Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Миссаров, Непрерывный предел в фермионной иерархической модели,
ТМФ, 1999, том 118, номер 1, 40–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf684>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:59:51

© 1999 г.

М. Д. Миссаров*

НЕПРЕРЫВНЫЙ ПРЕДЕЛ В ФЕРМИОННОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Обсуждается проблема строгого построения непрерывного предела в фермионной иерархической модели. Непрерывный предел строится как предел полей на измельчающихся иерархических решетках и является полем на p -адическом континууме. Исследуется вопрос о восстановлении констант связи непрерывной модели по константам связи ее дискретизации.

Как уже отмечалось ранее [1–2], p -адические модели теории поля являются естественным непрерывным обобщением иерархических моделей Дайсона [3–6]. p -Адические модели возникают в связи с широким спектром проблем математической физики [7, 8].

В этой статье мы исследуем проблему построения непрерывного предела в рамках так называемой иерархической фермионной модели (см. [9–11]). Соответствующая проблема в рамках обычных решетчатых моделей квантовой теории поля является основной (и трудной) задачей конструктивной теории поля [12, 13]. Как известно, в этих моделях гауссовская часть фиксирована (например, задается решетчатым аналогом оператора Лапласа). Существование непрерывного предела означает, что имеются пределы корреляционных функций, когда шаг решетки стремится к нулю. При этом константы связи промежуточных решетчатых моделей зависят от шага решетки и стремятся к бесконечности, если обрезание снимается.

Особенностью нашей модели является то, что гауссовская часть задается действием

$$H_0(\psi^*; \alpha) = c(\alpha) \int |x - y|^{-\alpha d} (\bar{\psi}_1(x) \psi_1(y) + \bar{\psi}_2(x) \psi_2(y)) dx dy, \quad (1)$$

где x и y — d -мерные p -адические аргументы, dx — соответствующая мера Хаара, $\bar{\psi}^*(x) = (\bar{\psi}_1(x), \psi_1(x), \bar{\psi}_2(x), \psi_2(x))$ — 4-компонентное грассманово-значное поле (компоненты являются образующими алгебры Грассмана), $|\cdot|$ — p -адическая норма, $c(\alpha)$ — некоторая нормирующая константа, α — вещественный параметр. Этот гамильтониан задает так называемое автомодельное (скейлинг-инвариантное) фермионное поле с параметром автомодельности α .

*Казанский государственный университет, Казань, Россия. E-mail: Moukadass.Missarov@ksu.ru

Значение $\alpha = 1 + 2/d$ задает p -адический аналог гамильтониана, который в вещественном случае задается оператором Лапласа. Заметим только, что в отличие от вещественного случая при $\alpha = 1 + 2/d$ p -адический вариант описывает модель с дальним действием.

Негауссовская часть задается гамильтонианом

$$H_1 = r \int (\bar{\psi}_1(x)\psi_1(x) + \bar{\psi}_2(x)\psi_2(x)) dx + g \int \bar{\psi}_1(x)\psi_1(x)\bar{\psi}_2(x)\psi_2(x) dx.$$

Нашу модель можно считать фермионным аналогом иерархической φ^4 -модели, своей негауссовской частью она имитирует модель Гросса–Невё [14, 15]. Отметим также, что некоторый вырожденный вариант фермионной иерархической модели рассматривался в работе [16].

Мы изучаем дискретный (иерархический) вариант гамильтониана $H_0 + H_1$. Гауссовская часть иерархической модели инвариантна относительно преобразования блок-спинной ренормализационной группы (РГ) Каданова–Вильсона с параметром α . Действие РГ в пространстве констант связи вычисляется явно [9], и обратное отображение также существует. Это обстоятельство является основным упрощающим моментом в проблеме построения непрерывного предела в нашей модели.

В частности, показано, что для рассмотренных в [10] значений α, r, g , для которых существует термодинамический предел в иерархической модели, существует предел корреляционных функций, когда шаг иерархической решетки стремится к нулю. Область существования термодинамического предела в плоскости (r, g) , как следует из результатов [10] и компьютерных экспериментов, составляет множество полной меры в R^2 , если $\alpha > 1$.

Новым является то, что при $\alpha > 2$ существует предел констант связи решетчатых теорий поля, когда шаг решетки стремится к нулю. Этот предел и задает непрерывную теорию поля, дискретизация которой приводит к исходной иерархической модели.

Пусть T – отображение, которое сопоставляет константам связи r и g исходной иерархической модели константы связи предельной непрерывной теории. Тогда при $\alpha > 2$ отображение T удовлетворяет коммутационному соотношению

$$TR = ST,$$

где R – преобразование иерархической РГ в плоскости (r, g) , S – диагональная матрица, заданная собственными числами дифференциала отображения R в нуле. Отсюда видно, что отображение T обратное к нормализующему преобразованию P , которое определяется функциональным уравнением

$$RP = PS. \quad (2)$$

Отображение P можно трактовать как оператор дискретизации, который сопоставляет константам связи непрерывного поля константы связи дискретизованного поля (подробнее см. [17]).

Итак, $T = P^{-1}$. Однако, как известно из общей теории нормальных форм [18], отображение P (и P^{-1}) может быть определено не только для $\alpha > 2$, но и для нерезонансных значений $\alpha < 2$ (более точное утверждение см. ниже) и задается сходящимся рядом по степеням r и g в некоторой окрестности нуля. Таким образом, отображение T может быть доопределено и в области $1 < \alpha < 2$, за исключением некоторой дискретной серии значений α , и задает константы связи непрерывной теории, отвечающей исходной иерархической модели. Однако эти константы связи не могут быть определены прямым предельным процессом, тем более не могут быть определены при резонансных значениях α .

Возможно, аналогичная картина справедлива и для бозонных моделей в вещественном случае, если задавать ядро гауссовской части степенью оператора Лапласа. Сам же оператор Лапласа отвечает резонансному значению.

Отметим, что серия резонансных значений α для функционального уравнения (2) совпадает с серией ультрафиолетовых полюсов p -адических фейнмановских амплитуд непрерывного варианта модели.

Напомним некоторые определения [9]. Пусть Q_p – поле p -адических чисел, $|\cdot|_p$ – p -адическая норма на Q_p . Обозначим через $\{x\}$ дробную часть p -адического числа $x = c_{-n}p^{-n} + \dots + c_{-1}p^{-1} + c_0 + c_1p + \dots$:

$$\{x\} = c_{-n}p^{-n} + \dots + c_{-1}p^{-1}.$$

Для $x = (x_1, \dots, x_d) \in Q_p^d$ положим

$$|x|_p = \max_i |x_i|_p, \quad \{x\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_d\}).$$

Тогда дискретное множество

$$T_p^d = \{x \in Q_p^d : x = \{x\}\}$$

можно рассматривать как иерархическую решетку с размером элементарной ячейки $n = p^d$, где иерархическое расстояние $d(i, j) = |i - j|_p$, $i, j \in T_p^d$.

Рассмотрим 4-компонентное фермионное поле $\psi^*(x) = (\bar{\psi}_1(x), \psi_1(x), \bar{\psi}_2(x), \psi_2(x))$, $x \in Q_p^d$. Группа скейлинговых преобразований определяется как

$$(S_\lambda(\alpha)\psi^*)(x) = |\lambda|^{(1-\frac{\alpha}{2})d}\psi^*(\lambda x),$$

где $\lambda \in Q_p$, α – вещественный параметр. Тогда гауссовское состояние, инвариантное относительно скейлинговой группы, задается гамильтонианом (1), в котором мы выбираем нормирующую константу

$$c(\alpha) = \frac{f_n(\alpha)}{f_n(1-\alpha)}, \quad f_n(\alpha) = (1 - n^{-\alpha})^{-1}, \quad n = p^d.$$

Определим дискретизацию поля ψ^* на решетку T_p^d как поле ξ^* :

$$\xi^*(j) = \int \psi^*(j+x) \chi(x) dx, \quad j \in T_p^d,$$

где $\chi(x)$ – характеристическая функция шара $Z_p^d = \{x: |x|_p \leq 1\}$. Тогда дискретизация преобразования $S_\lambda(\alpha)$, $\lambda = p^{-1} \in Q_p$, есть обычное иерархическое блок-спиновое РГ-преобразование:

$$(r(\alpha)\xi^*)(j) = n^{-\alpha/2} \sum_{i \in B(j)} \xi^*(i), \quad B(j) = \{i \in T_p^d: |pi - j| \leq 1\}.$$

Дискретизация гауссовского поля с гамильтонианом (1) будет задаваться гамильтонианом

$$H'_0(\xi^*; \alpha) = \sum_{i,j} h(i,j; \alpha) (\bar{\xi}_1(i) \xi_1(j) + \bar{\xi}_2(i) \xi_2(j)),$$

где

$$h(i,j; \alpha) = \frac{f_n(\alpha)}{f_n(1-\alpha)} (1 - \delta_{ij}) |i - j|^{-\alpha d} + \frac{f_n(\alpha)}{f_n(1)} \delta_{ij}.$$

Рассмотрим теперь, как предлагалось выше, формальное фермионное поле с гамильтонианом

$$H(\psi^*; \alpha; r, g) = H_0(\psi^*; \alpha) + \int L(\psi^*(x); r, g) dx, \quad (3)$$

где

$$L(\psi^*(x); r, g) = r(\bar{\psi}_1(x) \psi_1(x) + \bar{\psi}_2(x) \psi_2(x)) + g \bar{\psi}_1(x) \psi_1(x) \bar{\psi}_2(x) \psi_2(x).$$

Заметим сразу, что скейлинговое преобразование $S_\lambda(\alpha)$, $\lambda = p^{-1} \in Q_p$, действует в пространстве гамильтонианов (3) линейно: $H(\psi^*; \alpha; r, g) \rightarrow H(\psi^*; \alpha; n^{\alpha-1}r, n^{2\alpha-3}g)$. Обозначим линейное преобразование в плоскости констант связи $(r, g) \rightarrow (n^{\alpha-1}r, n^{2\alpha-3}g)$ через $S(\alpha)$.

Дискретизация поля $\psi^*(x)$ с гамильтонианом (3) будет задаваться гамильтонианом

$$H'(\xi^*; \alpha; r, g) = H'_0(\xi; \alpha) - \sum_j \ln \left\langle \exp \left\{ - \int L(\xi^*(j) + \eta^*(x); r, g) dx \right\} \right\rangle_{\mu(d\eta^*)},$$

где усреднение берется по гауссовскому полю $\eta^*(x)$ с носителем в шаре Z_p^d с нулевым средним и бинарной корреляционной функцией

$$\begin{aligned} \langle \bar{\eta}_k(x) \eta_l(y) \rangle &= \delta_{kl} \left(\frac{f_n(2-\alpha)}{f_n(\alpha-1)} |x-y|^{(\alpha-2)d} - \frac{f_n(2-\alpha)}{f_n(1)} \right), \\ \langle \bar{\eta}_k(x) \bar{\eta}_l(y) \rangle &= \langle \eta_k(x) \eta_l(y) \rangle = 0, \quad x, y \in Z_p^d, \quad k, l = 1, 2. \end{aligned}$$

В [17] показано, что функциональный интеграл

$$\ln \left\langle \exp \left\{ - \int L(\xi^*(i) + \eta^*(x); r, g) dx \right\} \right\rangle_{\mu(d\eta^*)}$$

может быть представлен в виде $L(\xi^*(i); u(r, g), v(r, g))$, где отображение $(r, g) \rightarrow (u(r, g), v(r, g))$ (обозначим его через $P(\alpha)$) является нормализующим преобразованием к отображению РГ $R(\alpha)$ в нуле:

$$R(\alpha)P(\alpha) = P(\alpha)S(\alpha). \quad (4)$$

Напомним, что действие РГ-преобразования в пространстве констант связи (r, g) вычисляется явно [9]:

$$\begin{aligned} R(\alpha)(r, g) &= (r', g'), \\ r' &= n^{\alpha-1} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - \frac{g}{n}} (r+1) - 1 \right), \\ g' &= n^{2\alpha-3} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - \frac{g}{n}} \right)^2 g. \end{aligned}$$

Заметим, что отображение $S(\alpha)$ задается диагональной матрицей, собственные числа которой являются собственными числами дифференциала РГ-преобразования $R(\alpha)$ в нуле.

В случае, если $\alpha > 3/2$, собственные числа $\lambda_1(\alpha) = n^{\alpha-1} > 1$ и $\lambda_2(\alpha) = n^{2\alpha-3} > 1$, мы попадаем в область действия классической теоремы Пуанкаре [18]. По этой теореме для отображения $P(\alpha)$ существует разложение в сходящийся при достаточно малых r, g ряд по степеням r, g при условии, что α не является резонансным значением. Напомним, что α называется нерезонансным значением, если

$$\lambda_1(\alpha) \neq \lambda_1^{m_1}(\alpha) \lambda_2^{m_2}(\alpha), \quad \lambda_2(\alpha) \neq \lambda_1^{m_1}(\alpha) \lambda_2^{m_2}(\alpha),$$

где m_1 и m_2 – неотрицательные целые такие, что $m_1 + m_2 \geq 2$. Если $1 \leq \alpha \leq 3/2$ и $\lambda_1(\alpha) > 1$, $\lambda_2(\alpha) < 1$, мы попадаем в так называемую область Зигеля. В этом случае для сходимости отображения $P(\alpha)$ необходимо, помимо условия нерезонансности, чтобы α плохо приближалось рациональными числами [18].

Для $P(\alpha)$ выполнено условие нормировки. Если мы обозначим

$$P(\alpha) \begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(r, g) \\ v(r, g) \end{pmatrix},$$

то сходящиеся в окрестности нуля ряды $u(r, g)$ и $v(r, g)$ удовлетворяют условию

$$\left. \frac{\partial u(r, g)}{\partial r} \right|_{r=0, g=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial v(r, g)}{\partial g} \right|_{r=0, g=0} = 1.$$

Обратимся теперь к проблеме построения непрерывного предела. Пусть ξ^* – поле на решетке T_p^d , заданное гамильтонианом

$$H'(\xi^*; \alpha; r, g) = H'_0(\xi; \alpha) + \sum_{j \in T_p^d} L(\xi^*(j); r, g),$$

и пусть (r, g) принадлежит к тем областям плоскости, для которых доказано существование термодинамического предела в данной иерархической модели в работе [10].

Обозначим через ξ_m^* поле на решетке T_p^d с гамильтонианом

$$H'(\xi_m^*; \alpha; r^{(-m)}, g^{(-m)}), \quad \begin{pmatrix} r^{(-m)} \\ g^{(-m)} \end{pmatrix} = R^{-m} \begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим последовательность все более мелких иерархических решеток $T_{p,m}^d = p^m T_p^d$, $m = 0, 1, \dots$. Определим последовательность полей ζ_m^* , заданных на решетках $T_{p,m}^d$, соотношениями

$$\zeta_m^*(j) = p^{dm(1-\frac{\alpha}{2})} \xi_m^*(p^{-m}j), \quad j \in T_{p,m}^d. \quad (5)$$

Таким образом, гамильтониан поля $\zeta_m^*(j)$ имеет вид

$$\begin{aligned} H'_m(\zeta_m^*) &= \sum_{i,j \in T_p^d} h(i, j; \alpha) \left[p^{-2dm(1-\alpha/2)} (\bar{\zeta}_{m,1}(p^m i) \zeta_{m,1}(p^m j) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\zeta}_{m,2}(p^m i) \zeta_{m,2}(p^m j)) \right] + \sum_{i \in T_p^d} L(p^{-dm(1-\alpha/2)} \zeta_m^*(p^m i); r, g) = \\ &= H'_{m,0}(\zeta_m^*; \alpha) + \sum_{i \in T_{p,m}^d} p^{-md} L(\zeta_m^*(i); \lambda_1^m r^{(-m)}, \lambda_2^m g^{(-m)}), \end{aligned} \quad (6)$$

где гауссовская часть

$$\begin{aligned} H'_{m,0}(\zeta_m^*; \alpha) &= \sum_{\substack{i,j \in T_{p,m}^d, \\ i \neq j}} |i-j|^{-\alpha d} p^{-2md} (\bar{\zeta}_{m,1}(i) \zeta_{m,1}(j) + \bar{\zeta}_{m,2}(i) \zeta_{m,2}(j)) + \\ &\quad + \sum_{i \in T_{p,m}^d} p^{md(\alpha-2)} \frac{f_n(\alpha)}{f_n(1)} (\bar{\zeta}_{m,1}(i) \zeta_{m,1}(i) + \bar{\zeta}_{m,2}(i) \zeta_{m,2}(i)). \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим гамильтониан, задаваемый правой частью формулы (6), через $H'_m(\zeta_m^*; \alpha; \lambda_1^m r^{(-m)}, \lambda_2^m g^{(-m)})$. Заметим, что гауссовская часть $H'_{m,0}(\zeta_m^*; \alpha)$ является гамильтонианом дискретизации непрерывного гауссовского поля на решетку $T_{p,m}^d$ и весь гамильтониан H'_m записан в виде дискретной аппроксимации на решетке $T_{p,m}^d$ гамильтониана непрерывного поля.

Так как поля ξ_m^* связаны между собой преобразованием РГ:

$$p^{-\frac{\alpha d}{2}} \sum_{|pj-i| \leq 1} \xi_m^*(j) = \xi_{m-1}^*(i),$$

то мы можем отсюда видеть, что поля ζ_m^* связаны между собой оператором усреднения

$$p^{-d} \sum_{|pj-i| \leq 1} \zeta_m^*(p^m j) = \zeta_{m-1}^*(p^{m-1}i), \quad i, j \in T_p^d.$$

Таким образом, мы можем трактовать поля ζ_m^* как дискретизацию непрерывного поля ψ^* на решетку $T_{p,m}^d$:

$$\zeta_m^*(i) = \int \psi^*(x) \chi\left(\frac{x-i}{p^m}\right) dx, \quad i \in T_{p,m}^d,$$

где $\chi(x)$ – характеристическая функция шара Z_p^d .

Напомним [7, 19], что естественным пространством основных функций на Q_p^d является пространство локально-постоянных финитных функций $D(Q_p^d)$. При этом последовательность $f_i(x) \in D(Q_p^d)$, $i = 1, 2, \dots$, стремится к нулю, если:

1) все функции $f_i(x)$ равны нулю вне некоторого (не зависящего от i) компактного множества;

2) существует такое целое положительное n , что $f_i(x) = f_i(y)$, если $|x - y| \leq p^{-n}$, $i = 1, 2, \dots$;

3) последовательность $f_i(x)$ стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$ равномерно по x .

Мы будем говорить, что непрерывное поле ψ^* на Q_p^d задается состоянием ρ над пространством обобщенных функций $D'(Q_p^d)$, если определены корреляционные функции

$$\rho(\psi_{k_1}(f_1)\bar{\psi}_{l_1}(g_1) \dots \psi_{k_s}(f_s)\bar{\psi}_{l_s}(g_s)), \quad (8)$$

где $f_1, g_1, \dots, f_s, g_s \in D(Q_p^d)$, $k_i, l_i = 1, 2$, $i = 1, \dots, s$.

Поскольку функции $f_1, \dots, g_s$ можно представить как конечную сумму индикаторов p -адических шаров достаточно малого диаметра, корреляционные функции (8) будут определены, если будут определены корреляционные функции всех полей ζ_m^* , которые заданы состояниями $\tilde{\rho}_m$, задаваемыми гамильтонианами $H'_m(\zeta_m^*)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_m(\zeta_{m,k_1}(i_1)\bar{\zeta}_{m,l_1}(j_1) \dots \zeta_{m,k_s}(i_s)\bar{\zeta}_{m,l_s}(j_s)) = \\ = \frac{\langle \zeta_{m,k_1}(i_1)\bar{\zeta}_{m,l_1}(j_1) \dots \zeta_{m,k_s}(i_s)\bar{\zeta}_{m,l_s}(j_s) \exp\{-H'_m(\zeta_m^*)\} \rangle_0}{\langle \exp\{-H'_m(\zeta_m^*)\} \rangle_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь среднее $\langle \cdot \rangle_0$ понимается как интеграл по бесконечному числу антикоммутирующих переменных, сидящих в узлах решетки $T_{p,m}^d$, и корректно определено только в случае, если существует термодинамический предел. Однако заметим, что в силу соотношения (5) видно, что

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_m(\zeta_{m,k_1}(i_1)\bar{\zeta}_{m,l_1}(j_1) \dots \zeta_{m,k_s}(i_s)\bar{\zeta}_{m,l_s}(j_s)) = \\ = p^{dm(2-\alpha)s} \frac{\langle \zeta_{m,k_1}^*(p^{-m}i_1) \dots \bar{\zeta}_{m,l_s}^*(p^{-m}j_s) \exp\{-H'(\xi_m^*; \alpha; r^{(-m)}, g^{(-m)})\} \rangle_0}{\langle \exp\{-H'(\xi_m^*; \alpha; r^{(-m)}, g^{(-m)})\} \rangle_0}. \end{aligned}$$

Если термодинамический предел для поля $\xi^* \equiv \xi_0^*$ на решетке T_p^d , заданного гамильтонианом $H'(\xi_0^*; \alpha; r, g)$, существует, то то же самое верно и для поля ξ_m^* , заданного гамильтонианом $H'(\xi_m^*; \alpha; r^{(-m)}, g^{(-m)})$, поскольку [10] существование термодинамического предела определяется асимптотическими свойствами последовательности $(r^{(-m+N)}, g^{(-m+N)})$ при $N \rightarrow \infty$.

Таким образом, если сводить проблему построения непрерывного поля к построению корреляционных функций, то будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Для всех точек плоскости констант связи (r, g) , для которых существует термодинамический предел в иерархической фермионной модели, существует непрерывный предел с корреляционными функциями непрерывного поля, определенными пределами формулой (9).*

Отметим еще раз, что область значений констант связи, для которой доказано существование термодинамического предела, непуста (подробнее см. [10]).

Поскольку гамильтонианы $H'_m(\zeta_m^*; \alpha; \lambda_1^m r^{(-m)}, \lambda_2^m g^{(-m)})$ можно рассматривать как дискретные аппроксимации гамильтониана непрерывного поля $H(\psi^*; \alpha; \lambda_1^m r^{(-m)}, \lambda_2^m g^{(-m)})$, возникает естественный вопрос, существует ли предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \lambda_1^m r^{(-m)} \\ \lambda_2^m g^{(-m)} \end{pmatrix} = \lim_{m \rightarrow \infty} S^m R^{-m} \begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix},$$

и если да, то как этот предел связан с константами связи начального дискретного поля (r, g) . Пусть U обозначает множество всех точек (r, g) , которые при итерациях обратного отображения R^{-1} стремятся к тривиальной неподвижной точке $(0, 0)$. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\alpha > 2$. Тогда для всех $(r, g) \in U$ предел*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S^m R^{-m} \begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix}$$

существует и отображение T удовлетворяет коммутационному соотношению

$$TR = ST.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение R^{-1} может быть вычислено явно:

$$R^{-1} \begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} \left(\frac{(r+\lambda_1)^2 - g}{(r+\lambda_1)^2 - ng} (r + \lambda_1) - \lambda_1 \right) \\ \lambda_2^{-1} \left(\frac{(r+\lambda_1)^2 - g}{(r+\lambda_1)^2 - ng} \right)^2 g \end{pmatrix}.$$

В окрестности нуля это отображение имеет разложение в сходящийся ряд по степеням r и g :

$$R^{-1} \begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} r + \frac{n-1}{\lambda_1^2} g + t_1(r, g) \\ \lambda_2^{-1} g + t_2(r, g) \end{pmatrix},$$

где $t_1(r, g)$ и $t_2(r, g)$ — ряды по степеням r и g без свободных и линейных членов. Сделаем замену переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(n-1)\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Тогда дифференциал отображения

$$R_1 = ARA^{-1}$$

задается диагональной матрицей S , и мы получаем, что

$$S^m R^{-m} = S^m A R_1^{-m} A^{-1} = S^m A S^{-m} S^m R_1^{-m} A^{-1}.$$

Заметим, что

$$S^m A S^{-m} = \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^m \frac{(n-1)\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и если $\alpha > 2$, то т.к. $\lambda_1(\alpha) = n^{\alpha-1} < n^{2\alpha-3} = \lambda_2(\alpha)$, мы получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S^m A S^{-m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы имеем разложение для R_1^{-1} в нуле:

$$R_1^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} x_1 + t'_1(x_1, x_2) \\ \lambda_2^{-1} x_2 + t'_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Ряды $t'_1(x_1, x_2)$ и $t'_2(x_1, x_2)$ начинаются с мономов второго порядка. Пусть $|x|_1$ обозначает норму в R^2 , определяемую как

$$|x|_1 = \max(|x_1|, |x_2|), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $U_\varepsilon = \{x \in R^2 : |x|_1 < \varepsilon\}$. В силу того что $\lambda_2^{-1} < \lambda_1^{-1}$ при $\alpha > 2$, при достаточно малых ε справедлива оценка

$$|R_1^{-1}(x)|_1 < (\lambda_1^{-1} + c_1 \varepsilon) |x|_1, \quad (11)$$

где c_1 — некоторая константа, не зависящая от α и ε . Существует такое ε_0 , что отображение R_1^{-1} является сжимающим в U_{ε_0} : $|R_1^{-1}(x)|_1 < \delta |x|_1$, $x \in U_{\varepsilon}$, $\delta < 1$. Пусть

$$V = \{x \in R^2 : \lim_{m \rightarrow \infty} R_1^{-m}(x) = 0\}.$$

Ясно, что V содержит окрестность нуля. Мы можем написать

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S^m R_1^{-m}(x) = S^{m_0} \lim_{m \rightarrow \infty} S^m R_1^{-m}(R_1^{-m_0}(x)),$$

и для любого $x \in V$ существует m_0 такое, что $|R_1^{-m_0} x|_1 < \varepsilon_1$ для любого наперед заданного ε_1 . Выберем ε_1 так, чтобы

$$|R_1^{-1}(x) - S^{-1}x|_1 \leq c_2 |x|_1^2, \quad |R_1^{-1}(x)|_1 < \delta_1 |x|_1,$$

где $c_2 < \infty$, $\lambda_1^{-1} < \delta_1 < 1$, $\delta_1^2 < \lambda_2^{-1}$ (последнее неравенство возможно в силу оценки (11) и того, что $\lambda_1^{-2} = n^{2-2\alpha} < n^{3-2\alpha} = \lambda_2^{-1}$). Тогда мы можем написать, что

$$\begin{aligned} |S^{m+1} R_1^{-(m+1)}(x) - S^m R_1^{-m}(x)|_1 &\leq \\ &\leq \lambda_2^{m+1} |R_1^{-1}(R_1^{-m}(x)) - S^{-1} R_1^{-m}(x)| \leq c_2 \lambda_2^{m+1} \delta_1^{2m} |x|_1^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку $(\lambda_2 \delta_1^2)^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, последовательность $S^m R^{-m}(x)$ является фундаментальной и предел $\lim_{m \rightarrow \infty} S^m R^{-m}(x)$ существует для всех $x \in V$. Так как множество U при замене (10) переходит в множество V , то первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение следует из очевидного равенства

$$T = \lim_{m \rightarrow \infty} S^m R^{-m} = S \lim_{m \rightarrow \infty} S^{m-1} R^{-(m-1)} R^{-1} = S T R^{-1}.$$

Заметим также, что поскольку отображение T является равномерным пределом аналитических в некоторой окрестности нуля отображений $S^m R^{-m}$, то T аналитично в нуле, и т.к.

$$\left. \frac{\partial(S^m R^{-m}(r, g))}{\partial r} \right|_{r=0, g=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial(S^m R^{-m}(r, g))}{\partial g} \right|_{r=0, g=0} = 1,$$

то

$$\left. \frac{\partial T(r, g)}{\partial r} \right|_{r=0, g=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial T(r, g)}{\partial g} \right|_{r=0, g=0} = 1.$$

Отсюда и из (4) следует, что отображение T является обратным к P : $T = P^{-1}$. Как уже отмечалось, отображение P^{-1} определено для почти всех значений $\alpha < 2$. В области $3/2 < \alpha < 2$ резонансные значения образуют дискретную серию

$$\alpha_k = \frac{3}{2} + \frac{1}{2(2k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для всех α , которые отличны от α_k , $k = 1, 2, \dots$, отображение P^{-1} имеет сходящееся разложение в окрестности нуля. В области $1 < \alpha < 3/2$ любое рациональное число является резонансным. Для всех остальных α отображение P^{-1} определено при условии, что пара $\lambda_1(\alpha)$, $\lambda_2(\alpha)$ является набором (C, v) -типа, т.е.

$$|\lambda_1 - \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2}| \geq C|m|^{-v}, \quad |\lambda_2 - \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2}| \geq C|m|^{-v},$$

$m = m_1 + m_2 \geq 2$, $m_1 \geq 0$, $m_2 \geq 0$. Это завершает доказательство теоремы.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00375).

Список литературы

- [1] Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров. ТМФ. 1989. Т. 78. № 2. С. 248.
- [2] E. Yu. Lerner, M. D. Missarov. Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 35.
- [3] P. M. Bleher, Ya. G. Sinai. Commun. Math. Phys. 1973. V. 33. P. 23.
- [4] P. Collet, J.-P. Eckmann. A renormalization group analysis of the hierarchical model in statistical mechanics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1978.
- [5] Я. Г. Синай. Теория фазовых переходов: Строгие результаты. М.: Наука, 1980.
- [6] P. M. Bleher, P. Major. Ann. Prob. 1987. V. 15. P. 431.
- [7] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов. p -Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [8] L. Brekke, P. G. O. Freund. Phys. Rep. 1993. V. 233. P. 1.
- [9] E. Yu. Lerner, M. D. Missarov. J. Stat. Phys. 1994. V. 76. № 3/4. P. 805.
- [10] Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров. ТМФ. 1996. Т. 107. № 2. С. 201.
- [11] М. Д. Миссаров. ТМФ. 1998. Т. 114. № 3. С. 323.
- [12] Дж. Глимм, А. Джаффе. Математические методы квантовой физики. М.: Мир, 1984.
- [13] K. Gawedski, A. Kupiainen. Commun. Math. Phys. 1985. V. 99. P. 197.
- [14] K. Gawedski, A. Kupiainen. Commun. Math. Phys. 1985. V. 102. P. 1.
- [15] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseu, R. Seneor. Commun. Math. Phys. 1986. V. 103. P. 67.
- [16] T. C. Dorlas. Commun. Math. Phys. 1991. V. 136. P. 169.
- [17] M. D. Missarov. Lett. Math. Phys. 1994. V. 32. P. 347.
- [18] В. И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [19] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро. Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 29.V.1998 г.