Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Кириллов, Е. В. Поляченко, О времени пребывания квантовой частицы
в заданной области, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 1, 51–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:19:36

© 1999 г.

А. И. Кириллов*, Е. В. Поляченко†

О ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ В ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ

Для определения времени пребывания квантовой частицы в заданной области предложена квантово-полевая модель, включающая источник, детектор и скалярное поле. С помощью этой модели определено время прохождения частицы от источника к детектору, а также время туннелирования. Показано, что время прохождения частицы от источника к детектору зависит от свойств детектора и что в присутствии потенциального барьера время прохождения меньше, чем в случае без барьера.

ВВЕДЕНИЕ

Задача теоретического и экспериментального определения продолжительности квантового явления трудна уже на этапе постановки. Дело в том, что мы не можем с достаточной точностью зафиксировать начало и конец явления, не оказав неконтролируемого воздействия на процесс его протекания. Поэтому при определении продолжительности квантовых явлений приходится делать предположения, выводящие за рамки традиционной квантовой теории. В задаче о продолжительности пребывания частицы в данной области пространства такие предположения можно условно отнести к одной из следующих двух групп.

1. Уточнения интерпретации волновой функции.
2. Предположения о синхронности некоторых явлений.

Среди предположений первой группы отметим то, согласно которому точка максимума волнового пакета принимается за действительное положение частицы. Иногда вместо точки максимума используется точка, в которой фаза волнового пакета принимает определенное значение [1, 2]. Отметим также предположение о существовании траектории квантовой частицы, которое делается в методе континуального интеграла [3], в стохастической механике Нельсона [4] и в квантовой механике Бома [5].

Ко второй группе относятся предположения о синхронности исследуемого процесса распространения и некоторого вспомогательного процесса, продолжительность которого считается известной. В качестве такого вспомогательного процесса выбирается, на-

*Кафедра высшей математики МЭИ (ТУ), Москва, Россия. E-mail: tmph@mi.ras.ru

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

пример, прецессия спина в слабом магнитном поле, которое локализовано в интересующей нас области [6]. Тогда время пребывания частицы в этой области можно найти, разделив угол поворота ее спина на ларморову частоту прецессии.

В настоящей работе для определения времени прохождения мы предлагаем использовать систему, состоящую из источника и детектора частиц. Состояние источника (детектора) изменяется при испускании (поглощении) частиц. Эти изменения предполагаются доступными макроскопическому наблюдению. Изменения состояний источника и детектора позволяют приблизительно определить моменты начала и конца пребывания частицы в области между источником и детектором.

Преимуществом нашего подхода является то, что он использует наиболее естественное (с точки зрения экспериментатора) предположение о синхронности, а именно, предположение о синхронности времени распространения и времени между моментами срабатывания источника и детектора. При этом мы не пытаемся как-либо фиксировать состояние частицы, например, определяя ее положение, фазу или направление спина, а ограничиваемся лишь информацией о состояниях источника и детектора. Моменты срабатывания источника и детектора мы отождествляем с теми моментами, в которые вероятности таких срабатываний максимальны. Таким образом, в нашем подходе делаются предположения, относящиеся к обеим вышеуказанным группам.

Статья построена следующим образом. В разделе 1 описана предлагаемая квантово-полевая модель. В разделе 2 приведены полевые уравнения и их решения в виде квадратур, а также вычислено время прохождения. В разделе 3 для ослабления взаимодействия между источником и детектором, которое влияет на время прохождения, мы переходим к пределу при одновременном увеличении расстояния от источника до детектора и уменьшении константы взаимодействия поля с источником и детектором. В разделе 4 приведены уравнения, описывающие эволюцию модели в присутствии потенциального барьера, помещенного между источником и детектором. Для конкретных значений параметров системы найдено время прохождения в присутствии потенциального барьера. В заключении обсуждаются полученные результаты и намечаются перспективы дальнейших исследований.

Везде в данной статье, кроме последнего раздела, используется атомная система единиц, в которой $\hbar = c = 1$. В последнем разделе, чтобы выявить квантовые эффекты при обсуждении результатов, мы восстанавливаем постоянную Планка в формулах.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Предлагаемая модель представляет собой одномерную систему, состоящую из источника и детектора частиц. Частицы движутся вдоль оси x . Предполагается, что источник находится в плоскости $x = 0$, а детектор — в плоскости $x = L$.

Источник представляет собой систему, которая может находиться в двух состояниях — возбужденном $|V_s\rangle$ и основном $|N_s\rangle$. Если источник перешел из возбужденного состояния в основное, то это значит, что он испустил частицу. Энергия источника в основном состоянии принята равной нулю, в возбужденном — равной $\mathcal{E}_s$. Введем операторы $T_+^{(s)}$,

$\tau_-^{(s)}$ и $\tau_3^{(s)}$, которые действуют на состояния источника следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau_-^{(s)}|N_s\rangle &= |0_s\rangle, & \tau_-^{(s)}|V_s\rangle &= |N_s\rangle, \\ \tau_+^{(s)}|N_s\rangle &= |V_s\rangle, & \tau_+^{(s)}|V_s\rangle &= |0_s\rangle, \\ \tau_3^{(s)}|N_s\rangle &= -|N_s\rangle, & \tau_3^{(s)}|V_s\rangle &= |V_s\rangle.\end{aligned}$$

Здесь $|0_s\rangle$ – нулевой вектор в пространстве состояний источника. Коммутационные соотношения для операторов $\tau_+^{(s)}$, $\tau_-^{(s)}$ и $\tau_3^{(s)}$ имеют вид

$$[\tau_+^{(s)}, \tau_-^{(s)}] = \tau_3^{(s)} \quad \text{и} \quad [\tau_3^{(s)}, \tau_\pm^{(s)}] = \pm 2\tau_\pm^{(s)}.$$

Испускаемые источником частицы имеют массу μ и описываются квантовым полем с операторами рождения $a_k^\dagger$ и уничтожения a_k , удовлетворяющими коммутационному соотношению

$$[a_{k'}, a_k^\dagger] = \delta(k' - k).$$

Предполагается, что поле зависит только от одной пространственной координаты. Одночастичное состояние с импульсом k описывается вектором $|k\rangle$ фоковского пространства. Вакуумное состояние обозначается символом $|\Omega\rangle$. Распределение импульсов испускаемых частиц характеризуется вещественной функцией $u_s(k)$. Процесс испускания частиц определяется слагаемым

$$\hat{H}_s = g_s \int_{-\infty}^{+\infty} u_s(k) [a_k^\dagger \tau_-^{(s)} + a_k \tau_+^{(s)}] dk$$

в полном гамильтониане. Второе слагаемое в квадратных скобках введено для выполнения условия эрмитовости $\hat{H}_s$. Следовательно, в данной модели источник может поглощать частицы.

Детектор частиц представляет собой систему, которая может находиться в двух состояниях – основном $|N_d\rangle$ и возбужденном $|V_d\rangle$. Если детектор перешел из основного состояния в возбужденное, то это значит, что он поглотил частицу. Энергия детектора в основном состоянии принята равной нулю, в возбужденном – равной $\mathcal{E}_d$. Введем операторы $\tau_+^{(d)}$, $\tau_-^{(d)}$ и $\tau_3^{(d)}$, которые действуют на состояния детектора следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau_-^{(d)}|N_d\rangle &= |0_d\rangle, & \tau_-^{(d)}|V_d\rangle &= |N_d\rangle, \\ \tau_+^{(d)}|N_d\rangle &= |V_d\rangle, & \tau_+^{(d)}|V_d\rangle &= |0_d\rangle, \\ \tau_3^{(d)}|N_d\rangle &= -|N_d\rangle, & \tau_3^{(d)}|V_d\rangle &= |V_d\rangle.\end{aligned}$$

Здесь $|0_d\rangle$ – нулевой вектор в пространстве состояний детектора. Коммутационные соотношения для операторов $\tau_+^{(d)}$, $\tau_-^{(d)}$ и $\tau_3^{(d)}$ имеют вид

$$[\tau_+^{(d)}, \tau_-^{(d)}] = \tau_3^{(d)} \quad \text{и} \quad [\tau_3^{(d)}, \tau_\pm^{(d)}] = \pm 2\tau_\pm^{(d)}.$$

Распределение импульсов поглощаемых частиц характеризуется вещественной функцией $u_d(k)$. Процесс поглощения частицы определяется слагаемым

$$\hat{H}_d = g_d \int_{-\infty}^{+\infty} u_d(k) \left[a_k \tau_+^{(d)} e^{ikL} + a_k^\dagger \tau_-^{(d)} e^{-ikL} \right] dk$$

в полном гамильтониане. Второе слагаемое в квадратных скобках введено для выполнения условия эрмитовости $\hat{H}_d$. Следовательно, в данной модели детектор может излучать частицы.

Полный гамильтониан имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_k a_k^\dagger a_k dk + \frac{1 + \tau_3^{(s)}}{2} \mathcal{E}_s + \frac{1 + \tau_3^{(d)}}{2} \mathcal{E}_d + \\ & + g_s \int_{-\infty}^{+\infty} u_s(k) \left[a_k^\dagger \tau_-^{(s)} + a_k \tau_+^{(s)} \right] dk + \\ & + g_d \int_{-\infty}^{+\infty} u_d(k) \left[a_k \tau_+^{(d)} e^{ikL} + a_k^\dagger \tau_-^{(d)} e^{-ikL} \right] dk, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\omega_k = \sqrt{k^2 + \mu^2}$.

Заметим, что гамильтониан (1) без слагаемого, описывающего детектор частиц, определяет модель Ли в теории поля [7] и модель Джейнса–Каммингса [8] в квантовой оптике.

В данной работе мы предполагаем, что

1) источник и детектор обладают одинаковыми характеристиками, т.е. $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_d = \mathcal{E}$, $g_s = g_d = g$ и $u_s(k) = u_d(k) = u(k)$;

2) энергия возбужденного состояния $\mathcal{E}$ равна массе испускаемых источником частиц μ ;

3) спектр испускаемых частиц – симметричная по k функция, локализованная вблизи некоторых нерелятивистских значений $\pm k_0$. Конкретнее,

$$u(k) = \mathcal{N}(k - k_0) \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{2\sigma_k^2} \right] + \mathcal{N}(k + k_0) \exp \left[-\frac{(k + k_0)^2}{2\sigma_k^2} \right], \quad (2)$$

где k_0 и σ_k – константы, значения которых указаны ниже,

$$\mathcal{N}(k \pm k_0) = N \theta(3\sigma_k - |k \pm k_0|)$$

и множитель N определяется условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(k)^2 dk = 1.$$

Для описания туннелирования вводим в гамильтониан слагаемое, определяющее взаимодействие частиц с потенциальным барьером. Тогда гамильтониан системы примет вид

$$\hat{H}_V = \hat{H} + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V(k' - k) a_{k'}^\dagger a_k dk dk'. \quad (3)$$

Обозначим гильбертово пространство состояний системы символом $\mathcal{H}$. Оно представляет собой тензорное произведение двух пространств $\mathbb{C}^2$, содержащих состояния источника и детектора, и фоковского пространства состояний поля $\mathcal{H}_F$, т.е.

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}_s^2 \otimes \mathbb{C}_d^2 \otimes \mathcal{H}_F.$$

Легко проверить, что гамильтонианы (1) и (3) имеют интеграл движения

$$\hat{Q} = \frac{\tau_3^{(d)} + \tau_3^{(s)}}{2} + 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} a_k^\dagger a_k dk.$$

Поэтому гильбертово пространство $\mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму подпространств $\mathcal{H}_Q$, инвариантных относительно $\hat{Q}$. Спектр оператора $\hat{Q}$ ограничен снизу. Его минимальное значение равно нулю. Сектор $\mathcal{H}_0$ натянут на единственный вектор $|N_s; N_d; \Omega\rangle \equiv |N_s\rangle \otimes |N_d\rangle \otimes |\Omega\rangle$ – основное состояние системы. Следующее собственное значение оператора $\hat{Q}$ равно единице. Ему соответствует сектор $\mathcal{H}_1$, натянутый на векторы $|V_s; N_d; \Omega\rangle$, $|N_s; V_d; \Omega\rangle$ и $|N_s; N_d; k\rangle$. Именно этот сектор мы будем изучать ниже.

Произвольное состояние в секторе $\mathcal{H}_1$ является линейной комбинацией

$$|\alpha(t)\rangle = \alpha_s(t)|V_s; N_d; \Omega\rangle + \alpha_d(t)|N_s; V_d; \Omega\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{3k}(t)|N_s; N_d; k\rangle dk.$$

Мы предполагаем, что значения функций $|\alpha_s(t)|^2$ и $|\alpha_d(t)|^2$ доступны макроскопическому измерению. Изучая изменение $|\alpha_s(t)|^2$ и $|\alpha_d(t)|^2$ во времени, мы можем приблизительно определить моменты испускания и поглощения частицы и, следовательно, время прохождения. Точность такого определения времен обсуждается ниже.

2. ВРЕМЯ ПРОХОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ОТ ИСТОЧНИКА К ДЕТЕКТОРУ

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ источник находится в возбужденном состоянии, детектор находится в основном состоянии и частица отсутствует. Иными словами, вектор начального состояния системы имеет вид $|V_s; N_d; \Omega\rangle$. Соответственно $\alpha_s(0) = 1$, $\alpha_d(0) = 0$ и $\alpha_{3k}(0) = 0$.

Эволюция системы в секторе $\mathcal{H}_1$ определяется уравнением Шредингера

$$i \frac{d}{dt} |\alpha(t)\rangle = \hat{H} |\alpha(t)\rangle.$$

Это уравнение сводится к следующей системе:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \alpha_s(t) &= \mathcal{E} \alpha_s(t) + g \int_{-\infty}^{+\infty} u(k) \alpha_{3k}(t) dk, \\ i \frac{d}{dt} \alpha_d(t) &= \mathcal{E} \alpha_d(t) + g \int_{-\infty}^{+\infty} u(k) \alpha_{3k}(t) e^{ikL} dk, \\ i \frac{d}{dt} \alpha_{3k}(t) &= \omega_k \alpha_{3k}(t) + g u(k) [\alpha_s(t) + \alpha_d(t) e^{-ikL}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Исключая $\alpha_{3k}(t)$ и пользуясь операционным методом, находим, что

$$\alpha_s(t) = \frac{1}{2}(\alpha_+(t) + \alpha_-(t)) \quad \text{и} \quad \alpha_d(t) = \frac{1}{2}(\alpha_+(t) - \alpha_-(t)),$$

где $\alpha_+(t)$ и $\alpha_-(t)$ — функции, преобразования Лапласа которых имеют вид

$$A_{\pm}(z) = \frac{1}{z + i\mathcal{E} + g^2 b_{\pm}(z)},$$

где

$$b_{\pm}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(k)^2 (1 \pm \cos kL)}{z + i\omega_k} dk.$$

Мы воспользовались также тем, что $u(k) = u(-k)$.

По формуле Меллина

$$\alpha_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{q-i\infty}^{q+i\infty} A_{\pm}(z) e^{zt} dz, \quad (5)$$

где q — любое вещественное число, такое что функции $A_+(z)$ и $A_-(z)$ аналитичны в области $\operatorname{Re} z > q$. Очевидно, что эти функции аналитичны во всей комплексной плоскости, кроме разреза $\{z: z = -i\omega_k, k \in \mathbb{R}\}$ и точек, в которых $z + i\mathcal{E} + g^2 b_+(z) = 0$ или $z + i\mathcal{E} + g^2 b_-(z) = 0$. По теореме Руше каждое из этих уравнений имеет по одному единственному корню. Обозначим эти корни z_+ и z_- . Нетрудно проверить, что $\operatorname{Re} z_{\pm} = 0$.

Итак, q в (5) может быть сколь угодно малым положительным числом. Полагая в (5) $z = ip - i\mathcal{E} + q$, получаем, что

$$\alpha_{\pm}(t) = \frac{e^{-it\mathcal{E}+qt}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipt}}{p - g^2 f_{\pm}(p) - iq} dp,$$

где

$$f_{\pm}(p) = ib_{\pm}(ip - i\mathcal{E} + q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(k)^2 (1 \pm \cos kL)}{p + \omega_k - \mathcal{E} + iq} dk.$$

При теоретическом исследовании удобно устремить q к нулю. В численных расчетах для улучшения сходимости используется $q > 0$.

На рис. 1 приведены графики функций $p_s(t) = |\alpha_s(t)|^2$ и $p_d(t) = |\alpha_d(t)|^2$ при $g = 1$, $\mu = \mathcal{E} = \pi/2$ и расстоянии между источником и детектором $L = 3$. Кривые на рис. 1 получены при $k_0 = 1$ и $\sigma_k = 1$.

Многочисленные максимумы функции $p_s(t)$ вызваны тем, что, испустив частицу, источник может затем ее поглотить, вернувшись таким образом в возбужденное состояние, и т.д. Максимумы функции $p_d(t)$ объясняются аналогично. Осцилляции функций $p_s(t)$ и $p_d(t)$ не позволяют точно определить моменты испускания и поглощения частицы. Мы можем только утверждать, что с высокой вероятностью распространение частицы от источника к детектору началось в некоторый момент из интервала $[0, t_1]$ и закончилось в некоторый момент из интервала $[t_2, t_3]$ (см. рис. 1).

Рис. 1. Вероятности нахождения источника и детектора в возбужденных состояниях при $g = 1$, $\mu = \pi/2$ и $L = 3$.

Как отмечалось выше, мы предполагаем, что состояния источника и детектора могут быть определены макроскопическим измерением. Такое измерение приводит к некоторому сглаживанию наблюдаемых функций $p_s(t)$ и $p_d(t)$. В данной работе результат измерения функций $p_s(t)$ и $p_d(t)$ приближенно представлялся в виде

$$\bar{p}_s(t) = C_s e^{-\gamma_s t} \cos^2(\omega_s t) \quad \text{и} \quad \bar{p}_d(t) = C_d e^{-\gamma_d t} \sin^2(\omega_d t), \quad (6)$$

где $C_{s,d}$, $\gamma_{s,d}$ и $\omega_{s,d}$ — некоторые постоянные, значения которых определялись из условия наилучшего приближения в среднем квадратичном. Соответствующие значения констант C , γ и ω приведены в табл. 1.

Таблица 1

	$\bar{p}_s$	$\bar{p}_d$
C	0.755	0.755
γ	0.116	0.116
ω	0.218	0.216

Графики функций $\bar{p}_s(t)$ и $\bar{p}_d(t)$ представлены на рис. 2 вместе с графиками функций $p_s(t)$ и $p_d(t)$. Момент времени T , указанный на рис. 2, мы интерпретируем как момент регистрации частицы детектором. Иными словами, T — это время прохождения частицы от источника до детектора. Для значений, приведенных в табл. 1, это время составило $T = 6.06$.

Рис. 2. Кривые $\bar{p}_s(t)$ и $\bar{p}_d(t)$ при значениях постоянных C , γ и ω , приведенных в табл. 1. Штриховыми показаны те же кривые $p_s(t)$ и $p_d(t)$, что и на рис. 1.

Рис. 3. Функции $p_s(t)$ при различных расстояниях между источником и детектором.

На рис. 3 представлены функции $p_s(t)$, вычисленные при различных расстояниях между источником и детектором. Очевидно, что присутствие детектора влияет на вероятность возвращения источника в возбужденное состояние и тем самым на погрешность определения момента испускания. Аналогично источник влияет на погрешность определения момента детектирования.

Желая уменьшить влияние источника и детектора на распространение частицы, а также уменьшить эффект, вызванный погрешностью определения координат и моментов испускания и детектирования, мы используем модель, в которой $g \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$. Эта модель исследована в разделе 3.

3. МОДЕЛЬ СО СЛАБЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ИСТОЧНИКА И ДЕТЕКТОРА

В этом разделе мы выводим аналитические выражения для функций $p_s(t)$ и $p_d(t)$ в случае, когда расстояние между источником и детектором много больше размеров источника и детектора, т.е. $L \gg \sigma_k^{-1}$, и константа взаимодействия g мала в смысле, который мы уточним ниже. Константы k_0 и σ_k выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $k_0 > 3\sigma_k$, при котором $u(0) = 0$.

Малость константы взаимодействия позволяет решить систему (4) методом итераций. В качестве нулевого приближения примем

$$\alpha_d^{(0)}(t) = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_{3k}^{(0)}(t) = 0.$$

Тогда функции $\alpha_s(t)$ и $\alpha_d(t)$ с точностью до g^2 определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \alpha_s(t) &= e^{-it\mathcal{E}} + g^2 e^{-it\mathcal{E}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(k)^2}{\omega_k - \mathcal{E}} \left[it + \frac{1}{\omega_k - \mathcal{E}} (e^{i(\mathcal{E} - \omega_k)t} - 1) \right] dk, \\ \alpha_d(t) &= g^2 e^{-it\mathcal{E}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(k)^2}{\omega_k - \mathcal{E}} \left[it + \frac{1}{\omega_k - \mathcal{E}} (e^{i(\mathcal{E} - \omega_k)t} - 1) \right] e^{ikL} dk. \end{aligned} \quad (7)$$

Эти формулы справедливы при

$$g^2 t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(k)^2}{\omega_k - \mathcal{E}} dk \ll 1.$$

В рассматриваемом случае $t \sim L\mu/k_0$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(k)^2}{\omega_k - \mathcal{E}} dk \sim \frac{2\mu}{k_0^2}.$$

Поэтому формулы (7) применимы при

$$g^2 \ll \frac{k_0^3}{2L\mu^2}.$$

На рис. 4 показаны графики функций $p_s(t)$ и $p_d(t)$. Положение максимума функции $p_d(t)$ определяется довольно громоздким выражением. При $\sigma_k^2/k_0^2 \ll 1$ это выражение упрощается и принимает вид

$$T = \left(1 + \frac{7}{4} \frac{\sigma_k^2}{k_0^2} \right) T_{\text{cl}}, \quad (8)$$

Рис. 4. Графики низших (по g^2) приближений для функций $p_s(t)$ и $p_d(t)$ при $L = 25$, $\mu = 100$, $k_0 = 10$, $g = 0.01$ и $\sigma_k = 1$.

где $T_{cl} = L\mu/k_0$ – время распространения классической частицы. По формуле (8) получается, что $T = 254.375$. Это значение с точностью 0.07 % согласуется с координатой максимума функции $p_d(t)$ на рис. 4, равной 254.55.

4. ПРОХОЖДЕНИЕ СКВОЗЬ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР

В этом разделе мы исследуем, как потенциальный барьер влияет на время распространения частицы от источника к детектору. Используя гамильтониан (3) в секторе $\mathcal{H}_1$, получим следующую систему уравнений Шредингера:

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{dt} \alpha_s(t) &= \mathcal{E} \alpha_s(t) + g \int_{-\infty}^{+\infty} u(k) \alpha_{3k}(t) dk, \\
 i \frac{d}{dt} \alpha_d(t) &= \mathcal{E} \alpha_d(t) + g \int_{-\infty}^{+\infty} u(k) \alpha_{3k}(t) e^{ikL} dk, \\
 i \frac{d}{dt} \alpha_{3k}(t) &= \omega_k \alpha_{3k}(t) + gu(k) [\alpha_s(t) + \alpha_d(t) e^{-ikL}] + \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} V(k' - k) \alpha_{3k'}(t) dk'.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Эта система не допускает аналитического решения, как в случае без барьера. Однако при малой константе взаимодействия g решение системы (9) можно получить численно. Учитывая, что

$$\alpha_s(t) = e^{-i\mathcal{E}t} + O(g) \quad \text{и} \quad \alpha_d(t) = O(g),$$

исключая функции $\alpha_s(t)$ и $\alpha_d(t)$ из уравнений (9) и заменяя $\alpha_{3k}(t)$ на $\zeta_k(t) \exp(-i\mathcal{E}t)$, имеем

$$\frac{d}{dt} \zeta_k(t) = \hat{A} \zeta_k(t) - igu(k), \tag{10}$$

где $\hat{A}$ – линейный оператор

$$\hat{A}\zeta_k(t) = -i\frac{k^2}{2m}\zeta_k(t) - i\int_{-\infty}^{+\infty} V(k' - k)\zeta_{k'}(t) dk'.$$

Для решения уравнения (10) мы испробовали разные методы. Из них наиболее удобным оказался метод, в котором оператор $\hat{A}$ заменяется сеточным оператором. Для этого в пространстве импульсов вводится сетка из $N+1$ узлов в интервале $(k_{\min}, k_{\max})$. Соответственно функция $V(k - k')$ заменяется матрицей с элементами $V(k_j - k_l)$, где, например, $k_j = k_{\min} + j \cdot (k_{\max} - k_{\min})/N$. Функции $\zeta_k(t)$ и $u(k)$ заменяются соответственно векторами с компонентами $\zeta_{k_j}(t)$ и $u(k_j)$.

В результате вместо уравнения (10) получим систему N обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dt}\zeta_{k_l}(t) = -i\frac{k_l^2}{2\mu}\zeta_{k_l}(t) - i\sum_{j=0}^N V(k_l - k_j)\zeta_{k_j}(t) + igu(k_l).$$

Эта система была решена методом Рунге–Кутты. Затем амплитуда вероятности $\alpha_d(t)$ вычислялась по формуле

$$\alpha_d(t) = ig \int_0^t dt' \sum_{j=0}^N u(k_j) e^{ik_j L} \zeta_{k_j}(t').$$

В данном расчете потенциальный барьер V имеет прямоугольную форму и расположен посередине между источником и детектором. Высота барьера $V_0 = 2$. Напомним, что $k_0 = 10$, $\sigma_k = 1$ и $\mu = 100$. Поэтому

$$\frac{(k_0 + 3\sigma_k)^2}{2\mu} = \frac{169}{200} < V_0 = 2.$$

Следовательно, над барьером частицы пройти не могут. Ширина барьера D варьировалась от нуля до $D = 0.35$. При $D > 0.35$ коэффициент прохождения мал, что затрудняет численные расчеты. Устойчивость счета контролировалась сравнением численных решений, полученных при различных значениях шага в методе Рунге–Кутты и при различных сеточных аппроксимациях. Удовлетворительная точность была достигнута при $\Delta t = 0.1$, $k_{\min} = -5k_0$, $k_{\max} = 7k_0$ и числе узлов $N = 1800$.

На рис. 5 показаны графики функций $p_d(t)$ для потенциальных барьеров ширины $D = 0$ и $D = 0.30$. Очевидно, что при наличии барьера максимум функции $p_d(t)$ смещается влево, что означает уменьшение времени распространения частицы. В табл. 2 приведены значения времен прохождения T , определяемых по максимумам функций $p_d(t)$, для потенциальных барьеров различной ширины D .

Рис. 5. Функции $p_d(t)$, определяемые уравнением (10). Расстояние между источником и детектором $L = 25$.

Таблица 2

D	T
0.00	254.55
0.25	249.56
0.30	248.82
0.35	247.92

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье были получены следующие результаты.

1. Для определения времени прохождения предложена система, состоящая из источника и детектора частиц, между которыми может находиться потенциальный барьер. Испускаемые и поглощаемые источником и детектором частицы описываются квантовым полем.

2. С помощью предложенной системы определено время прохождения частицы от источника до детектора. Это время зависит от расстояния между источником и детектором и от интенсивности взаимодействия источника и детектора с квантовым полем частиц.

3. Скорость распространения частицы имеет вид

$$v = \frac{k_0}{\mu} \left(1 + 7\pi^2 \frac{\hbar^2}{\sigma_x^2 k_0^2} \right)^{-1},$$

где $\sigma_x = 2\pi\hbar/\sigma_k$ – размер источника и детектора. Очевидно, что скорость распространения зависит от постоянной Планка $\hbar$.

4. Найдено время прохождения частицы в присутствии потенциального барьера. Это время оказалось меньше времени распространения без барьера.

Интересно сравнить времена прохождения, полученные в нашей модели, с теми, которые получаются в квантовой механике. Для этого заметим, что в нашей модели при определении α_{3k} из уравнений (4) получается, что испускаемая источником в сторону детектора частица имеет распределение импульсов

$$u_s^{(R)}(k) = \frac{\mathcal{N}(k - k_0)}{\omega_k - \mathcal{E}} \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{2\sigma_k^2} \right]. \quad (11)$$

Поэтому ее движение в квантовой механике определяется волновой функцией

$$\psi^{(R)}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{xk}{\hbar} - i\frac{k^2}{2\mu\hbar}t} u_s^{(R)}(k) dk. \quad (12)$$

Индекс (R) указывает на то, что волна распространяется направо.

Примем, что квантово-механическое время распространения частицы из точки плоскости $x = 0$ в точку плоскости $x = L$ равно времени T_{qm} , при котором $|\psi^{(R)}(x, t)|^2$ имеет максимум в точке $x = L$. Пользуясь формулой (12), получаем для T_{qm} громоздкое выражение, которое при $\sigma_k^2/k_0^2 \ll 1$ упрощается и принимает вид

$$T_{qm} = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\sigma_k^2}{k_0^2} \right) T_{cl}.$$

Сравнивая это выражение с (8), мы видим, что в нашей модели время распространения частицы больше, чем в квантово-механической. Это различие возникает по следующей причине.

В нашей модели момент прихода частицы определяется по максимуму функции $p_d(t)$ или, что то же самое, по максимуму $|\alpha_d(t)|$, так как $p_d(t) = |\alpha_d(t)|^2$. В младшем порядке по g функция $\alpha_d(t)$ равна

$$\alpha_d(t) = g^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_d(k)u_s(k)}{(\omega_k - \mathcal{E})^2} e^{i\frac{Lk}{\hbar} - i\frac{k^2}{2\mu\hbar}t} dk - g^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_d(k)u_s(k)}{(\omega_k - \mathcal{E})^2} e^{i\frac{Lk}{\hbar}} dk. \quad (13)$$

Показательные функции под интегралами в (13) играют разные роли. Во втором интеграле функция $\exp(iLk/\hbar)$ быстро осциллирует, из-за чего этот интеграл приблизительно равен нулю, а в первом интеграле функция $\exp[iLk/\hbar - ik^2t/(2\mu\hbar)]$ имеет стационарную фазу при $k = L\mu/t$. Поэтому

$$\alpha_d(t) \simeq g^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_d(k)u_s(k)}{(\omega_k - \mathcal{E})^2} e^{i\frac{Lk}{\hbar} - i\frac{k^2}{2\mu\hbar}t} dk.$$

Это выражение имеет вид волнового пакета с распределением импульсов

$$u_{s,d}^{(R)}(k) = \frac{u_d(k)u_s(k)}{(\omega_k - \mathcal{E})^2} \quad (14)$$

при $x = L$.

Сравнивая (14) и (11), мы видим, что с точки зрения квантовой механики использование детектора сводится к изменению спектра распространяющегося волнового пакета. Формула (14) показывает, что это изменение определяется спектральной характеристикой $u_d(k)$ детектора и появлением дополнительного множителя $\omega_k - \mathcal{E}$ в знаменателе. Иными словами, движение частицы описывается в нашей модели не тем волновым пакетом, что в квантовой механике. Поскольку функция $u_d(k)$ в наших расчетах определялась формулой (2), эффективный волновой пакет в нашей модели движется медленнее, чем пакет $\psi^{(R)}(x, t)$. Изменяя $u_d(k)$, мы можем изменить время между испусканием и регистрацией частицы, например, сделав его меньшим, чем в квантовой или классической механике.

Представляет интерес функция $u_d(k)$ вида

$$u_d(k) = \begin{cases} N(\omega_k - \mathcal{E}), & |k - k_0| \leq \sigma_k, \\ 0, & |k - k_0| > \sigma_k. \end{cases}$$

Формула (14) показывает, что детекторы с такими характеристиками при различных k_0 и σ_k действуют как спектральные проекторы.

Предположим, что в присутствии какого-либо из этих детекторов распространяется волновой пакет

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{i\frac{kL}{\hbar} - i\frac{k^2}{2\mu\hbar}t} dk.$$

Представим $\psi(x, t)$ в виде суммы $\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)$, где

$$\psi_1(x, t) = \int_{|k - k_0| < \sigma_k} \varphi(k) e^{i\frac{kL}{\hbar} - i\frac{k^2}{2\mu\hbar}t} dk$$

и

$$\psi_2(x, t) = \int_{|k - k_0| > \sigma_k} \varphi(k) e^{i\frac{kL}{\hbar} - i\frac{k^2}{2\mu\hbar}t} dk.$$

Заметим, что функции $\psi_1(x, t)$ и $\psi_2(x, t)$ ортогональны в каждый момент времени. В силу принципа суперпозиции частица находится либо в состоянии ψ_1 , либо в состоянии ψ_2 с вероятностями, равными соответственно

$$\int_{|k - k_0| < \sigma_k} |\varphi(k)|^2 dk \quad \text{и} \quad \int_{|k - k_0| > \sigma_k} |\varphi(k)|^2 dk.$$

Детектор регистрирует частицу, только если она находится в состоянии ψ_1 . Согласно информации, поступающей от детектора, движение частицы описывается не волновым пакетом $\psi(x, t)$, а волновым пакетом $\psi_1(x, t)$.

Обсудим теперь тот результат данной статьи, согласно которому время движения частицы от источника к детектору при наличии потенциального барьера меньше, чем в отсутствие барьера. Этот эффект предсказывает и квантовая механика. Например, при распространении волнового пакета, имеющего распределение импульсов $u^{(R)}$ (см. (11))

Рис. 6. Фазовые сдвиги при рассеянии частиц с энергией $E = k^2/2\mu$ на потенциальных барьерах различной ширины.

и находящегося в момент времени $t = 0$ в точке $x = 0$, время распространения уменьшается при увеличении ширины барьера. В табл. 3 приведены значения квантово-механических времен распространения T_{qm} при ширине барьера $D = 0.0, 0.25, 0.30$ и 0.35 в сравнении с нашими результатами из табл. 2.

Таблица 3

D	T_{qm}	Модель ист.-дет.
0.00	253.86	254.55
0.25	247.12	249.56
0.30	245.89	248.82
0.35	244.67	247.92

Некоторую долю уменьшения времени распространения можно объяснить тем, что при прохождении пакета сквозь барьер его компоненты, обладающие большими импульсами, легче туннелируют. Следовательно, средний импульс волнового пакета за барьером больше среднего импульса падающего на барьер пакета. Расчет показывает, что при ширине потенциального барьера $D = 0.30$ этот эффект приводит к уменьшению квантово-механического времени распространения на 3.09. Однако полное уменьшение этого времени составляет 7.97 (см. табл. 3).

Другим свидетельством ускоряющей роли потенциального барьера является тот факт, что при прохождении частицы с импульсом k сквозь потенциальный барьер высотой V_0

и шириной D фазовый сдвиг $\delta(E)$ волновой функции определяется выражением

$$\delta(E) = -D\sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}} + \arctg \left[\frac{2E - V_0}{2\sqrt{E(V_0 - E)}} \operatorname{th} \left(D\sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}} \right) \right],$$

которое отрицательно при любых значениях E (см. рис. 6). Иными словами, прошедшая волна как бы опережает падающую.

В работах [1, 2] величина $d\delta(E)/dE$ интерпретировалась как время задержки частицы при ее движении сквозь барьер. Графики на рис. 6 показывают, что во многих случаях так определенное время задержки тоже меньше нуля.

Предложенная в данной статье модель может рассматриваться как модель квантовой системы передачи сигналов. Мы показали, что время передачи сигнала зависит от расстояния между источником и детектором, а также от их свойств, определяемых функциями $u_s(k)$, $u_d(k)$ и константами связи g_s , g_d , фигурирующими в гамильтониане системы (1).

Полученные в данной статье результаты можно использовать для оценки быстродействия современных ЭВМ. Источниками и детекторами в ЭВМ служат переключаемые элементы. Ряд сигналов в процессорах совершает туннельные переходы. По нашим расчетам такие переходы увеличивают быстродействие.

Предложенную в данной работе модель с $\mu = 0$ можно применить для оценки квантовых ограничений точности измерения времен распространения световых сигналов. Такие измерения используются в теории относительности для пространственно-временной локализации событий и установления причинной связи между ними. Поэтому указанные ограничения представляют фундаментальный интерес. Понятно, что они происходят от осцилляций функций $p_s(t)$ и $p_d(t)$ типа тех, что показаны на рис. 1, а также от неопределенностей точек испускания и детектирования фотонов, определяемых функциями $u_s(k)$ и $u_d(k)$. Искажение спектра детектором, о котором говорилось выше, не может влиять на время распространения светового сигнала, поскольку кванты разной частоты имеют одну и ту же скорость. Количественные оценки влияния указанных факторов будут приведены в следующей статье.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-15-96 208).

Список литературы

- [1] *E. H. Hauge, J. A. Stovneng.* Rev. Mod. Phys. 1989. V. 61. P. 917.
- [2] *R. Landauer, Th. Martin.* Rev. Mod. Phys. 1994. V. 66. P. 217.
- [3] *D. Sokolovski, J. N. R. Connor.* Phys. Rev. A. 1992. V. 40. P. 4677.
- [4] *E. Nelson.* Phys. Rev. 1966. V. 150. P. 150.
- [5] *Д. Бом.* Квантовая теория. М.: Физматгиз, 1961.
- [6] *В. Ф. Рыбаченко.* ЯФ. 1966. Т. 5. С. 895.
- [7] *T. D. Lee.* Phys. Rev. 1954. V. 95. P. 1329.
- [8] *E. T. Jaynes, F. W. Cummings.* Proc. IEEE. 1963. V. 51. P. 89.

Поступила в редакцию 15.VII.1998 г.