{(\alpha)} \in \sigma_d(H_{03}(\alpha; Z_2(2))). \quad (1.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как операторы $H_{03}(\alpha; Z_2(i))$, $i = 2, 3, \dots, n$, и $H_{03}(\alpha; Z_3(i, j))$, $j \neq i$, $i, j = 2, 3, \dots, n$, унитарно эквивалентны соответственно $H_{03}(\alpha; Z_2(2))$ и $H_{03}(\alpha, Z_3(2, 3))$, то в формулировке теоремы 1.6 можно вместо $Z_2(2)$ и $Z_3(2, 3)$ взять $Z_2(i)$ и $Z_3(i, j)$ при любых $i, j \geq 2$, $j \neq i$.

1.14. Доказательство теоремы 1.6 проводится в конце раздела 3, а здесь мы очень просто покажем, что для трехчастичной системы $Z_1 = \{1, 2, 3\}$ типа атома гелия условие (1.17) выполнено. (Напомним еще раз, что справедливость (1.17) для любых атомов установлена в [2].) В рассматриваемом случае $Z_2(2) = \{(1, 3), (2)\}$, $Z_3 = Z_3(2, 3) = \{(1), (2), (3)\}$ и оператор $H_{03}(Z_3)$ есть оператор энергии трех не взаимодействующих друг с другом частиц с отделенным движением каждой частицы в направлении оси z и с фиксированным псевдомоментом. Другими словами, $H_{03}(Z_3)$ – это оператор, полученный из оператора

$$\mathcal{H}_{03}(Z_3) = \sum_{j=1}^3 m_j^{-1} \left(\frac{1}{i} \nabla_{j\perp} - e_j A_j \right)^2$$

после фиксации псевдомомента. Оператор $\mathcal{H}_{03}(Z_3)$ имеет чисто точечный спектр, накапливающийся к $+\infty$. Но каждая точка спектра оператора с фиксированным псевдомоментом есть точка спектра оператора энергии этой же системы до фиксации псевдомомента. Поэтому оператор $H_{03}(Z_3)$, как и $\mathcal{H}_{03}(Z_3)$, имеет чисто точечный спектр. Таким образом, (1.17) выполнено; значит, для трехчастичных систем типа атома гелия выполняется (1.18), а следовательно, и условие (1.7), т.е. теоремы 1.2, 1.4 применимы к $Z_1 = \{1, 2, 3\}$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

2.1. Основная идея доказательства состоит в построении таких подпространств функций $\mathcal{M}_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, что для всех $\lambda < 0$

$$(H_0^\alpha \psi, \psi) \leq (\mu^{(\alpha)} + \lambda) \|\psi\|^2, \quad \text{если } \psi \in \mathcal{M}_1(\lambda), \quad (2.1)$$

$$(H_0^\alpha \psi, \psi) > (\mu^{(\alpha)} + \lambda) \|\psi\|^2, \quad \text{если } \psi \perp \mathcal{M}_2(\lambda), \quad (2.2)$$

и в последующей оценке размерности этих подпространств через величины $N(\lambda; h_{Z_2}^\pm)$. Построение пространства $\mathcal{M}_1(\lambda)$, оценка его размерности и доказательство неравенства (2.1) делаются так же, как в [4]. Поэтому мы приводим здесь только определение $\mathcal{M}_1(\lambda)$. Построение пространства $\mathcal{M}_2(\lambda)$, оценка величины $\dim \mathcal{M}_2(\lambda)$ и доказательство неравенства (2.2) осуществляются с помощью одновременного применения подходов

из [3] и [4]. При этом хотя $\mathcal{M}_2(\lambda)$ строится, как и в [4], на основе линейной оболочки произведений собственных функций одномерного эффективного оператора (отвечающих его собственным значениям, не превосходящим λ) и собственных функций основного состояния системы Z_2 , определяющей границу сплошного спектра, но в отличие от [4] носители этих функций “срезаются” конусами относительного движения распавшейся системы не в направлении 3-й оси, а во всем пространстве, и лишь потом из этих конусов выделяются области, отвечающие распадениям только в направлении 3-й оси. Таким образом, мы проводим здесь двойное разбиение конфигурационного пространства R_0 . Отметим, что разбиение пространства R_0 только в направлении оси z может привести к цели лишь в случае $Q[C_1]Q[C_2] > 0$ [4], который для нейтральных систем невозможен.

2.2. Приступаем к построению пространства $\mathcal{M}_2(\lambda)$ с требуемыми свойствами. Так как оператор $H_0^{(\alpha)}$ зависит только от относительных координат q , то мы можем воспользоваться рассуждениями работы [5], где магнитное поле отсутствует. А именно, по произвольному $\mathcal{E} > 0$ строим такое конечномерное пространство $\mathcal{M}_2^0$, что при $\psi(q) \in \mathcal{D}(H_0^{(\alpha)})$, $\psi \perp \mathcal{M}_2^0$ выполняется неравенство

$$(H_0^{(\alpha)}\psi, \psi) \geq \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \left\{ (H_0^{(\alpha)}\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) - \mathcal{E} \|\psi_{Z_2} |\zeta_{Z_2}|^{-(\gamma+2)/2}\|^2 - C(\mathcal{E}) \|\psi_{Z_2} \chi(t_{Z_2}) |\zeta_{Z_2}|^{-1}\|^2 \right\} + \mu^{(\alpha)} \left(\|\psi\|^2 - \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \|\psi_{Z_2}\|^2 \right), \quad (2.3)$$

где

$$\psi_{Z_2} = \psi u_{Z_2} \omega_b, \quad u_{Z_2} = u(t_{Z_2}), \quad \omega_b = \omega_b(|\zeta_{Z_2}|), \\ t_{Z_2} = |P_0(Z_2)q|_1 \cdot |P_c(Z_2)q|_1^{-1},$$

$P_0(Z_2)$ и $P_c(Z_2)$ – проекторы в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_1$ (см. (1.3)) соответственно на подпространства

$$R_0(Z_2) = \{q^0(Z_2)\} = \left\{ q \mid q \in R_0, \sum_{j \in C_t} m_j q_j = 0, t = 1, 2 \right\},$$

$$R_c(Z_2) = \{q^c(Z_2)\} = \{q \mid q \in R_0, (q, q^0)_1 = 0 \quad \forall q^0 \in R_0(Z_2)\},$$

$$|P_0(Z_2)q|_1^2 = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^2 \frac{1}{M[C_t]} \sum_{i,j \in C_t} m_i m_j |q_i - q_j|^2,$$

$$|P_c(Z_2)q|_1^2 = (q, q) - |P_0(Z_2)q|_1^2 = M(Z_2) |\zeta_{Z_2}|^2$$

(см. [11, с. 125]),

$$q_i - q_j = q_i^0(Z_2) - q_j^0(Z_2), \quad q_j^0(Z_2) = q_j - \zeta_{Z_2}[C_t], \quad j \in C_t,$$

$$\zeta_{Z_2} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (\zeta_\perp, \zeta_3) = \zeta[C_1] - \zeta[C_2],$$

$$\zeta[C_1] = M[C_t]^{-1} \sum_{j \in C_t} m_j q_j, \quad t = 1, 2;$$

$u(s), \omega_b(s) \in C^2[0, +\infty)$, $u(s) \equiv 1$ при $0 \leq s \leq \delta$, $u(s) \equiv 0$ при $s \geq \beta > \delta$, $\omega_b(s) \equiv 0$ при $0 \leq s \leq b < b_1$, $\omega_b(s) \equiv 1$ при $s \geq b_1$, $\chi(q) \equiv 1$ при $q \in \Omega = \{q \mid t_{Z_2} \in [\delta, \beta], |\zeta_{Z_2}| \geq b\}$, $\chi(q) \equiv 0$ при $q \notin \Omega$.

В п. 2.3–2.7 мы оцениваем снизу правую часть неравенства (2.3). Используя полученную оценку, в п. 2.8 определяем подпространство $\widetilde{\mathcal{M}}_2(\lambda)$ так, что пространство $\mathcal{M}_2(\lambda) := \mathcal{M}_2^0 \oplus \widetilde{\mathcal{M}}_2(\lambda)$ будет обладать требуемыми свойствами.

2.3. Обозначим через $\varphi_i(q_{Z_2})$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, ортонормированные собственные функции, образующие канонический базис представления типа $\hat{\alpha}_0$ (см. п. 1.4) в собственном подпространстве $W(\alpha; Z_2)$ оператора $H_{03}(\alpha; Z_2)$, отвечающем собственному значению μ^α ; здесь $i_0 = \dim W(\alpha; Z_2)$, $q_{Z_2} = \{q_1(Z_2), \dots, q_n(Z_2)\} \in R_{03}(Z_2)$, $q_i(Z_2) = \{q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}^0(Z_2)\}$. В дальнейших оценках мы неоднократно будем использовать два следующих свойства функций $\varphi_i(q_{Z_2})$:

$$\varphi(q_{Z_2})|q_{Z_2}|^k \in \mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2)), \quad k = 1, 2, \quad (2.4)$$

и

$$(L\varphi_i, \varphi_j)_{\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2))} = 0, \quad i \neq j, \quad (2.5)$$

для любой функции $L = L(q_{Z_2}, \zeta_{Z_2})$, инвариантной относительно перестановок группы $\widehat{S}(Z_2)$ и такой, что $L\varphi_j \in \mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2))$ при любом фиксированном ζ_{Z_2} . Соотношение (2.4) доказывается аналогично лемме 3.1 работы [4]. Равенство (2.5) является следствием того факта, что функции $L\varphi_i$ и φ_j принадлежат разным строкам неприводимого представления типа $\hat{\alpha}_0$: этим свойством обладают функции φ_i, φ_j при $i \neq j$ и оно сохраняется при умножении φ_i на функцию $L(q_{Z_2}, \zeta_{Z_2})$, инвариантную относительно перестановок из $S(Z_2)$.

Далее мы будем использовать разложение функции ψ_{Z_2} по функциям $\varphi_i(q_{Z_2})$:

$$\psi_{Z_2}(q) = \sum_{i=1}^{i_0} \varphi_i(q_{Z_2}) \Phi_i(\zeta_3) + g(q), \quad (2.6)$$

где $\zeta_3 = \zeta_3(Z_2)$, $\Phi_i(\zeta_3) = (\psi_{Z_2}, \varphi_i)_{\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2))}$ и, очевидно,

$$(g(q), \varphi_i(q_{Z_2}))_{\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2))} = 0 \quad \forall \zeta_3. \quad (2.7)$$

Пусть $\chi_1(q)$, $\chi_2(q)$ и $\chi_0(q)$ – характеристические функции областей

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_1(\beta) = \{q \mid q \in R_0, t_{Z_2} \leq \beta\}, \\ \Omega_2 &= \Omega_2(b) = \{q \mid q \in R_0, |\zeta_{Z_2}| \geq b\}, \\ \Omega_0 &= \Omega_0(\beta, b) = \Omega_1 \cap \Omega_2. \end{aligned}$$

Очевидно, $\chi_0 = \chi_1 \chi_2$. В силу (2.6)

$$\psi_{Z_2}(q) = \sum_{i=1}^{i_0} \varphi_i(q_{Z_2}) \Phi_i(\zeta_3) \chi_j + g(q) \chi_j, \quad j = 0, 2. \quad (2.8)$$

Начинаем последовательно оценивать величины в правой части неравенства (2.3). Фиксируем Z_2 и всюду далее для краткости пишем ζ вместо ζ_{Z_2} . Очевидно,

$$|\zeta|^{-1}\chi_j(q) \leq B_b(\zeta_3), \quad j = 0, 2, \quad (2.9)$$

где $B_b(\zeta_3) = |\zeta_3|^{-1}$ при $|\zeta_3| \geq b$, $B_b(\zeta_3) = b^{-1}$ при $|\zeta_3| \leq b$. Поэтому и в силу (2.5), (2.8) при больших $b = b(\mathcal{E})$

$$\begin{aligned} \|\psi_{Z_2}|\zeta|^{-(\gamma+2)/2}\|^2 &\leq \mathcal{E}\|g\|^2 + \sum_{i,j=1}^{i_0} (B_b^{\gamma+2}(\zeta_3)\varphi_i\Phi_i, \varphi_j\Phi_j) \leq \\ &\leq \mathcal{E}\|g\|^2 + \sum_{i=1}^{i_0} \left\| B_b^{\frac{\gamma+2}{2}}(\zeta_3)\Phi_i(\zeta_3) \right\|^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как $q_{(Z_2)}^0 = P_0(Z_2)q = \{q_1^0(Z_2), \dots, q_n^0(Z_2)\}$, где $q_i^0(Z_2) = q_i - \zeta[C_t]$ при $i \in C_t$, то

$$|P_0(Z_2)q|_1 \leq |q_{Z_2}|_1$$

и при $q \in \text{supp } u_{Z_2}$

$$\frac{|q_{(Z_2)}|}{\delta \cdot M(Z_2) \cdot |\zeta|} \geq \frac{|P_0(Z_2)q|_1}{\delta |P_c(Z_2)q|_1} \geq 1. \quad (2.11)$$

При $b > b(a)$ в силу (2.8), (2.9), (2.11) и (2.4) ($c = 1$)

$$\begin{aligned} \|\psi_{Z_2}\chi\chi_2|\zeta|^{-1}\|^2 &\leq 2 \left\| \sum_{i=1}^{i_0} \varphi_i \cdot \Phi_i \cdot B_b\chi\chi_2 \right\|^2 + 2\|gB_b\|^2 \leq \\ &\leq c \sum_{i=1}^{i_0} \|\Phi_i(\zeta_3)B_b^{3/2}(\zeta_3)\|^2 + \mathcal{E}\|g\|^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь и далее через c мы будем обозначать константы (возможно, зависящие от $\mathcal{E}$), величина которых не играет роли для доказательства.

2.4. Переходим к оценкам главного члена в неравенстве (2.3) – квадратичной формы $(H_0^{(\alpha)}\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2})$. Очевидно,

$$(H_0\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) = \left(\left(H_{03}(Z_2) + I_{Z_2} - \frac{1}{M(Z_2)} \frac{d^2}{d\zeta_3^2} \right) \psi_{Z_2}, \psi_{Z_2} \right), \quad (2.13)$$

где $I_{Z_2} = V(q) - V_{Z_2}(q)$. В силу (2.6)

$$(H_{03}(Z_2)\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) \geq \mu^{(\alpha)}\|\psi_{Z_2}\|^2 + \delta_0\|g\|^2, \quad (2.14)$$

где $\delta_0 > 0$ – расстояние от $\mu^{(\alpha)}$ до ближайшей точки спектра оператора $H_0(\alpha; Z_2)$. Далее, очевидно,

$$-\frac{1}{M(Z_2)} \left(\frac{d^2}{d\zeta_3^2} \psi_{Z_2}, \psi_{Z_2} \right) \geq -\frac{1}{M(Z_2)} \sum_{i=1}^{i_0} \left(\frac{d^2}{d\zeta_3^2} \Phi_i, \Phi_i \right). \quad (2.15)$$

Основные трудности в оценке величины $(H_0^{(\alpha)}\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2})$ связаны с оценкой формы $(I_{Z_2}\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2})$. Используя (2.8) с $j = 0$, имеем

$$(I_{Z_2}\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) = (\chi_0 I_{Z_2}g, g) + \left(\chi_0 I_{Z_2} \sum_{i=1}^{i_0} \varphi_i \Phi_i, \sum_{t=1}^{i_0} \varphi_t \Phi_t \right) + \\ + 2 \operatorname{Re} \left(\chi_0 I_{Z_2} \sum_{i=1}^{i_0} \varphi_i \Phi_i, g \right). \quad (2.16)$$

2.5. Пусть $i \in C_1$, $j \in C_2$. Тогда

$$|q_i - q_j| = |q_i - \zeta[C_1] + \zeta[C_2] - q_j + \zeta_{Z_2}| = |q_i^0(Z_2) - q_j^0(Z_2) + \zeta|.$$

Из п. 2.2 следует, что при $q \in \Omega_1(\beta)$

$$|q_t^0(Z_2)| \leq c\beta|\zeta|, \quad (2.17)$$

и поэтому при малом β и $\forall q \in \Omega_1(\beta)$

$$|q_i - q_j| \geq \frac{|\zeta|}{2}. \quad (2.18)$$

При $q \in \Omega_0$ выполняется $|\zeta| \geq b$. Поэтому и в силу (2.17) при $b \geq 2a$ (см. п. 1.1)

$$\chi_0 V_{ij}(|q_i - q_j|) = e_i e_j |q_i - q_j|^{-\gamma} \cdot \chi_0. \quad (2.19)$$

Следовательно, при большом b и малом β

$$|(\chi_0 I_{Z_2}g, g)| \leq \mathcal{E}\|g\|^2. \quad (2.20)$$

Для оценки других членов в (2.16) величину $|q_i - q_j|^{-\gamma} = |q_i^0(Z_2) - q_j^0(Z_2) + \zeta|^{-\gamma}$ при $q \in \Omega_0(\beta, b)$, $\beta \ll 1$ разложим сначала по степеням $|\zeta|^{-1}$, а потом главный член полученного разложения – по степеням $|\zeta_3|^{-1}$. Имеем

$$\chi_0 |q_1^0(Z_2) - q_j^0(Z_2) + \zeta|^{-\gamma} = \chi_0 |\zeta|^{-\gamma} + \gamma(\zeta_3, q_{i3}^0 - q_{j3}^0) |\zeta|^{-\gamma-2} \chi_0 + F_1, \quad (2.21)$$

где с учетом (2.9), (2.11)

$$|F_1| \leq c\chi_0 (|q_i^0(Z_2)|^2 + |q_j^0(Z_2)|^2) |\zeta|^{-\gamma-2} \leq c|q(Z_2)|^2 B_b^{\gamma+2}(\zeta_3).$$

Далее, пусть $\Omega_3(\beta) = \{q \mid q \in \Omega_0, |\zeta_\perp| \leq \beta_1 |\zeta_3|\}$, $\Omega_4 = \Omega_0 - \Omega_3$ и χ_j – характеристическая функция области $\Omega_j(\beta)$, $j = 3, 4$. Тогда для любого $p > 0$

$$\chi_0 |\zeta|^{-p} = \chi_0 (\chi_3 + \chi_4) |\zeta|^{-p} = \chi_0 \chi_3 |\zeta_3|^{-p} + \chi_0 \chi_4 |\zeta|^{-p} + F_2, \quad (2.22)$$

где в силу (2.9), (2.11)

$$\chi_0 \chi_4 |\zeta|^{-p} \leq \chi_4 B_b^p(\zeta_3) \leq B_b^{p+2}(\zeta_3) b^2 |\zeta_\perp|^2 \beta_1^{-2},$$

$$|F_2| \leq \frac{p}{2} \chi_0 \chi_3 |\zeta_\perp|^2 B_b^{p+2}(\zeta_3).$$

Подставим в правую часть (2.21) полученное в (2.22) выражение для $\chi_0 |\zeta|^{-p}$ с $p = \gamma$, умножим полученное равенство на $e_i e_j$ и просуммируем по всем $i \in C_1$, $j \in C_2$. Тогда получим

$$\chi_0 I_{Z_2} = Q |\zeta_3|^{-\gamma} \chi_0 \chi_3 + |\zeta|^{-\gamma-2} \sum_{i \in C_1, j \in C_2} e_i e_j \zeta_3 (q_{i3}^0(Z_2) - q_{j3}^0(Z_2)) \chi_0 + F_3, \quad (2.23)$$

где $|F_3| \leq c B_b^{\gamma+2}(\zeta_3) |q(Z_2)|^2$.

2.6. Возвращаемся к оценке членов в (2.16). В силу (2.5) с $L = \chi_0 I_{Z_2}$ имеем

$$\left(\chi_0 I_{Z_2} \sum_{i=1}^{i_0} \varphi_i \Phi_i, \sum_{j=1}^{i_0} \varphi_j \Phi_j \right) = \sum_{j=1}^{i_0} (\chi_0 I_{Z_2} \varphi_j \Phi_j, \varphi_j \Phi_j). \quad (2.24)$$

Далее, вследствие условия A_2 (п. 1.5) и т.к. гамильтониан $H_{03}(Z_2)$ инвариантен относительно инверсии $q_{j3}^0 \leftrightarrow -q_{j3}^0$ (но не $q_j^0 \leftrightarrow -q_j^0$!), функции φ_j имеют определенную четность и функции $|\varphi_j|^2$ являются четными относительно замены $q_{j3}^0 \rightarrow -q_{j3}^0$. Поэтому

$$\int \chi_0 \zeta_3 |\zeta|^{-\gamma-2} (q_{i3}^0(Z_2) - q_{j3}^0(Z_2)) |\varphi_t(q_{Z_2})|^2 dR_{03}(Z_2) = 0.$$

Следовательно, в силу (2.23)

$$(I_{Z_2} \chi_0 \varphi_j \Phi_j, \varphi_j \Phi_j) = Q(Z_2) \int |\zeta_3|^{-\gamma} \chi_0 \chi_3 |\varphi_j \Phi_j|^2 dR_{03}(Z_2) + (F_3 \varphi_j \Phi_j, \varphi_j \Phi_j).$$

Так как исходная система была нейтральна, подсистемы C_1, C_2 из Z_2 или обе нейтральны ($Q(Z_2) = 0$), или заряжены разноименно ($Q(Z_2) < 0$). Поэтому и в силу (2.4)

$$\begin{aligned} (I_{Z_2} \chi_1 \varphi_j \Phi_j, \varphi_j \Phi_j) &\geq Q(Z_2) \int_{|\zeta_3| \geq b_0} |\Phi_j(\zeta_3)|^2 |\zeta_3|^{-\gamma} d\zeta_3 - \\ &- c \int |\Phi_j(\zeta_3)|^2 B_b^{\gamma+2}(\zeta_3) d\zeta_3, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где c — некоторая константа, $b_0 = (1 + \beta_1^2)^{-1/2} b$. Здесь и далее мы используем тот факт, что при $\chi_0 \chi_3 = 1$ выполняются неравенства $b^2 \leq \zeta_1^2 + \zeta_3^2 \leq \zeta_3^2 (1 + \beta_1^2)$, т.е. $|\zeta_3| \geq b_0$.

2.7. Оценим, наконец, перекрестные члены в (2.15). Пусть $\chi_5(\zeta_3) = 0$ при $|\zeta_3| < b_0$, $\chi_5(\zeta_3) = 1$ при $|\zeta_3| \geq b_0$. Тогда $\chi_0 \chi_3 \chi_5 = \chi_0 \chi_3$ и в силу (2.23)

$$(\chi_0 I_{Z_2} \varphi_j f_j, g) = Q(|\zeta_3|^{-\gamma} \chi_5(\zeta_3) \varphi_j \Phi_j, g) + (F_4 \varphi_j \Phi_j, g) + (F_5 \varphi_j \Phi_j, g), \quad (2.26)$$

где

$$F_4 = Q(\chi_1 \chi_3 - 1) \chi_5 |\zeta_3|^{-\gamma}, \quad |F_5| \leq c |q^0(Z_2)|^2 B_b^{\gamma+1}.$$

В силу (2.7)

$$(|\zeta_3|^{-\gamma} \chi_5(\zeta_3) \varphi_j \Phi_j, g) = 0. \quad (2.27)$$

Второе и третье слагаемые в (2.26) оцениваются по неравенству Буняковского:

$$|(F_t \varphi_j \Phi_j, g)| \leq \mathcal{E} \|g\|^2 + c \|F_t \varphi_j \Phi_j\|^2, \quad t = 4, 5. \quad (2.28)$$

В силу (2.4)

$$\|F_5 \varphi_j \Phi_j\|^2 \leq c \|B_b^{\gamma+1}(\zeta_3) \Phi_j\|^2. \quad (2.29)$$

Ясно, что $F_4 \neq 0$, только если $\chi_0 = 0$, $\chi_5 = 1$ или $\chi_3 = 0$, $\chi_5 = 1$. Если $|\zeta_3| \geq b$ (и, значит, $|\zeta| \geq b$), то равенства $\chi_0 = 0$, $\chi_5 = 1$ означают, что $\chi_1 = 0$ (см. п. 2.3), т.е. что

$$|P_0(Z_2)q|_1 \geq \beta |P_c(Z_2)q|_1 = \beta M(Z_2)|\zeta_3|,$$

а равенства $\chi_3 = 0$, $\chi_5 = 1$ эквивалентны условию

$$|\zeta_\perp| \geq \beta_1 |\zeta_3| \geq \beta_1 b.$$

Если $b_0 \leq |\zeta_3| < b$ (при $|\zeta_3| < b_0$ выполняется $F_4 \equiv 0$), то, очевидно, $b \cdot |\zeta_3|^{-1} \geq \beta_1$. В силу сказанного при $q \in \text{supp } F_4$

$$\tau := (|P_0(Z_2)q|_1 + |\zeta_\perp| + b)|\zeta_3|^{-1} \geq \beta_2 := \min\{\beta_1, 1, \beta M(Z_2)\},$$

и в силу (2.4)

$$\|F_4 \varphi_j \Phi_j\|^2 \leq \|F_4 \tau \beta_2^{-1} \varphi_j \Phi_j\|^2 \leq c \|\chi_5 |\zeta_3|^{-\gamma-1} \Phi_j\|^2. \quad (2.30)$$

Из соотношений (2.26)–(2.30) вытекает, что

$$|(\chi_0 I_{Z_2} \varphi_j \Phi_j, g)| \leq \mathcal{E} \|g\|^2 + c \|B_b^{\gamma+1}(\zeta_3) \Phi_j\|^2. \quad (2.31)$$

2.8. Используя (2.3), (2.10), (2.12)–(2.14), (2.16), (2.20) и (2.31), мы получаем, что при $\psi \perp \mathcal{M}_2^0(\lambda)$ (см. п. 2.2)

$$(H_0^\alpha \psi, \psi) \geq \mu^\alpha \|\psi\|^2 + \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \sum_{j=1}^{i_0} (h_{Z_2}^+ \Phi_j, \Phi_j), \quad (2.32)$$

где аргументы ζ_3 функций $\Phi_j(\zeta_3)$ зависят от Z_2 , но мы не указываем на эту зависимость, чтобы не усложнять обозначения⁵⁾. Неравенство (2.32) подсказывает, как определить пространство $\widetilde{\mathcal{M}}_2(\lambda)$, чтобы при $\psi \perp (\widetilde{\mathcal{M}}_2(\lambda) \oplus \mathcal{M}_2^0)$ выполнялось неравенство (2.2). А именно, положим

$$\widetilde{\mathcal{M}}_2(\lambda) = \left\{ \tilde{\psi} \left| \tilde{\psi} = P^{(\alpha)} \sum_{g \in S} \sum_{i,j} c_{ij}(g) T_g \varphi_i(q_{Z_2}) f_j(\zeta_3) u_{Z_2} \omega_b \right. \right\},$$

где $f_j(\zeta_3)$ – собственные функции оператора $h_{Z_2}^+$, отвечающие его собственным значениям, не превосходящим λ , функции $u_{Z_2} = u(t_{Z_2})$, $\omega_b = \omega_b(\zeta_{Z_2})$, $\varphi_i(q_{Z_2})$ – те же, что в п. 2.2, $c_{ij}(g)$ – произвольные числа. Пусть

$$\mathcal{M}_2(\lambda) = \mathcal{M}_2^0 + \widetilde{\mathcal{M}}_2(\lambda).$$

Тогда при $\psi \perp \mathcal{M}_2(\lambda)$ разложения (2.6) функций $\psi_{Z_2} \equiv \psi u_{Z_2} \omega_b$ при любом $Z_2 \in O(\alpha)$ не могут содержать слагаемых $\varphi_j(q_{Z_2}) \Phi_j(\zeta_3)$ с такими функциями $\Phi_j(\zeta_3)$, для которых

$$(h_{Z_2}^+ \Phi_j, \Phi_j) < \lambda \|\Phi_j\|^2.$$

⁵⁾ Если не выполнено условие A_1 , то вид функции Φ_j также зависит от Z_2 .

Поэтому и так как

$$\|\psi_{Z_2}\|^2 \geq \sum_{j=1}^{i_0} \|\Phi_j\|^2, \quad \|\psi\|^2 \geq \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \|\psi_{Z_2}\|^2,$$

мы получаем, что

$$\sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \sum_{j=1}^{i_0} (h_{Z_2}^+ \Phi_j, \Phi_j) \geq \lambda \|\psi\|^2.$$

Отсюда и из (2.32) следует неравенство (2.2).

Оценка

$$\dim \mathcal{M}_2(\lambda) \leq d_{Z_2}(\alpha; \tilde{\alpha}_0) N(\lambda; h_{Z_2}^+) + \text{const}$$

вытекает из леммы 4.2 работы [4].

2.9. Для завершения доказательства теоремы 1.2 строим пространство $\mathcal{M}_1(\lambda)$ так, чтобы при $\psi \in \mathcal{M}_1(\lambda)$ выполнялось неравенство (2.1) и чтобы

$$\dim \mathcal{M}_1(\lambda) \geq d_{Z_2}(\alpha; \tilde{\alpha}_0) N(\lambda; h_{Z_2}^-) - c. \quad (2.33)$$

Пусть

$$\mathcal{M}_1(\lambda) = \left\{ \psi \left| \psi \in P^{(\alpha)} \sum_{i,j} \sum_{g \in S} c_{ij}(g) T_g(\varphi_i(q_{Z_2}) f_j(b_0, \zeta_3(Z_2)) u(\tau_3(Z_2))) \right. \right\}, \quad (2.34)$$

где $f_j(b_0, \zeta_3(Z_2))$ – собственные функции эффективного оператора $h_{Z_2}^-$ в области $|\zeta_3(Z_2)| \geq b_0$ с нулевым граничным условием при $|\zeta_3(Z_2)| = b_0$, отвечающие всем его собственным значениям, меньшим λ ; $\varphi_i(q_{Z_2})$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, – те же, что в п. 2.3; $u(s)$ – та же, что в п. 2.2; $\tau_3(Z_2) = |P_{03}(Z_2)q^{(3)}|_1 \cdot |\zeta_3(Z_2)|^{-1}$, $q^{(3)} = (q_1^{(3)}, \dots, q_n^{(3)}) \in R_0$, $q_j^{(3)} = (0, 0, q_{j3})$, $j = 1, \dots, n$; $c_{ij}(g)$ – произвольные числа. Пространство (2.34) с точностью до обозначений совпадает с пространством $\mathcal{M}_1(\lambda)$ из [4] (формула (2.5)), и проверка свойств (2.33) и (2.1) проводится в точности так же, как в [4]. Теорема 1.2 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1.5, 1.6

3.1. Доказательство теоремы 1.5 (п. 3.2–3.8) по внешней схеме напоминает доказательство теоремы 2.1 работы [12]. Как и там, для оценки квадратичной формы рассматриваемого оператора по последовательностям g_k , описывающим уход системы из любой ограниченной области конфигурационного пространства, мы делаем сначала разбиение этого пространства в направлении оси z , а потом – в плоскости (x, y) . Однако фактическое наполнение этой схемы иное. В направлении оси z мы проводим сначала разбиение в конфигурационном пространстве кластера C_1 (независимо от состояния C_2), а потом – разбиение в конфигурационном пространстве кластера C_2 , когда кластер C_1 находится

в ограниченной области. В плоскости (x, y) разбиение стандартное, однако с его помощью впервые устанавливается, что в области, отвечающей уходу кластеров C_1, C_2 друг от друга в плоскости (x, y) (без их распадаения), норма волновых функций g_k стремится к нулю, т.е. что такой уход невозможен.

Теорема 1.6 доказывается стандартным образом, но с решающим использованием теоремы 1.5.

3.2. Пусть распадение $Z_2 = \{C_1, C_2\}$ фиксировано и $g_k(q)$ – любая последовательность из $P^{(\alpha)}C_0^2(R_{03}(Z_2))$ такая, что

$$\|g_k\| = 1, \quad \sup_k (H_{03}(Z_2)g_k, g_k) < +\infty \quad \text{и} \quad g_k(q) \rightarrow 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2)).$$

Мы докажем, что

$$\underline{\lim} (H_{03}(\alpha; Z_2)g_k, g_k) \geq \mu(\alpha; Z_2), \quad (3.1)$$

где

$$\mu(\alpha; Z_2) = \min_{Z'_s, Z'_s < Z_2, s \geq 3} \inf H_{03}(\alpha, Z_s).$$

Отсюда будет следовать, что

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{03}(\alpha; Z_2)) \subseteq [\mu(\alpha, Z_2), +\infty). \quad (3.2)$$

Доказательство противоположного включения проводится стандартным методом по образцу [13, п. 2.7, 2.8] и здесь опускается.

3.3. Введем необходимые обозначения. Пусть $Y_{sj} = \{C_{1j}, \dots, C_{sj}\}$ – произвольное разбиение кластера C_j на s не взаимодействующих между собой кластеров C_{pj} , $1 \leq p \leq s \leq n_j$, $\bigcup_p C_{pj} = C_j$, $C_{pj} \cap C_{lj} = \emptyset$, $p \neq l$. Введем в рассмотрение пространства

$$\begin{aligned} R_{03}[Y_{sj}] &= \left\{ q \mid q = (q_1 \dots q_n), \quad q_i = (0, 0, 0), \quad i \notin C_j; \quad q_i = (0, 0, q_{i3}), \quad i \in C_j, \right. \\ &\quad \left. \sum_{t \in C_{pj}} m_t q_{t3} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, s \right\}, \\ R_{c3}[Y_{sj}] &= \left\{ q \mid q = (q_1 \dots q_n), \quad q_i = (0, 0, 0), \quad i \notin C_j; \quad q_i = (0, 0, q_{i3}), \quad i \in C_j, \right. \\ &\quad \left. (q, q')_1 = 0 \quad \forall q' \in R_{03}[Y_{sj}] \right\} \end{aligned}$$

и проекторы (в смысле $(\cdot, \cdot)_1$) $P_{\kappa 3}[Y_{sj}]$ в пространстве $R_{03}(Z_2)$ на $R_{\kappa 3}[Y_{sj}]$, $\kappa = 0, c$. Положим

$$\tau(Y_{1j}) = \sum_{p \in C_j} m_p q_{p3}^2, \quad \tau(Y_{sj}) = |P_{03}(Y_{sj})q|_1 \cdot |P_{c3}(Y_{sj})q|_1^{-1}.$$

Выберем, далее, числа $b_1 > a_1 \gg 1$ и $a_j < b_j \ll 1$, $2 \leq j \leq n_i = |C_i|$, так же, как в п. 2.4 работы [13], но не для всей системы, а для ее подсистемы C_i и определим вещественные дважды непрерывно дифференцируемые функции $u_{sj}(\tau)$, $v_{sj}(\tau)$ так, что $0 \leq u_{sj}(\tau)$, $v_{sj}(\tau) \leq 1$, $u_{sj}^2(\tau) + v_{sj}^2(\tau) = 1$, $u_{sj}(\tau) = 1$ при $0 \leq \tau \leq a_j$, $u_{sj}(\tau) = 0$ при $\tau \geq b_j$. Пусть

$$u_{Y_{sj}} = u_{sj}(\tau(Y_{sj})), \quad v_{Y_{sj}} = v_{sj}(\tau(Y_{sj})).$$

3.4. Проведем оценку квадратичной формы $(H_{03}(\alpha; Z_2)g_k, g_k)$ (см. п. 3.2), разбивая пространство относительного движения кластера C_1 в направлении 3-й оси с помощью введенных функций $u_{Y_{s1}}, v_{Y_{s1}}$. Пусть

$$\begin{aligned}\psi(q) &= g_k(q), \quad \hat{\psi}_0 = \psi, \quad \hat{\psi}_j = \hat{\psi}_{j-1} \cdot \left(1 - \sum_{Y_{j,1}} u_{Y_{j,1}}^2\right)^{1/2}, \\ \psi_{j-1, Y_{j1}} &= \hat{\psi}_{j-1} u_{Y_{j1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n_1; \\ \psi_j &= \sum_{Y_{j1}} \psi_{j-1, Y_{j1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \quad Z_{s1} = \{Y_{s1}, C_2\}, \quad Z_{s2} = \{C_1, Y_{s2}\}.\end{aligned}$$

Аналогично соотношениям (2.5), (2.6) из [13] мы получаем, что для произвольного $\mathcal{E} > 0$ и $a_1 = a_1(\mathcal{E})$, $b_1 = b_1(\mathcal{E})$

$$(H_{03}(Z_2)g_k, g_k) \geq \sum_{j=0}^{n_1-1} \sum_{Z_{j+1,1}} (H_{03}(Z_{j+1,1})\psi_{j, Y_{j+1,1}}, \psi_{j, Y_{j+1,1}}) - 2\mathcal{E} \quad (3.3)$$

и

$$(H_{03}(Z_{j+1,1})\psi_{j, Y_{j+1,1}}, \psi_{j, Y_{j+1,1}}) \geq \mu(\alpha; Z_2) \|\psi_{j, Y_{j+1,1}}\|^2, \quad j \geq 1, \quad (3.4)$$

ибо при $j \geq 1$ разбиение $Z_{j+1,1}$ есть разбиение двухкластерной системы $Z_2 = (C_1, C_2)$ не менее чем на 3 кластера за счет дробления кластера C_1 .

3.5. Для оценки в (3.3) члена с $j = 0$ мы проводим далее разбиение пространства относительно движения кластера C_2 в направлении оси z (в ситуации, когда для частиц не разбиваемого кластера C_1 выполняется $\sum_{t \in C_1} q_{t3}^2 m_t \leq b_1^2$). Для этой цели мы используем функции $u_{Y_{j,2}}$. Положим

$$\begin{aligned}\omega(q) &= \psi_{0, Y_{11}}, \quad \hat{\omega}_0 = \omega, \quad \hat{\omega}_j = \hat{\omega}_{j-1} \left(1 - \sum_{Y_{j,2}} u_{Y_{j,2}}^2\right)^{1/2}, \\ \omega_{j-1, Y_{j2}} &= \hat{\omega}_{j-1} u_{Y_{j,2}}, \quad j = 1, 2, \dots, n_2; \\ \omega_j &= \sum_{Y_{j2}} \omega_{j-1, Y_{j2}}, \quad j = 1, 2, \dots, n_2 - 1,\end{aligned}$$

и аналогично (3.3), (3.4) получаем

$$\begin{aligned}(H_{03}(Z_2)\psi_{0, Y_{11}}, \psi_{0, Y_{11}}) &\geq \sum_{i=0}^{n_2-1} \sum_{Z_{i+1,2}} (H_{03}(Z_{i+1,2})\omega_{i, Y_{i+1,2}}, \omega_{i, Y_{i+1,2}}) - \\ &\quad - 2\mathcal{E} \|\psi_{0, Y_{11}}\|^2, \quad (3.5)\end{aligned}$$

$$(H_{03}(Z_{i+1,2})\omega_{i, Y_{i+1,2}}, \omega_{i, Y_{i+1,2}}) \geq \mu(\alpha, Z_2) \|\omega_{i, Y_{i+1,2}}\|^2, \quad i \geq 1. \quad (3.6)$$

3.6. Нам остается оценить величину $(H_{03}(Z_2)\omega_{0,Y_{12}}, \omega_{0,Y_{12}})$. Для этого разобьем носитель функции $\omega_{0,Y_{12}}$ на области, отвечающие всевозможным распадам $Z'_s = \{C'_1, \dots, C'_s\}$ системы Z_1 в плоскости (x, y) . С этой целью введем сначала пространства

$$R_{0\perp}(Z'_s) = \left\{ q \mid q = (q_1, \dots, q_n), \quad q_i = (q_{i\perp}, 0), \quad q_{i\perp} = (q_{i1}, q_{i2}), \right. \\ \left. \sum_{i \in C_p} m_i q_{i\perp} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, s \right\},$$

$$R_{c\perp}(Z'_s) = \{ q \mid q = (q_1, \dots, q_n), \quad q_i = (q_{i\perp}, 0), \quad (q, q')_1 = 0 \quad \forall q' \in R_{0\perp}(Z'_s) \}$$

и обозначим через $P_{\kappa\perp}(Z'_s)$ проектор в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_1$ на подпространство $R_{\kappa\perp}(Z'_s) = 0, c, s \geq 2$. Пусть, далее, $q_\perp = (q_{1\perp}, \dots, q_{n\perp})$,

$$\beta_1 = |q_\perp|_1, \quad \beta(Z'_s) = |P_{0\perp}(Z'_s)q_\perp|_1 \cdot |P_{c\perp}(Z'_s)q_\perp|_1^{-1}, \quad s \geq 2.$$

Определим числа $\tilde{a}_s, \tilde{b}_s$ и функции $\tilde{u}_s(\beta), \tilde{v}_s(\beta)$ аналогично п. 2.4 работы [13] и положим

$$\tilde{u}_{Z'_s} = \tilde{u}_s(\beta(Z'_s)), \quad \tilde{v}_{Z'_s} = \tilde{v}_s(\beta(Z'_s)), \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad f = \omega_{0,Y_{12}}, \quad \hat{f}_0 = f, \\ \hat{f}_i = f_{i-1} \left(1 - \sum_{Z'_i} \tilde{u}_{Z'_i}^2 \right)^{1/2}, \quad f_{i-1,Z'_i} = \hat{f}_{i-1} \tilde{u}_{Z'_i}, \quad i = 1, \dots, n, \\ f_i = \sum_{Z'_i} f_{i-1,Z'_i}.$$

Аналогично предыдущему получаем

$$(H_{03}(Z_2)f, f) \geq \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{Z'_{j+1}} (H_{03}(Z_2 \cap Z'_{j+1})f_{j,Z'_{j+1}}, f_{j,Z'_{j+1}}) - 2\mathcal{E}\|f\|^2, \quad (3.7)$$

где через $Z_2 \cap Z'_{j+1}$ обозначено разбиение $\tilde{Z}_p = \{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_p\}$, состоящее из тех кластеров $C_i \cap C'_k$, $C_i \in Z_2$, $C'_k \in Z'_s$, которые не пусты. Очевидно, при $Z'_s \neq Z_1, Z_2$ мы получаем $\tilde{Z}_p < Z_2$, $p \geq 3$, и, значит,

$$(H_{03}(Z_2 \cap Z'_{j+1})\varphi_{j,Z'_{j+1}}, \varphi_{j,Z'_{j+1}}) \geq \mu(\alpha, Z_2) \|\varphi_{j,Z'_{j+1}}\|^2 \quad \text{при} \quad Z'_{j+1} \neq Z_1, Z_2. \quad (3.8)$$

При $Z'_{j+1} = Z_1, Z_2$, очевидно, $Z_2 \cap Z'_{j+1} = Z_2$. Поэтому в (3.7) нам остается оценить только слагаемые $(H_{03}(Z_2)f_{0,Z_1}, f_{0,Z_1})$ и $(H_{03}(Z_2)f_{1,Z_2}, f_{1,Z_2})$.

3.7. По построению

$$f_{0,Z_1}(q) = f_{0,Z_1}(k, q) = g_k(q)u_{11}(\tau(Y_{11}))u_{12}(\tau(Y_{12}))\tilde{u}_1(\beta_1),$$

и, следовательно, при $q \in \text{supp } f_{0,Z_1}(k, q)$ для всех k выполняется неравенство

$$|q|_1^2 \leq 2b_1^2(1) + \tilde{b}_1^2(1).$$

Спектр оператора $H_{03}(\alpha, Z_2)$ в ограниченной области пространства $R_{03}(Z_2)$ с нулевым граничным условием чисто дискретный с единственной предельной точкой $+\infty$. Поэтому и так как $g_k(q)$ сходится слабо к нулю в $\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2))$, имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (H_{03}(Z_2)f_{0,Z_1}(k, q), f_{0,Z_1}(k, q)) \geq \mu(\alpha; Z_2) \lim \|f_{0,Z_1}(k, q)\|. \quad (3.9)$$

3.8. Оценим, наконец, величину $(H_{03}(Z_2)f_{1,Z_2}, f_{1,Z_2})$. Предварительно отметим, что по построению при $q \in \text{supp } f_{1,Z_2}$

$$|P_{0\perp}(Z_2)q_\perp|_1 \leq \tilde{b}_2 |P_{c\perp}(Z_2)q_\perp|_1, \quad |q_\perp|_1 \geq \tilde{a}_1,$$

и так как

$$|q_\perp|_1^2 = |P_{0\perp}(Z_2)q_\perp|_1^2 + |P_{c\perp}(Z_2)q_\perp|_1^2,$$

то при $q \in \text{supp } f_{1,Z_2}$

$$|P_{c\perp}(Z_2)q_\perp|_1 \geq \tilde{a}_1(1 + \tilde{b}_2^2)^{-1/2}. \quad (3.10)$$

Кроме того, в силу леммы 2.3 из [11, с. 125]

$$|P_{c\perp}(Z_2)q_\perp|_1^2 = \frac{M[C_1] \cdot M[C_2]}{M} |\zeta_\perp|^2, \quad (3.11)$$

$$|P_{0\perp}(Z_2)q_\perp|_1^2 \geq |q_{i\perp} - \zeta_\perp[C_j]|^2 m_i \quad \text{при} \quad i \in C_j, \quad (3.12)$$

где

$$\zeta_\perp = \zeta_\perp[C_1] - \zeta_\perp[C_2], \quad \zeta_\perp[C_j] = \sum_{t \in C_j} m_t q_{t\perp} \cdot M[C_j]^{-1}.$$

После этих простых замечаний оценим снизу в выражении оператора $H_{03}(Z_2)$ член

$$F = (\nu_1 + \mathcal{E}_2)^2 + (\nu_2 - \mathcal{E}_1)^2,$$

где

$$\mathcal{E}_j = 2B \sum_{t=1}^n q_{tj} e_t.$$

Так как

$$Q = \sum_{j=1}^n e_j = 0,$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j = 2B \sum_{s \in C_1} (q_{sj} - \zeta_j[C_1])e_s + 2B \sum_{s \in C_2} (q_{sj} - \zeta_j[C_2])e_s + \\ + 2B \sum_{s \in C_2} (\zeta_j[C_2] - \zeta_j[C_1])e_s = G_j(q) - 2BQ[C_2]\zeta_j(Z_2), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где в силу (3.9)–(3.12)

$$|G_j(q)| \leq \tilde{b}_2 c |\zeta_\perp(Z_2)| \quad (3.14)$$

и c не зависит от $\tilde{b}_2$ и q .

В силу (3.13)

$$\begin{aligned} F = \nu_1^2 + \nu_2^2 + 2\nu_1(G_2(q) - 2BQ[C_2]\zeta_2(Z_2)) - \\ - 2\nu_2(G_1(q) + 2BQ[C_1]\zeta_1(Z_2)) + G_2^2(q) - 4BG_2(q)Q[C_2]\zeta_2(Z_2) + \\ + 4BG_1(q)Q[C_1]\zeta_1(Z_2) + 4B^2(Q[C_2]^2\zeta_2^2(Z_2) + Q[C_1]^2\zeta_1^2(Z_2)). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Так как число $\tilde{b}_2$ может быть выбрано с самого начала достаточно малым, а число $\tilde{a}_1$ — достаточно большим, то в силу (3.14), (3.15)

$$F \geq 4B^2Q[C_1]^2|\zeta_\perp|^2 - \tilde{b}_2 c |\zeta_\perp|^2 - c |\zeta_\perp| \geq d_0 |\zeta_\perp|^2 \geq d_1 \tilde{a}_1^2, \quad (3.16)$$

где константы d_0, d_1 не зависят от $\tilde{a}_1$. Следовательно, при достаточно большом $\tilde{a}_1$

$$(H_{03}(Z_2)f_{1,Z_2}, f_{1,Z_2}) \geq \mu(\alpha, Z_2) \|f_{1,Z_2}\|^2. \quad (3.17)$$

Собирая вместе оценки (3.3)–(3.8), (3.17), получаем, что

$$\underline{\lim} (H_{03}(Z_2)g_k, g_k) \geq \mu(\alpha, Z_2) - \mathcal{E}.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы 1.5.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из оценки (3.16) вытекает, что в области $\Omega_1 = \text{supp } f_{1,Z_2}$, отвечающей распадению исходной системы на нераспадающиеся кластеры C_1, C_2 ,

$$\underline{\lim} \|g_k\|_{\Omega_1} = O(\tilde{a}_1^{-1}),$$

где $|\tilde{a}_1| \leq \text{const} |\zeta_\perp[C_2] - \zeta_\perp[C_1]|$ и $\tilde{a}_1$ может быть выбрано сколь угодно большим. Таким образом, нами одновременно показано, что последовательность Вейля $g_k(q)$ для оператора $H_{03}(\alpha; Z_2)$ не может отвечать распадению Z_2 на нераспадающиеся кластеры C_1, C_2 .

3.9. Доказательство теоремы 1.6. Пусть (см. п. 1.4)

$$\hat{q}_{33} = q_{33}(Z_2(2)) = q_{33} - \sum_{j=1, j \neq 2}^n m_j q_{j3} \cdot (M - m_2)^{-1},$$

$f(\hat{q}_{33})$ – гладкая нормированная функция, равная нулю при $|\hat{q}_{33}| \leq 1$; $\hat{q} = q(Z_3(2, 3))$ – произвольный вектор из $R_{03}(Z_3(2, 3))$; $\varphi(\hat{q})$ – нормированная собственная функция оператора $H_{03}(\alpha; Z_3(2, 3))$, отвечающая его собственному значению $\mu(\alpha; Z_3(2, 3))$ и обладающая перестановочной симметрией типа $\alpha'' = \alpha''(Z_2(2, 3))$, $\alpha'' \prec \alpha$; $\alpha' = \alpha'(Z_2(2))$ – такой тип перестановочной симметрии системы $Z_2(2)$, что $\alpha'' \prec \alpha' \prec \alpha$. Положим

$$f_k = f(k\hat{q}_{33})k^{1/2}, \quad \psi_k = \varphi f_k, \quad \psi_k^{(\alpha')} = P^{(\alpha')}(Z_2(2))\psi_k.$$

Подставляя функцию $\psi_k^{(\alpha')}$ в квадратичную форму оператора $H_{03}(\alpha; Z_3(2, 3))$ и используя известное выражение для оператора $P^{(\alpha')}$, мы после замены переменных $\tau = k\hat{q}_{33}$ и громоздких выкладок, похожих на проведенные в работе [14, § 7], получаем, что

$$\begin{aligned} (H_{03}(\alpha, Z_2(2))\psi_k^{(\alpha')}, \psi_k^{(\alpha')}) &= (H_{03}(\alpha, Z_2(2))\psi_k, P^{(\alpha')}\psi_k) = \\ &= \mu(\alpha; Z_2(2))\|\psi_k^{(\alpha')}\|^2 + k(p(k) + O(k)), \end{aligned}$$

где при $k \rightarrow 0$ $\lim p(k) < 0$, $\lim \|\psi_k^{(\alpha')}\|^2 > 0$. Поэтому для малых k

$$\inf (H_{03}(\alpha; Z_2(2))\psi_k^{(\alpha')}, \psi_k^{(\alpha')}) < \mu(\alpha; Z_2(2))\|\psi_k^{(\alpha')}\|^2,$$

т.е.

$$\mu^{(\alpha)} := \inf H_{03}(\alpha; Z_2(2)) \in \sigma_d(H_{03}(\alpha; Z_2(2))),$$

что и требовалось доказать.

Благодарности. Работа поддержана грантами РФФИ № 96-01-00478 и INTAS № 95-0414.

Список литературы

- [1] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин. ТМФ. 1997. Т. 113. № 3. С. 413–431.
- [2] С. А. Вугальтер. Частное сообщение.
- [3] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин. Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 6. С. 119–155.
- [4] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин. Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 2. С. 108–125.
- [5] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин. Тр. Моск. матем. об-ва. 1992. Т. 54. С. 186–212.
- [6] В. Я. Иврий. ДАН СССР. 1984. Т. 276. № 2. С. 268–270.
- [7] W. Kirsch, B. Simon. Ann. Phys. 1988. V. 183. № 1. P. 122–130.
- [8] Ф. Русс, Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. М.: ИЛ, 1954.
- [9] Г. М. Жислин. Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 1. С. 127–136.
- [10] J. E. Avron, J. W. Herbst, B. Simon. Ann. Phys. 1978. V. 114. P. 431.
- [11] М. А. Антонец, Г. М. Жислин, И. А. Шерешевский. О дискретном спектре многочастичных гамильтонианов. Приложение к кн. К. Йоргенс, И. Вайдманн. Спектральные свойства гамильтоновых операторов. М.: Мир, 1976.
- [12] Г. М. Жислин. ТМФ. 1996. Т. 107. № 3. С. 372–387.
- [13] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин. ТМФ. 1993. Т. 97. № 1. С. 94–112.
- [14] Г. М. Жислин. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. С. 560–649.

Поступила в редакцию 20.V.1998 г.