Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Буаррудж, П. Я. Грозман, Д. А. Лейтес, И. М. Щепочкина, Суперпространства Минковского и суперструны как вещественно-комплексные супермногообразия, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 3, 416–440

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6872>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:31:36

© 2012 г.

С. Буаррудж*, П. Я. Грозман[†],
Д. А. Лейтес[‡], И. М. Щепочкина[§]

СУПЕРПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО И СУПЕРСТРУНЫ КАК ВЕЩЕСТВЕННО-КОМПЛЕКСНЫЕ СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ

Определен и вычислен для суперпространства Минковского и суперструн обрезанный аналог тензора Нийенхейса – препятствие к интегрируемости почти вещественно-комплексной структуры. Он тождественно равен нулю, только если суперразмерность суперструны равна 1|1 и, кроме того, задана контактная структура. Показано также, что все вещественные формы алгебр Грассмана изоморфны, хотя они заданы очевидно разными антиинволюциями.

Ключевые слова: вещественные и комплексные супермногообразия, тензор Нийенхейса, теория струн, неголоморфные распределения, кэлеровы и гиперкэлеровы супермногообразия.

1. ВВЕДЕНИЕ

И. Н. Бернштейн заметил, что гладкие и аналитические супермногообразия, изучаемые математиками, это вещественные либо (почти)комплексные супермногообразия, а вот суперпространства Минковского – совсем другие объекты. Они суть то, что мы называем *почти вещественно-комплексными супермногообразиями*, т. е. вещественными супермногообразиями с неинтегрируемым распределением – набором подпространств в каждом касательном пространстве, причем на каждом подпространстве задана комплексная структура.

1.1. Общее замечание о суперизациях. В теории супермногообразий известно довольно много “прямолинейных” суперизаций классических несуперных понятий. Примерами таких “прямолинейных” суперизаций являются, в частности,

*New York University Abu Dhabi, Division of Science and Mathematics, Abu Dhabi, U.A.E.
E-mail: sofiane.bouarroudj@nyu.edu

[†]Equa Simulation AB, Stockholm, Sweden. E-mail: pavel.grozman@bredband.net

[‡]Department of Mathematics, Stockholm University, Stockholm, Sweden.
E-mail: mleites@math.su.se

[§]Независимый московский университет, Москва, Россия. E-mail: irina@mccme.ru

определения суперсхем и алгебраических супермногообразий над любым полем [1], определение их C^∞ -аналогов, т. е. гладких супермногообразий [2], определение их комплексно-аналитических аналогов – суперпространств [3] и т. д. Справедливости ради следует заметить, что выбор направления суперизации, которое можно назвать “прямолинейным”, занимал иногда изрядное время, а некоторые из вышеупомянутых понятий обсуждают и “улучшают” до сих пор, уже более 40 лет.

Другие понятия линейной алгебры и алгебраические понятия алгебраической и дифференциальной геометрий имеют *несколько* суперизаций, некоторые из которых неожиданны (а некоторые продолжают быть неожиданными) и не имеют прямых несуперных аналогов. Например, среди супердетерминантов есть хорошо известный *березиниан* Ber , а еще имеются не столь известные *странный детерминант* qet и “классические пределы” детерминантов Ber и qet [4], [5].

Иногда изучение суперсимметрий помогает не только лучше понять классические несуперные понятия (например, интеграл), но и выделить новое понятие. Ниже мы разберем одно такое понятие, неявно введенное одновременно с суперпространством Минковского.

Похожим до некоторой степени понятием кажется CR-структура, но посмотрев внимательно, мы видим, что в существенном между ними нет ничего общего.

1.2. Новое понятие: вещественно-комплексное супермногообразие. В течение года (1996/97), посвященного Институтом высших исследований в Принстоне попытке понять хоть часть той математики, которую использовали физики в работах по суперсимметриям, И. Н. Бернштейн указал на еще один пример неожиданной структуры (см. [6], с. 94). Он заметил, что суперпространства Минковского, предложенные в качестве моделей нашего пространства-времени в пионерских работах физиков, открывших суперсимметрию, не являются ни комплексными или вещественными супермногообразиями, ни вещественными супермногообразиями с почти комплексной структурой, которые до того времени изучали и по сей день изучают математики (см., например, работы [3], [7]).

Суперпространства Минковского, а также суперструны, введенные физиками, являются объектами со структурой, которую ранее никогда не изучали. Мы дадим точное определение таких объектов в следующем пункте, а пока отметим, что хотя в касательном пространстве к пространству Минковского в каждой точке заданы эквивалентные билинейные формы (с сигнатурой Лоренца), пространств Минковского тем не менее много. Они различаются, например, тензорами¹⁾ Римана, построенными по метрикам.

Все суперпространства Минковского, а также некоторые из “римановых суперповерхностей”, рассматриваемых в струнных моделях, состоят из *вещественного* многообразия (в этих примерах – пространства Минковского или римановой поверхности) и пучка функций на этом многообразии со значениями в *комплексной* супералгебре Грассмана $\Lambda_{\mathbb{C}}(s)$ с s образующими. Эта конструкция отличается от “пучка комплекснозначных функций на вещественном многообразии” по двум причинам.

¹⁾Устоявшиеся термины “тензор Римана” и “тензор Нийенхейса”, строго говоря, описывают иногда не тензоры, а тензорные поля. Ниже нам потребуется четко отличать тензоры от тензорных полей.

1. Рассматривая пучок комплекснозначных функций на вещественном многообразии, мы не получаем ничего нового по сравнению с пучком $\mathbb{R}$ -значных функций на том же многообразии. Действительно, на пространстве значений $\mathbb{C}$ имеется лишь одна вещественная структура, поэтому каждую $\mathbb{C}$ -значную функцию f можно *канонически* представить в виде суммы пары $\mathbb{R}$ -значных функций: $f(x) = u(x) + iv(x)$. Если $s > 0$, то никакой канонической, т. е. однозначно определенной, вещественной структуры на $\Lambda_{\mathbb{C}}(s)$ нет.

Возникает вопрос: сколько имеется классов изоморфизмов вещественных форм супералгебры Грассмана $\Lambda_{\mathbb{C}}(s)$, т. е. пространства значений суперфункций в точке?

На алгебре Грассмана $\Lambda_{\mathbb{C}}(s)$ аналогов комплексного сопряжения явно *несколько* и очень разного вида, причем математики рассматривают одни сопряжения, а физики – другие [6]–[8], и ответ на сформулированный выше вопрос не был приведен нигде (насколько мы знаем), кроме книги [5]. Мы докажем, что вещественные формы алгебры $\Lambda_{\mathbb{C}}(s)$ изоморфны, но среди них нет канонической, если $s > 0$.

2. Еще одной особенностью N -расширенного суперпространства Минковского $\mathcal{M}_N$, определение которого мы напомним ниже в п. 3.3, является наличие на нем *неголономного* (т. е. неинтегрируемого) распределения.

Если бы $\mathcal{M}_N$ было просто пространством Минковского M , функции на котором принимают значения в супералгебре $\Lambda_{\mathbb{C}}(2N)$, то это означало бы, что на чисто нечетной части касательного к $\mathcal{M}_N$ пространства задана комплексная структура в каждой точке. Выделив интегральное подсупермногообразие $\mathcal{S}$ распределения коразмерности $4|0$ на $\mathcal{M}_N$, можно для характеристики суперпространства Минковского $\mathcal{M}_N$ предложить пару: тензор Римана на M и тензор Нийенхейса, описывающий меру неплоскостности комплексной структуры на $\mathcal{S}$.

Распределений, заданных чисто нечетными подпространствами касательных пространств к точкам данного супермногообразия, много разных, как интегрируемых, так и неинтегрируемых. Так вот, то распределение, что задает суперпространство Минковского $\mathcal{M}_N$, неинтегрируемо. Поэтому никакого интегрального подсупермногообразия нет, и как определить в такой ситуации аналог тензора Нийенхейса, было неизвестно.

1.3. Вещественно-комплексные супермногообразия как супермногообразия с G -структурой и неинтегрируемым распределением. Известно много примеров, когда имеется поле тензоров данного типа, причем на касательном пространстве в данной точке выбрана “плоская” форма тензора в классе эквивалентных ему тензоров, и возможность привести поле тензоров данного типа к выбранному “плоскому” виду в инфинитезимальной окрестности точки зависит от препятствий – коциклов, представляющих когомологии, которые мы опишем ниже.

Например, 1) на данном векторном пространстве V над $\mathbb{C}$ имеется один класс эквивалентности невырожденных симметрических билинейных форм g ; 2) то же верно для невырожденных антисимметрических билинейных форм ω ; 3) на данном векторном пространстве V размерности $2n$ над $\mathbb{R}$ имеется один класс эквивалентности автоморфизмов J таких, что $J^2 = -\text{id}$; 4) классов эквивалентности данного типа тензоров может быть и несколько, пример – симметрические билинейные формы g над $\mathbb{R}$ различаются сигнатурой.

Если V – векторное пространство над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ с заданным на нем тензором T , группа автоморфизмов которого есть G , а M – многообразие (комплексное или действительное соответственно) такое, что $\dim M = \dim V$, и на нем задано поле $\mathcal{T}$ тензоров, значения которого в каждой точке многообразия M эквивалентны T , то это поле тензоров определяет G -структуру на M .

Ниже мы напомним и суперизируем определение *структурных функций* – функций на главном G -расслоении со значениями в некоторых когомологиях алгебр Ли [9]. Суперизация этих понятий очевидна. Препятствиями к “плоскостности” трех G -структур в приведенных выше примерах являются тензор Римана для метрик, $d\omega$ для антисимметрических 2-форм и тензор Нийенхейса для почти комплексных структур.

В каждой точке N -расширенного супермногообразия Минковского $\mathcal{M}_N$ мы можем выбрать любой вид тензора J , задающего комплексную структуру на нечетной части касательного пространства, в качестве “плоского”. Вопрос: каковы препятствия к приведению тензорного поля J к плоскому виду в инфинитезимальной окрестности этой точки? Здесь важно (и такие конструкции ранее никто не рассматривал), что почти комплексная структура J задана не на всем касательном пространстве, а лишь на тех подпространствах, семейство которых задает *неинтегрируемое* распределение.

Пример суперпространства Минковского можно естественно обобщить. Вот самое широкое определение.

Почти вещественно-комплексное супермногообразие суперразмерности $(p|q; r|s)$ есть вещественное супермногообразие $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{p+2r|q+2s}$ с заданным на нем неголономным подрасслоением $\mathcal{D}$ касательного расслоения, на $2r|2s$ -мерных пространствах которого задана почти комплексная структура J .

В книге [6] рассмотрен частный случай вещественно-комплексного супермногообразия суперразмерности $(p|0; 0|s)$ и использован несколько внутренне противоречивый термин *cs manifold*.

Отметим важность того, что $2r|2s$ -мерные подпространства касательных пространств, на которых заданы комплексные структуры, образуют неголономное, т. е. неинтегрируемое, подрасслоение касательного расслоения; в противном случае конструкция сводилась бы к почти комплексной структуре на интегральном супермногообразии распределения.

В частности, почти вещественно-комплексные структуры бывают и на многообразиях, но лишь пример суперпространства Минковского привлек к ним внимание.

Тензор J , задающий структуру почти вещественно-комплексного супермногообразия, будучи задан на подпространствах, задающих неголономную связность, определяет *обрезанную* (говорят также “усеченную”) связность, см. запись лекций А. М. Вершика в дополнении к переводу книги [10]. Когда И. Н. Бернштейн заметил новую структуру, о которой идет речь, определение тензора кривизны обрезанной связности было известно уже несколько лет и использовано в работе [11], однако подробности были опубликованы лишь много позже [12], и в настоящей работе варианты вещественно-комплексных супермногообразий описаны впервые.

На семинаре по “римановым суперповерхностям” и суперструнам [13] мы обратили внимание на смежную задачу, упомянутую в книге [6]: в то время как все

римановы поверхности автоматически снабжены комплексной структурой (и наоборот, каждая комплексная кривая снабжена естественной римановой метрикой), совершенно неясно, почему аналогичное утверждение должно быть верным для комплексных суперкривых размерности $1|N$ и почему вещественные супермногообразия размерности $2|2N$ обязаны иметь почти комплексную структуру, не говоря уже о комплексной. Как мы покажем, эти “очевидные” гипотезы, неявно принятые без обоснований в почти всех известных нам текстах про супераналоги римановых поверхностей, необоснованны: подходящие усеченные аналоги тензора Нийенхейса тождественно равны нулю лишь на суперструне размерности $1|1$, причем не на любой, а лишь на той, что наделена контактной структурой.

1.4. Интегрируемость почти комплексных структур: аналитический и алгебраический подходы.

1.4.1. *Определения.* Вещественное супермногообразие суперразмерности $2p|2q$, в касательном пространстве к каждой точке которого задан четный автоморфизм J (т. е. тензор валентности $(1, 1)$) такой, что $J^2 = -\text{id}$, называется *почти комплексным* супермногообразием.

Супермногообразие суперразмерности $n|n$ над полем $\mathbb{K}$, снабженное нечетным тензорным полем J валентности $(1, 1)$ таким, что $J^2 = -\text{id}$, назовем *супермногообразием с почти J -симметричной структурой*.

Супермногообразие суперразмерности $n|n$ над полем $\mathbb{K}$, снабженное нечетным тензорным полем Π валентности $(1, 1)$ таким, что $\Pi^2 = \text{id}$, назовем *супермногообразием с почти Π -симметричной структурой*.

Супергруппа Ли $G = GQ_J(n; \mathbb{C})$, сохраняющая оператор J , изоморфна супергруппе Ли $G = GQ_\Pi(n; \mathbb{C})$, сохраняющей оператор Π , но над $\mathbb{R}$ аналоги этих супергрупп неизоморфны [5].

Супермногообразие $\mathcal{M}$ наделено (почти) G -структурой (допуская серьезную вольность речи, слово “почти” обычно не упоминают), если в касательном пространстве к каждой точке супермногообразия $\mathcal{M}$ задано действие супергруппы G (как в примерах выше, где $G = GL(p|q; \mathbb{C}) \subset GL(2p|2q; \mathbb{R})$, если тензор J четен, и $G = GQ_J(n; \mathbb{K})$, если J нечетен). Если эта G -структура интегрируема (подробности см. в работах [9], [12]), слово “почти” можно опустить.

Препятствия к интегрируемости G -структур изучают двумя способами, изложенными в следующих двух подпунктах.

1.4.2. *Аналитический подход.* Впервые, насколько мы знаем, препятствия к интегрируемости G -структуры, заданной тензорным полем J на многообразии, были описаны в работе [14]. Эти препятствия составляют то, что называется *кривизной* почти комплексной структуры, заданной тензорным полем J ; авторы работы [14] называли эти препятствия *тензором Нийенхейса* $\mathcal{N}$, определив его значение на любой паре векторных полей X, Y формулой

$$\mathcal{N}(X, Y) = [J(X), J(Y)] - J([J(X), Y]) - J([X, J(Y)]) - [X, Y], \quad (1)$$

где $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор векторных полей. Нийенхейс первым показал, что тензорное поле $\mathcal{N}$ можно представить в виде

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} \{J, J\}_N, \quad (2)$$

где $\{\cdot, \cdot\}_N$ – скобка Нийенхейса, см. работу [15], где перечислены все билинейные дифференциальные операторы, действующие в пространствах тензорных полей и инвариантные относительно замен переменных. Отметим работу [16], в которой даны 12 эквивалентных описаний тензора $\mathcal{N}$.

На супермногообразиях четный тензор J был изучен в работе [17], где доказано, что почти комплексная структура на супермногообразии комплексна, если тензор Нийенхейса $\mathcal{N}$ тождественно равен нулю. (Этот тензор, введенный в богатой результатами работе [3], переоткрыт в статье [18].)

Аналогичный факт верен и для J -симметрии, которая в работе [17] названа *нечетной (почти) комплексной структурой*. Соответствующий тензор Нийенхейса $\mathcal{N}_J$ задается формулой

$$\mathcal{N}_J(X, Y) = (-1)^{p(X)}[J(X), J(Y)] - J([J(X), Y]) - (-1)^{p(X)}J([X, J(Y)] - [X, Y]. \quad (3)$$

Для любой Π -симметрии соответствующее тензорное поле $\mathcal{N}_\Pi$ определяется тем же выражением (3) с заменой J на Π .

Понятно, почему никто пока не озаботился выяснением тех суперразмерностей, в которых тензор Нийенхейса тождественно равен нулю (как на почти комплексных кривых = римановых поверхностях, т. е. в суперразмерности $2|0$): в аналитическом подходе, который был пока основным методом исследования тензора кривизны, описывать препятствия к интегрируемости трудно. К счастью, имеется более адекватный, хотя и реже употребляемый, взгляд на задачу, который мы изложим в следующем подпункте.

1.4.3. Алгебраический подход. Препятствия к интегрируемости G -структур можно, оказывается, описать в терминах когомологий алгебр Ли (ср. описания в работах [9] и [12]). Суперизация немедленна и очевидна. Например, исследуя интегрируемость почти комплексной структуры, заданной тензорным полем J , мы сперва рассматриваем супералгебру Ли $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{gl}(p|q; \mathbb{C})$, сохраняющую тензор J в данной точке, отождествляем касательное пространство к этой точке с $\mathfrak{g}_0$ -модулем $\mathfrak{g}_{-1}$ и строим картановское продолжение $\mathfrak{g}_* := (\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_0)_*$, рассматриваемое как *вещественная супералгебра Ли* (определение картановского продолжения и нужных нам его обобщений см. в приложении). Аргументы, применимые к любой G -структуре, а не только почти комплексной, показывают, что препятствия к интегрируемости составляют тензорное поле, значения которого в каждой точке лежат в пространстве

$$H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*). \quad (4)$$

Сам же тензор кривизны явлен коциклом, представляющим нетривиальный класс когомологий $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*)$.

Разберем один пример поподробнее. Пусть на многообразии M в каждом касательном пространстве $T_m M$ задана невырожденная антисимметрическая билинейная форма B_m , а ω – внешняя 2-форма, заданная билинейными формами B_m во всех точках $m \in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Многообразие M с вышеописанной формой ω называется *почти симплектическим*. Если форму ω можно привести к плоскому виду $\sum dp_i \wedge dq_i$ не только в каждой данной точке (что всегда возможно), но и в инфинитезимальной ее окрестности, то многообразие называется *симплектическим*.

Пусть V – пространство, изоморфное пространству $T_m M$, а $\mathfrak{sp}(V)$ – симплектическая алгебра Ли, сохраняющая образ B формы B_m при этом изоморфизме. Как известно из линейной алгебры, форма B задает канонический изоморфизм $V \simeq V^*$, поэтому любому элементу $c \in \text{Hom}(V \wedge V, V)$ можно сопоставить внешнюю 3-форму:

$$C(u, v, w) = B(c(u, v), w) + B(c(v, w), u) + B(c(w, u), v).$$

При отображении $c \mapsto C$, описанном выше, кограницы, т. е. элементы c вида

$$c(u, v) = S(u)v - S(v)u,$$

где $S \in \text{Hom}(V, \mathfrak{sp}(V))$, а $u, v \in V$, переходят в нуль, а препятствие к плоскостности формы ω в точке t есть как раз 3-форма C на пространстве V . Совокупность форм C во всех точках $t \in M$ составляет внешнюю форму $d\omega$ – аналог тензора Римана в почти симплектическом случае. Если $d\omega = 0$, то форму ω можно привести к плоскому виду (теорема Дарбу).

Удобно представлять пространство $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*)$ в виде суммы неприводимых $\mathfrak{g}_0$ -модулей (как это давно сделано для тензора Римана, представленного в виде суммы тензора Вейля, бесследового тензора Риччи и скалярной кривизны) и стенографировать это представление, рассматривая лишь старшие веса соответствующих неприводимых модулей. Такое стенографирование возможно, если комплексификация алгебры $\mathfrak{g}_0$ является полупростой алгеброй Ли или ее центральным расширением, т. е. *редуктивной комплексной алгеброй Ли*. Если редуктивной комплексной алгеброй Ли является четная часть $(\mathfrak{g}_0)_0$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}_0$, то, по крайней мере, можно описать, как склеены неприводимые $\mathfrak{g}_0$ -модули (примеры таких описаний см. в работе [19]).

Любая $\mathbb{Z}$ -градуировка (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}_*$ индуцирует $\mathbb{Z}$ -градуировку (*степенью*) на пространстве $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*)$. Как показано в монографии [9], структурные функции (компоненты тензора кривизны) данной степени определены, лишь если равны нулю структурные функции всех меньших степеней. В теории супергравитации такие условия зануления называются *связями Весса–Зумино* [12].

1.5. Суперструны и комплексные структуры. Начнем с супермногообразий вещественной размерности $2|2m$, снабженных, возможно, дополнительной структурой (такой, например, какую инфинитезимально сохраняют супералгебры Ли контактных векторных полей, т. е. факторы по центру супералгебр Ли Невё–Шварца или Рамона). В теории струн эти супермногообразия обычно называют *римановыми суперповерхностями*. Суперизации простой алгебры Ли векторных полей на окружности (алгебры Витта – фактора алгебры Вирасоро по центру) классифицированы [20]: над $\mathbb{C}$ есть четыре бесконечных серии и несколько исключительных простых супералгебр Ли векторных полей на суперокружности, названных *струнными супералгебрами*. Ровно десять из них отмечены: у них есть нетривиальное центральное расширение, а значит, они особенно интересны с точки зрения возможных физических приложений, поскольку эти центры могут нетривиально действовать на некоторых бесконечномерных суперверсиях пространства Тейхмюллера, параметризующих деформации комплексной структуры [21], [22]. Поэтому необходимо изучить подходящие аналоги тензора Нийенхейса на суперповерхностях, оснащенных одной из структур, которую сохраняют отмеченные струнные супералгебры Ли.

Как и на суперпространствах Минковского, некоторые из этих структур суть *неголономные* распределения; простейшим таким распределением является то, которое задано контактной формой.

1.6. Аналоги тензора кривизны в присутствии неголономного распределения. Напомним определение такого аналога (подробности см. в работе [12]). Прежде всего, чтобы отличать неинтегрируемость распределения $\mathcal{D}$ от неинтегрируемости некоторого тензорного поля $\mathcal{T}$, описываемой полем кривизны $\mathcal{R}$ с учетом наличия распределения $\mathcal{D}$, мы про распределение будем говорить *неголономное*. Пусть $\mathfrak{g}_* := \bigoplus_{i \geq -d} \mathfrak{g}_i$ есть $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра Ли, ассоциированная с фильтрованной алгеброй Ли, сохраняющей распределение и тензорное поле $\mathcal{T}$, интегрируемость (плоскостность) которого мы исследуем. Таким образом, касательное пространство в данной точке рассматриваемого многообразия мы отождествляем с пространством $\mathfrak{g}_- := \bigoplus_{i < 0} \mathfrak{g}_i$. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}_-$ порождена подпространством $\mathfrak{g}_{-1}$, то оно и есть значение неголономного распределения $\mathcal{D}$ в точке, а $\mathfrak{g}_0$ – алгебра Ли, сохраняющая тензор $\mathcal{T}$. Суперизация этого пункта очевидна.

По аналогии с представлением тензора Нийенхайса (а равно и препятствий к плоскостности любых других G -структур) в виде коцикла, представляющего нетривиальный класс из пространства $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*)$, мы даем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Обрезанный тензор кривизны* структуры, заданной тензорным полем $\mathcal{T}$ в присутствии неголономного распределения $\mathcal{D}$, это коцикл, представляющий нетривиальный класс когомологий

$$H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g}_*), \quad \text{где } \mathfrak{g}_- = \bigoplus_{-d \leq i < 0} \mathfrak{g}_i. \quad (5)$$

Пусть $\mathfrak{g}_* := \bigoplus_{i \geq -d} \mathfrak{g}_i$ – простая алгебра Ли, такая что у $\mathfrak{g}_0$ есть центр $\mathfrak{z}$, причем расширение $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g}_0/\mathfrak{z}$ до $\mathfrak{g}_0$ тривиально, т. е. центр – прямое слагаемое. В работе [12] показано, что пространство $H^2(\mathfrak{g}_-; (\mathfrak{g}_-, \tilde{\mathfrak{g}}_0)_*)$ – неголономный аналог пространства значений *тензора Римана* – строго содержит пространство $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g}_*)$ – неголономный аналог пространства значений *тензора Вейля*. Случай алгебры $\mathfrak{g}_0$ (соответственно $\tilde{\mathfrak{g}}_0$) называется *конформным* (соответственно *приведенным*).

1.7. Наши результаты. Мы классифицировали вещественные структуры на конечномерной алгебре (суперструктура не важна) Грассмана $\Lambda_{\mathbb{C}}(s)$ (см. ниже раздел 2). Мы доказали, что хотя антиавтоморфизмы, выделяющие вещественные формы конечномерных комплексных алгебр Грассмана, выглядят совершенно по-разному, все формы, ими выделенные, изоморфны, хотя и не канонически.

Мы описали два типа препятствий: к интегрируемости почти комплексных структур, а также почти J -симметрических и почти Π -симметрических структур, заданных на всем касательном пространстве в данной точке (суперверсии тензора Нийенхайса), и к интегрируемости почти вещественно-комплексных структур, заданных на части нечетного подпространства касательного пространства в данной точке (обрезанные версии тензора Нийенхайса), см. ниже раздел 3.

Препятствия к интегрируемости почти комплексных структур составляют неприводимый $\mathfrak{g}_0$ -модуль, а вот препятствия к интегрируемости почти J -симметрических и почти Π -симметрических структур составляют неразложимый $\mathfrak{g}_0$ -модуль, и мы описали, как он склеен из неприводимых $\mathfrak{g}_0$ -модулей.

Препятствия к интегрируемости почти вещественно-комплексных структур проиллюстрированы на примерах суперпространств Минковского и суперструн. В частности, мы показали, что обрезанный тензор Нийенхайса тождественно равен нулю на 1|1-мерных суперкривых над $\mathbb{C}$ с контактной структурой, как и предсказано Делинем в 1987 г. (см. [23]). Мы показали также, что эта размерность и структура суперкривых – единственные, при которых обрезанный тензор Нийенхайса тождественно равен нулю.

Лоренцева метрика на пространстве Минковского M , подстилающем суперпространство $\mathcal{M}_N$, индуцирована неголономным распределением полной чисто четной коразмерности, поэтому обрезанный тензор Нийенхайса заменяет при $N > 0$ тензор Римана на M .

Пространство Минковского можно рассматривать как фактор супергруппы Пуанкаре по группе Лоренца, а можно – “конформно”, т. е. в терминах твисторов [7]. Мы рассмотрели суперпространство $\mathcal{M}_N$ с позиций суперверсий обоих этих подходов.

Утверждения из раздела 3 получены с помощью пакета программ SuperLie [24] и могут быть доказаны аналитически с помощью техники, изложенной в работе [19].

На многообразии Минковского может быть много разных метрик, различающихся тензором Римана (мерой их неплоскостности). Аналогично, есть много разных супермногообразий Минковского и даже суперструн, они различаются (обрезанными и “обычными”) тензорами Нийенхайса, описанными в теоремах 2–5.

В разделе 4 мы показали, что суперизации понятий кэлерова многообразия возможны четырьмя способами, а также объяснили, что суперизованные объекты могут быть снабжены структурами (почти) вещественно-комплексных супермногообразий. Все эти суперизации являются, по-видимому, новыми понятиями.

1.8. Родственные задачи. Нашим способом можно рассмотреть также нестандартные модели комплексифицированного и компактифицированного суперпространств Минковского, иначе называемых пространствами супертвисторов [7], [25].

Тензор $\mathcal{N}$ неисчерпаем, как атом: Богоявленский недавно отметил [26] его свойства, ранее неизвестные. Можно рассмотреть и суперверсии этих свойств.

Нечетную комплексную структуру (как J , так и Π) можно определить и над $\mathbb{C}$, поэтому почти комплексное супермногообразие может быть снабжено также J - или Π -структурой. Такие “дважды комплексные” супермногообразия встречаются среди комплексных (попросту, над $\mathbb{C}$) суперструн с фактором супералгебры Рамона в качестве супералгебры инфинитезимальных симметрий [13].

2. ИЗОМОРФНОСТЬ ВСЕХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФОРМ КОМПЛЕКСНОЙ АЛГЕБРЫ ГРАССМАНА

Вещественной структурой на алгебре C , заданной над $\mathbb{C}$, называется антилинейный инволютивный автоморфизм, т. е. $\mathbb{R}$ -линейное отображение $\rho: C \rightarrow C$, такое что

$$\rho^2 = \text{id}, \quad \rho(ab) = \rho(a)\rho(b), \quad \rho(za) = \bar{z}\rho(a) \quad (6)$$

при любых $z \in \mathbb{C}$ и $a, b \in C$.

Положим

$$\text{Re}_\rho C = \{a \in C \mid \rho(a) = a\}, \quad \text{Im}_\rho C = \{a \in C \mid \rho(a) = -a\}. \quad (7)$$

Напомним, что *овеществлением* $C^{\mathbb{R}}$ комплексной алгебры C называется та же C , но рассматриваемая над полем $\mathbb{R}$. Ясно, что $\text{Re}_\rho C$ является подалгеброй в овеществлении $C^{\mathbb{R}}$ алгебры C , а также $\text{Im}_\rho C = i \text{Re}_\rho C$, где $C^{\mathbb{R}} = \text{Re}_\rho C \oplus \text{Im}_\rho C$. Подалгебра $\text{Re}_\rho C$ называется *вещественной формой* алгебры C (соответствующей вещественной структуре ρ).

Заметим, что на $C^{\mathbb{R}}$ отображение ρ является автоморфизмом, поэтому если алгебра C содержит единицу, то, как и при любом автоморфизме, $\rho(1) = 1$ и, значит, $1 \in \text{Re}_\rho C$.

2.1. Примеры вещественных структур на алгебре Грассмана $\Lambda_{\mathbb{C}}(n)$.

Пусть $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ – образующие алгебры $G := \Lambda_{\mathbb{C}}(n)$. При $n = 0$ на G есть, очевидно, лишь одна вещественная структура – каноническая.

При $n = 1$ вещественных структур много: ясно, что $\rho(\theta) = \lambda\theta$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Инволютивность отображения ρ означает только, что $\lambda\bar{\lambda} = 1$, т. е. $\lambda = e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$, а соответствующая вещественная форма состоит из элементов вида $a + be^{i\varphi/2}\theta$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

При $n = 2k$ положим $\theta = (\xi, \eta)$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$. Следующие примеры вещественных структур являются самыми распространенными (математики предпочитают первую из них, а физики – вторую):

- 1) $\rho_{\text{bar}}(\theta_j) = e^{i\varphi_j}\theta_j$ (как правило, математики полагают $\varphi_j = 0$ при всех $j = 1, \dots, n$);
- 2) $\rho_{\text{tr}}(\xi_j) = i\eta_j$; $\rho_{\text{tr}}(\eta_j) = -i\xi_j$ при всех $j = 1, \dots, k$ и $i = \sqrt{-1}$.

Очевидно, что можно (а при нечетном n необходимо) составлять смеси этих структур, и кажется, что все они существенно различны, т. е. приводят к неизоморфным вещественным формам. Однако это не так.

ТЕОРЕМА 1. *Все вещественные формы конечномерной алгебры Грассмана изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G := \Lambda_{\mathbb{C}}(n) = \Lambda_{\mathbb{C}}(\theta)$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ – какие-то образующие. Положим $G_k = \bigoplus_{s \geq k} \Lambda^s(\theta)$, $G_0 = \bigoplus_{2s \leq n} \Lambda^{2s}(\theta)$, $G_1 = \bigoplus_{2s-1 \leq n} \Lambda^{2s-1}(\theta)$. При нечетном n введем еще пространство $G_1^- = \bigoplus_{1 \leq 2k-1 < n} \Lambda^{2k-1}$. Пусть ρ – какая-то вещественная структура на алгебре G .

Заметим, что если $U \subset G$ – комплексное линейное подпространство, инвариантное относительно ρ , т. е. $\rho(U) = U$, то U , как и G , разлагается в сумму вещественной и чисто мнимой форм: $U^{\mathbb{R}} = \text{Re}_\rho U \oplus \text{Im}_\rho U$. Такое же разложение есть и на факторпространстве: $(G/U)^{\mathbb{R}} = \text{Re}_\rho G/U \oplus \text{Im}_\rho G/U$.

Для естественной (по степени образующих, считаем, что $\deg \theta_i = 1$ при всех i) фильтрации алгебры Грассмана

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n$$

положим $V = G_1/G_2$, и пусть $\pi: G_1 \rightarrow V$ – естественная проекция.

Заметим, что $G = \mathbb{C} \cdot 1 \oplus G_1$ как линейное пространство и $G_1 \subset G_1$.

Заметим также, что у G_1 есть инвариантное описание: это идеал, состоящий из всех нильпотентных элементов алгебры G . Поэтому $\rho(G_1) = G_1$. Но тогда и $\rho(G_k) = G_k$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Если n четно, то подпространство $G_{\bar{0}}$ тоже имеет инвариантное описание: действительно, центр Z алгебры G есть

$$Z = \begin{cases} G_{\bar{0}} & \text{при четном } n, \\ G_{\bar{0}} \oplus G_n & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

В любом случае $\rho(Z) = Z$ и $\rho(Z \cap G_2) = Z \cap G_2$.

Итак, пусть B – вещественная форма алгебры G , соответствующая вещественной структуре ρ , а $B_1 = B \cap G_1$ – вещественная форма идеала G_1 . Тогда $\pi(B_1)$ – вещественная форма пространства V и, значит, $\dim_{\mathbb{R}} \pi(B_1) = n$. Пусть $x_1, \dots, x_n \in B_1$ таковы, что $\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)$ образуют базис пространства V . Ясно, что $x_1, \dots, x_n$ – образующие и алгебры B над $\mathbb{R}$, и алгебры G над $\mathbb{C}$. Разложим каждое x_k по подпространствам $Z \cap G_2$ и $G_{\bar{1}}$, если n четно, и по подпространствам $Z \cap G_2$ и $G_{\bar{1}}^-$, если n нечетно: $x_k = y_k + z_k$, где $y_k \in G_{\bar{1}}$, если n четно, $y_k \in G_{\bar{1}}^-$, если n нечетно; $z_k \in Z \cap G_2$.

Поскольку $z_k \in G_2$, проекции элементов x_k и y_k совпадают: $\pi(y_k) = \pi(x_k)$. Таким образом, элементы $y_1, \dots, y_n$ тоже являются образующими (над $\mathbb{C}$) алгебры G , причем антикоммутирующими, так как они лежат в $G_{\bar{1}}$. Значит, такими же являются и их образы $\rho(y_1), \dots, \rho(y_n)$.

Заметим теперь, что раз $x_k \in B$, то $\rho(x_k) = x_k$, т. е. $\rho(y_k) + \rho(z_k) = y_k + z_k$. Но $\rho(z_k) \in Z \cap G_2$, откуда получаем, что $\rho(y_k) = y_k + z'_k$, где $z'_k \in Z \cap G_2$. То, что элементы $\rho(y_1), \dots, \rho(y_n)$ антикоммутируют, означает, что для всех k, l выполнены следующие равенства:

$$y_k z'_l + z'_k y_l + z'_k z'_l = 0 \implies y_k z'_l + z'_k y_l = 0 \quad \text{и} \quad z'_k z'_l = 0. \quad (8)$$

Второе и третье равенства получены в силу того, что первые два слагаемых в первом равенстве лежат в пространстве $G_{\bar{1}}$, а третье – в $G_{\bar{0}}$.

Рассмотрим теперь элементы $t_k = (y_k + \rho(y_k))/2 = y_k + z'_k/2 \in B$. Поскольку $\pi(t_k) = \pi(y_k)$, элементы t_k являются образующими алгебры G над $\mathbb{C}$ и алгебры B над $\mathbb{R}$, а в силу равенств (8) они антикоммутируют. Утверждение теоремы вытекает теперь из универсальности алгебры Грассмана, как алгебры с единицей и n антикоммутирующими образующими. Универсальность алгебры G понимается в том смысле, что любая другая алгебра с n антикоммутирующими образующими является фактором алгебры G (просто потому, что по определению в алгебре Грассмана никаких других соотношений нет). А мы как раз и получили n антикоммутирующих образующих алгебры B над $\mathbb{R}$, и из соображений размерности никаких других соотношений, не следующих из антикоммутативности, между ними быть не может. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Элементы x_i не обязаны, вообще говоря, быть нечетными. Например, можно породить вещественную форму алгебры $\Lambda_{\mathbb{C}}(2)$ элементами $\theta_1 + a\theta_1\theta_2$ и $\theta_2 + b\theta_1\theta_2$, где a, b – любые комплексные числа. Конечно, если эти числа действительные, то от них можно избавиться просто потому, что $\theta_1\theta_2$ лежит в той же вещественной форме. Но от мнимых частей этих чисел избавиться нельзя. При $n > 2$ можно придумать и более замысловатые примеры.

3. ПРЕПЯТСТВИЯ К ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫХ И ПОЧТИ ВЕЩЕСТВЕННО-КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУР

3.1. Ревизия классических результатов. Почти комплексное $2n|2m$ -мерное супермногообразие. Известно, что почти комплексная структура, заданная на вещественной поверхности, интегрируема (см., например, работу [14]). Поищем, нет ли еще исключительных случаев, когда почти комплексная структура всегда комплексна, кроме суперразмерности $2|0$ (это важно для приложений в теории суперструн), и исследуем, можно ли разложить пространство значений тензора Нийенхейса на неприводимые $\mathfrak{gl}(n|m; \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ -модули (в работе [19] такое исследование было проведено для некоторых супераналогов тензора Римана; обнаружено, что полной приводимости нет, и описано, как именно (довольно замысловато) склеены неприводимые компоненты).

В терминах п. 1.4.3 мы рассматриваем супералгебру Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(n|m; \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$, состоящую из суперматриц нестандартного формата вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $A, B \in \mathfrak{gl}(n|m; \mathbb{R})$ и $A + iB \in \mathfrak{gl}(n|m; \mathbb{C})$, а $i = \sqrt{-1}$, и тавтологический $\mathfrak{g}_0$ -модуль $\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^{2n|2m}$ со следующим форматом своих базисных векторов (четные | нечетные | четные | нечетные):

$$\partial_1, \dots, \partial_n \mid \partial_{n+1}, \dots, \partial_{n+m} \mid \partial_{n+m+1}, \dots, \partial_{2n+m} \mid \partial_{2n+m+1}, \dots, \partial_{2n+2m}.$$

Классические результаты на многообразиях утверждают, что тензорное поле $\mathcal{N}$ (см. (1)) – единственное препятствие к интегрируемости почти комплексной структуры; более того, на поверхностях размерности 2 оно тождественно равно нулю. Согласно работам [17], [18] на супермногообразиях тензорное поле $\mathcal{N}$ тоже единственное препятствие к интегрируемости почти комплексной структуры. Согласно работе [17] единственное препятствие к интегрируемости почти J -симметрии – тензорное поле $\mathcal{N}_J$.

Уточним эти утверждения. При $n + m > 1$ мы рассматриваем естественное деление корневых векторов из $\mathfrak{g}_0$ на положительные и отрицательные, причем положительны те, что расположены над главными диагоналями матриц A и B .

ТЕОРЕМА 2. *Коциклы младшего веса, представляющие элементы пространства $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*)$ относительно $\mathfrak{g}_0$ -действия, где $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(2n|2m; \mathbb{R})$, а $\mathfrak{g}_{-1}$ – тавтологический $\mathfrak{g}_0$ -модуль, все имеют степень 1 и следующий вид:*

$$\begin{aligned} n = 1|m = 0: & \quad 0; \\ n > 1|m = 0: & \quad \partial_1 \otimes (\partial_{n-1}^* \wedge \partial_{2n}^* - \partial_n^* \wedge \partial_{2n-1}^*), \quad \partial_{n+1} \otimes (\partial_{n-1}^* \wedge \partial_{2n}^* - \partial_n^* \wedge \partial_{2n-1}^*); \\ n = 0|m \geq 1: & \quad \partial_1 \otimes (\partial_m^* \wedge \partial_{2m}^*), \quad \partial_1 \otimes (\partial_m^*)^2; \\ n > 0|m > 0: & \quad \partial_1 \otimes (\partial_{n+m}^*)^{\wedge 2}, \quad \partial_1 \otimes (\partial_{n+m}^* \wedge \partial_{2n+2m}^*). \end{aligned} \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $n|m = 0|1$ на коциклы (10) натягивается все пространство $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*)$, а не только пространство векторов младшего веса.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку в пространстве $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*)$ два $\mathfrak{g}_0$ -младших весовых вектора (10), читатель, знакомый с представлениями простых алгебр Ли только над $\mathbb{C}$, может решить, что тензор Нийенхейса распадается на две неприводимые компоненты. Однако наше основное поле – $\mathbb{R}$: один из векторов младшего веса получается из другого с помощью оператора умножения на i , представленного матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1_{n+m} \\ -1_{n+m} & 0 \end{pmatrix}$, и поэтому $\mathfrak{g}_0$ -модуль $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*)$ неприводим, он является овеествлением модуля, неприводимого над $\mathbb{C}$.

3.2. Почти J -симметричные и почти Π -симметричные супермногообразия над любым основным полем $\mathbb{K}$. Пусть $A, B \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{K})$, причем $p(A) = \bar{0}$, $p(B) = \bar{1}$, а $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{q}_\Pi(n; \mathbb{K})$ (или $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{q}_J(n; \mathbb{K})$) – супералгебра Ли, состоящая из суперматриц вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad \text{если } \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{q}_\Pi(n; \mathbb{K}); \quad \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}, \quad \text{если } \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{q}_J(n; \mathbb{K}); \quad (11)$$

$\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{K}^{n|n}$ – тавтологический $\mathfrak{g}_0$ -модуль со следующими базисными векторами в стандартном формате (четные | нечетные):

$$\partial_1, \dots, \partial_n \mid \partial_{n+1}, \dots, \partial_{2n}.$$

Мы рассматриваем естественное деление весовых векторов на положительные (отрицательные), расположенные над (под) главными диагоналями матриц A и B (11). Пусть $\mathfrak{g}_* = (\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*$.

ТЕОРЕМА 3. Все коциклы, представляющие элементы из $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*)$, имеют степень 2. Как $\mathfrak{g}_0$ -модуль пространство $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*)$ неразложимо с $(\mathfrak{g}_0)_{\bar{0}}$ -старшими весовыми векторами следующих весов:

$$\begin{aligned} n = 1: & \text{ нулевой модуль;} \\ n = 2: & (2, 0) \text{ и } (1, 1), \text{ каждый кратности } 2|2 \text{ (два четных вектора} \\ & \text{и два нечетных); содержит подмодуль с } (\mathfrak{g}_0)_{\bar{0}}\text{-старшими} \\ & \text{весами } (2, 0) \text{ и } (1, 1), \text{ каждый кратности } 1|1; \\ n \geq 3: & \varphi_1 := (2, 1, 0, \dots, 0, -1), \quad \varphi_2 := (2, 0, \dots, 0) \text{ и } \varphi_3 := (1, 1, 0, \dots, 0), \\ & \text{каждый кратности } 2|2; \text{ содержит подмодуль} \\ & \text{с } (\mathfrak{g}_0)_{\bar{0}}\text{-старшими весами } \varphi_1 \text{ кратности } 2|2, \\ & \text{а также } \varphi_2 \text{ и } \varphi_3, \text{ каждый кратности } 1|1, \text{ содержащий,} \\ & \text{в свою очередь, подмодуль с } (\mathfrak{g}_0)_{\bar{0}}\text{-старшими весами } \varphi_2 \text{ и } \varphi_3, \\ & \text{каждый кратности } 1|1. \end{aligned} \quad (12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В теореме 3 нам удалось кратко записать ответ, потому что суперразмерность пространства вакуумных (в нашем случае – младшего веса) векторов каждого неприводимого $\mathfrak{q}_\Pi(n; \mathbb{K})$ - или $\mathfrak{q}_J(n; \mathbb{K})$ -модуля имеет вид $k|k$ (за исключением тривиальных модулей $\mathbb{K}$ и $\Pi(\mathbb{K})$, суперразмерность которых равна $1|0$ и $0|1$ соответственно). Поэтому достаточно описать лишь половину векторов младшего веса, скажем, только четные.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Как в теореме 3, так и в теореме 4 явный ответ вряд ли кому-либо нужен, важно лишь знать, равен тензор Нийенхейса нулю тождественно или нет, а если он состоит из нескольких компонент, то что означает зануление каких-либо из них (сравните с уравнениями Эйнштейна – условием зануления некоторых компонент тензора Римана).

3.3. N -расширенные суперпространства Минковского $\mathcal{M}_N$. Обычно математики представляют комплексифицированные супермногообразия Минковского в виде однородных суперпространств $\mathcal{M}_N^{\mathbb{C}} = G_N^{\mathbb{C}}/P_N^{\mathbb{C}}$, где $G_N^{\mathbb{C}}$ и $P_N^{\mathbb{C}}$ – некоторые комплексные супергруппы. В статьях же и книгах, написанных физиками, приводится фактически лишь структура касательного пространства $T_m\mathcal{M}_N$ в точке m суперпространства Минковского $\mathcal{M}_N$ и супералгебра Ли, действующая на пространстве $T_m\mathcal{M}_N$ (см., например, книгу [27] и библиографию в ней).

На уровне вещественных супералгебр Ли, а именно если $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G_N)$ и $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P_N)$, имеем следующее: супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из суперматриц вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ Q & B & 0 \\ T & -\bar{Q}^t & -\bar{A}^t \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $A \in \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$, $Q \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times N)$, $T = \bar{T}^t$, $B \in \mathfrak{gl}(N; \mathbb{C})$, а черта означает поэлементное применение комплексного сопряжения; $\mathbb{Z}$ -градуировка блочно-диагональная ($\deg A = \deg B = 0$, $\deg Q = -1$, $\deg T = -2$), а четность определена как $\deg \bmod 2$. Пусть супералгебра Ли $\mathfrak{p}$ состоит из суперматриц степени ≥ 0 . Тогда касательное пространство к любой фиксированной точке супермногообразия $\mathcal{M}_N$ натянуто над $\mathbb{R}$ на матрицы T (касательное пространство к пространству Минковского) и нечетные матрицы Q .

Наличие неголономного распределения на $\mathcal{M}_N$ очевидно²⁾: подпространства касательных пространств, составляющие его, натянуты на векторы, реализованные парами матриц Q и $-\bar{Q}^t$, а суперкоммутаторы таких элементов являются линейной комбинацией не их самих, а матриц T .

С неменьшим правом мы можем рассмотреть максимальную группу G_N симметрий супермногообразия $\mathcal{M}_N$, т. е. предположить, что супералгебра Ли $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G_N)$ является картановским продолжением $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_* := (\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)_*$, где супералгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \text{der}_0(\mathfrak{g}_-)$ состоит из дифференцирований супералгебры Ли $\mathfrak{g}_-$, сохраняющих ее градуировку. Положим $\mathfrak{p} := \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i$. Такой взгляд на $\mathcal{M}_N$ вместе с естественным (особенно после успехов твисторных моделей) желанием, чтобы результат обобщенного картановского продолжения или его комплексификация был бы простой супералгеброй Ли, налагают ограничения на матрицы B и A , связывая группу внутренних симметрий и группу Лоренца. А именно, указанное желание удовлетворено, если в реализации супералгебры Ли суперматрицами вида (13) мы положим

$$B \in \mathfrak{u}(N), \quad \text{tr } B = \text{tr}(A - \bar{A}^t), \quad (14)$$

где $A \in \mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})$. Таким образом, желание иметь в качестве результата обобщенного картановского продолжения (см. приложение) не супералгебру Ли суперматриц вида (13), а простую супералгебру Ли с той же отрицательной частью, что и

²⁾Напомним критерий интегрируемости распределения – теорему Фробениуса: распределение интегрируемо, если и только если сечения распределения образуют под(супер)алгебру Ли относительно коммутатора векторных полей.

супералгебра Ли (13), заставляет нас рассмотреть на пространстве Минковского, подстилающем супермногообразие $\mathcal{M}_N$, не метрику Лоренца, которую сохраняют элементы $A \in \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{o}(3, 1)$, а *конформную* структуру, которая признает лишь конформный класс метрики, т.е. разрешает умножать метрику на ненулевые константы. Тогда супералгебра Ли $\mathfrak{g}_* = (\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)_*$ состоит из суперматриц вида

$$\begin{pmatrix} A & -\bar{R}^t & U \\ Q & B & R \\ T & -\bar{Q}^t & -\bar{A}^t \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где Q, T – как в формуле (13), $B = -\bar{B}^t$, $R \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times N)$, $U = \bar{U}^t$, $\text{tr } B = \text{tr}(A - \bar{A}^t)$, $A \in \mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть суперматричный формат суперматриц (15) нестандартный: $2|N|2$, а $N = 1$. Пусть $X_{i,j}$ означает (i, j) -ю матричную единицу одной из матриц $X = A, B, T$ или Q .

1. “Конформный” случай. Супералгебра Ли $\mathfrak{g}_* := (\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)_*$ состоит из суперматриц вида (15).

Пусть верхний индекс означает степень коцикла s , а нижний индекс – номер базисного коцикла, представляющего нетривиальный класс когомологий. Тогда коциклы старшего веса, представляющие элементы базиса пространства $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*)$, следующие:

$$c_1^0 = T_{2,2} \otimes (Q_{1,1}^*)^{\wedge 2}, \quad c_2^0 = T_{2,2} \otimes Q_{1,1}^* \wedge iQ_{1,1}^*.$$

В степенях 1 и 2 когомологии равны нулю.

В степени 3 (нумерация коциклов приведена в соответствии “приведенному” случаю)

$$\begin{aligned} c_8^3 = & 4Q_{1,2} \otimes (T_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) + i(A_{1,1} - A_{2,2}) \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge T_{1,1}^*) + \\ & + i(A_{1,1} + A_{2,2}) \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge T_{1,1}^*) - 4A_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) + \\ & + 2A_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) + 4A_{1,2} \otimes (Q_{1,2}^* \wedge T_{1,1}^*) + \\ & + 2iA_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) - 2iR_{1,1} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge iQ_{1,1}^*) + \\ & + 2R_{1,1} \otimes (iQ_{1,1}^*)^{\wedge 2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_9^3 = & 4iQ_{1,2} \otimes (T_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) - i(A_{1,1} - A_{2,2}) \otimes (Q_{1,1}^* \wedge T_{1,1}^*) - \\ & - i(A_{1,1} + A_{2,2}) \otimes (Q_{1,1}^* \wedge T_{1,1}^*) - 2A_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) - \\ & - 4A_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) + 4A_{1,2} \otimes (iQ_{1,2}^* \wedge T_{1,1}^*) - \\ & - 2iA_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) + 2iR_{1,1} \otimes (Q_{1,1}^*)^{\wedge 2} - \\ & - 2R_{1,1} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge iQ_{1,1}^*). \end{aligned}$$

2. “Приведенный” случай. Все, как и выше, но $\text{tr } B = 0$ и $A \in \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$. В этом случае $\mathfrak{g}_1 = 0$. Тогда коциклы старшего веса, представляющие элементы базиса пространства $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \tilde{\mathfrak{g}}_*)$, такие же, как и в “конформном” случае, за следующими исключениями.

В степени 1 появляются коциклы

$$\begin{aligned} c_3^1 = & -Q_{1,1} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge iQ_{1,1}^*) + iQ_{1,1} \otimes (Q_{1,1}^*)^{\wedge 2} - Q_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge iQ_{1,2}^*) + \\ & + iQ_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge Q_{1,2}^*), \end{aligned}$$

$$c_4^1 = -Q_{1,1} \otimes (iQ_{1,1}^*)^{\wedge 2} + iQ_{1,1} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge iQ_{1,1}^*) - Q_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge iQ_{1,2}^*) + \\ + iQ_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge Q_{1,2}^*).$$

В степени 2 появляются коциклы

$$c_5^2 = -i(A_{1,1} - A_{2,2}) \otimes (Q_{1,1}^*)^{\wedge 2} - i(A_{1,1} - A_{2,2}) \otimes (iQ_{1,1}^*)^{\wedge 2} + \\ + 2A_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge iQ_{1,2}^*) - 2A_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge Q_{1,2}^*) - \\ - 2iA_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge Q_{1,2}^*) - 2iA_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge iQ_{1,2}^*) - \\ - Q_{1,1} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge T_{1,1}^*) + iQ_{1,1} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge T_{1,1}^*) + \\ + 2Q_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) + 2Q_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge m_{13}^*) - \\ - 3Q_{1,2} \otimes (iQ_{1,2}^* \wedge T_{1,1}^*) - 2iQ_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) + \\ + 2iQ_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) + 3iQ_{1,2} \otimes (Q_{1,2}^* \wedge T_{1,1}^*), \\ c_6^2 = (A_{1,1} - A_{2,2}) \otimes (Q_{1,1}^* \wedge Q_{1,2}^*) - (A_{1,1} - A_{2,2}) \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge iQ_{1,2}^*) + \\ + i(A_{1,1} - A_{2,2}) \otimes (Q_{1,1}^* \wedge iQ_{1,2}^*) + i(A_{1,1} - A_{2,2}) \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge Q_{1,2}^*) + \\ + A_{1,2} \otimes (Q_{1,2}^*)^{\wedge 2} - A_{1,2} \otimes (iQ_{1,2}^*)^{\wedge 2} + 2iA_{1,2} \otimes (Q_{1,2}^* \wedge iQ_{1,2}^*) - \\ - A_{2,1} \otimes (Q_{1,1}^*)^{\wedge 2} + A_{2,1} \otimes (iQ_{1,1}^*)^{\wedge 2} - 2iA_{2,1} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge iQ_{1,1}^*) + \\ + Q_{1,1} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) - Q_{1,1} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) - \\ - Q_{1,1} \otimes (Q_{1,2}^* \wedge T_{1,1}^*) - iQ_{1,1} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) - \\ - iQ_{1,1} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) + iQ_{1,1} \otimes (iQ_{1,2}^* \wedge T_{1,1}^*) + \\ + Q_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge T_{2,2}^*) - Q_{1,2} \otimes (Q_{1,2}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) - \\ - Q_{1,2} \otimes (iQ_{1,2}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) - iQ_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge T_{2,2}^*) - \\ - iQ_{1,2} \otimes (Q_{1,2}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) + iQ_{1,2} \otimes (iQ_{1,2}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*), \\ c_7^2 = -(A_{1,1} - A_{2,2}) \otimes (Q_{1,1}^* \wedge iQ_{1,2}^*) - (A_{1,1} - A_{2,2}) \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge Q_{1,2}^*) + \\ + i(A_{1,1} - A_{2,2}) \otimes (Q_{1,1}^* \wedge Q_{1,2}^*) - i(A_{1,1} - A_{2,2}) \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge iQ_{1,2}^*) - \\ - 2A_{1,2} \otimes (Q_{1,2}^* \wedge iQ_{1,2}^*) + iA_{1,2} \otimes (Q_{1,2}^*)^{\wedge 2} - iA_{1,2} \otimes (iQ_{1,2}^*)^{\wedge 2} + \\ + 2A_{2,1} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge iQ_{1,1}^*) - iA_{2,1} \otimes (Q_{1,1}^*)^{\wedge 2} + \\ + iA_{2,1} \otimes (iQ_{1,1}^*)^{\wedge 2} - Q_{1,1} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) - \\ - Q_{1,1} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) + Q_{1,1} \otimes (iQ_{1,2}^* \wedge T_{1,1}^*) - \\ - iQ_{1,1} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) + iQ_{1,1} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) + \\ + iQ_{1,1} \otimes (Q_{1,2}^* \wedge T_{1,1}^*) - Q_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge T_{2,2}^*) - \\ - Q_{1,2} \otimes (Q_{1,2}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) + Q_{1,2} \otimes (iQ_{1,2}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) - \\ - iQ_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge T_{2,2}^*) + iQ_{1,2} \otimes (Q_{1,2}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) + \\ + Q_{1,2} \otimes (iQ_{1,2}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*).$$

В степени 3 коциклы принимают вид

$$c_8^3 = -A_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) - A_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) + \\ + A_{1,2} \otimes (iQ_{1,2}^* \wedge T_{1,1}^*) - iA_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) +$$

$$\begin{aligned}
& + iA_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) + iA_{1,2} \otimes (Q_{1,2}^* \wedge T_{1,1}^*) + \\
& + Q_{1,2} \otimes (T_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) + iQ_{1,2} \otimes (T_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*), \\
c_9^3 = & A_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) - A_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) - \\
& - A_{1,2} \otimes (Q_{1,2}^* \wedge T_{1,1}^*) - iA_{1,2} \otimes (Q_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*) - \\
& - iA_{1,2} \otimes (iQ_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) + iA_{1,2} \otimes (iQ_{1,2}^* \wedge T_{1,1}^*) - \\
& - Q_{1,2} \otimes (T_{1,1}^* \wedge (T_{1,2} + T_{2,1})^*) + iQ_{1,2} \otimes (T_{1,1}^* \wedge i(T_{1,2} - T_{2,1})^*).
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Все коциклы, кроме c_5 , появляются парами, члены которых отличаются умножением на i (см. замечание 3), так что после комплексификации неприводимый модуль, порожденный любым коциклом из пары, распадается в прямую сумму двух неприводимых модулей, коцикл же c_5 соответствует вещественному $\mathfrak{g}_0$ -модулю, остающемуся неприводимым и после комплексификации.

3.4. Супермногообразия Минковского $\mathcal{M}_N$ при $N > 1$ и в разных суперматричных форматах. Переходя к $N > 1$, удобно комплексифицировать $\mathfrak{g}_* = (\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*$ и рассматривать в этом $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ -модуле $H^2(\mathfrak{g}_{-1}^{\mathbb{C}}; \mathfrak{g}_*^{\mathbb{C}})$ лишь векторы старшего веса. Имеем $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_1(2) \oplus \mathfrak{gl}(N) \oplus \mathfrak{gl}_2(2))$, где индексы введены, чтобы различать копии алгебры Ли $\mathfrak{gl}(2)$, а оператор $\mathfrak{s}(\cdot)$ выделяет бессуперследовую часть аргумента. Обозначим матрицы из $\mathfrak{gl}_2(2)$ буквами C , чтобы отличить их от матриц $A \in \mathfrak{gl}_1(2)$, и аналогично пусть Q и $S := \bar{Q}^t$, где теперь черта – не комплексное сопряжение, а просто мушка для украшения (как и верхний индекс t), суть комплексные и независимые друг от друга векторы. Элементы T – не эрмитовы матрицы, как в формулах (13) и (15), а элементы из $\mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})$; условие $\text{tr } B = \text{tr}(A - \bar{A}^t)$ превращается в $\text{tr } B = \text{tr}(A + C)$. Найдя векторы старшего веса в комплексном модуле над алгеброй Ли $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$, мы должны проверить, какие из них являются комплексификацией уже комплексных представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ (их надо искать среди представлений кратности 2), а какие суть комплексификации вещественных представлений (их кратности равны 1).

В работе [11] вычисление когомологий $H^2(\mathfrak{g}_{-}; \mathfrak{g}_*)$ проведено для $\mathfrak{g}_* = \mathfrak{sl}(4|N)$, реализованной разными суперматричными форматами ($4|N$, $2|N|2$ и некоторыми другими) для $N = 1, 2, 4$ и 8 как для “конформного”, так и для “приведенного” случаев. Кроме того, вычисления в фиксированном формате суперматриц проделаны также и для нескольких типов параболических подалгебр $\mathfrak{p}$, меньших (при $N > 1$), чем те, что мы рассмотрели при $N = 1$, т. е. “все матрицы над QS -диагональю”. Такие меньшие подалгебры $\mathfrak{p}$ выбраны так, чтобы компоненты неголономного тензора кривизны удовлетворяли “принципу соответствия”, т. е. при выкидывании из них всех нечетных компонент они содержали бы тензор Риччи, входящий в уравнения Эйнштейна на подстилающем пространстве Минковского.

3.5. Интегрируемость почти комплексных структур $2|2n$ -мерных вещественных суперповерхностей с дополнительной структурой. Изучая почти комплексную структуру (сохраняемую (супер)алгеброй Ли $\text{aut}(J)$) в присутствии какой-либо еще структуры (тензорного поля или распределения), которую в данной точке сохраняет (супер)алгебра Ли $\mathfrak{g}_*$, мы должны заменить $\mathfrak{g}_*$ в формулах (4) и (5) на обобщенное картановское продолжение пары $(\mathfrak{g}_{-}; \mathfrak{h}_0)$, где $\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{g}_0 \cap \text{aut}(J)$. Пусть $A + Bi \in \mathfrak{g}_0$ – разложение в сумму вещественной и мнимой частей. Тогда суперматрицы из $\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{g}_0 \cap \text{aut}(J)$ имеют вид (9), где $A + Bi \in \mathfrak{g}_0$. Рассмотрим суперструны

с разными дополнительными структурами. Опишем супералгебры Ли векторных полей над $\mathbb{C}$, инфинитезимально сохраняющие эти дополнительные структуры. Общая и бездивергентная супералгебры Ли (супералгебра Ли $\mathbf{vect}(m|n)$ ничего не сохраняет, а $\mathbf{svect}(m|n)$ сохраняет элемент объема) суть

$$\mathbf{vect}(m|n) := \mathbf{der} \mathbb{C}[x, \theta] = \left\{ \sum f_i \partial_{x_i} + \sum g_j \partial_{\theta_j} \mid f_i, g_j \in \mathbb{C}[x, \theta] \right\},$$

где $x = (x_1, \dots, x_m)$ – четные переменные, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ – нечетные переменные;

$$\mathbf{svect}(m|n) := \left\{ \sum f_i \partial_{x_i} + \sum g_j \partial_{\theta_j} \mid \sum \partial_{x_i}(f_i) + \sum (-1)^{p(g_j)} \partial_{\theta_j}(g_j) = 0 \right\}.$$

Супералгебра Ли контактных векторных полей $\mathfrak{k}(2n+1|m)$ сохраняет распределение, заданное нечетной формой

$$\alpha_1 = dt - \sum_i (p_i dq_i - q_i dp_i) - \sum_j (\xi_j d\eta_j + \eta_j d\xi_j) + \begin{cases} 0 & \text{при четном } m, \\ \theta d\theta & \text{при нечетном } m; \end{cases}$$

здесь $t, p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n)$ – четные переменные, а $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k), \eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$, где $2k = m$ при четном m , и θ (при нечетном m) – нечетные переменные. Положим

$$K_f = (2 - E)(f) \frac{\partial}{\partial t} - H_f + \frac{\partial f}{\partial \theta} E \quad (16)$$

при любой

$$f \in \begin{cases} \mathbb{C}[t, p, q, \xi, \eta] & \text{при четном } m, \\ \mathbb{C}[t, p, q, \xi, \eta, \theta] & \text{при нечетном } m, \end{cases}$$

где $E = \sum_i y_i \partial / \partial y_i$ (здесь переменные y_i – все, кроме t) есть оператор Эйлера, а H_f – гамильтоново векторное поле с гамильтонианом f :

$$H_f = \sum_{i \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) - (-1)^{p(f)} \sum_{j \leq k} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial \eta_j} + \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) + \begin{cases} 0 & \text{при четном } m, \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} & \text{при нечетном } m. \end{cases} \quad (17)$$

Аналогично супералгебра Ли $\mathfrak{m}(n|n+1)$ сохраняет распределение, заданное четной формой

$$\alpha_0 = d\tau + \sum_j (\xi_j dq_j + q_j d\xi_j),$$

где $q = (q_1, \dots, q_n)$ – четные переменные, а $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и τ – нечетные переменные. Для любой функции $f \in \mathbb{C}[q, \xi, \tau]$ положим

$$M_f = (2 - E)(f) \frac{\partial}{\partial \tau} - L_e f - (-1)^{p(f)} \frac{\partial f}{\partial \tau} E, \quad (18)$$

где $E = \sum_i y_i \partial / \partial y_i$ (здесь переменные y_i – все, кроме τ), а

$$L_e f = \sum_{i \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} + (-1)^{p(f)} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right). \quad (19)$$

Пусть L_D – производная Ли вдоль векторного поля D . Поскольку

$$\begin{aligned} L_{K_f}(\alpha_1) &= 2 \frac{\partial f}{\partial t} \alpha_1 = K_1(f) \alpha_1, \\ L_{M_f}(\alpha_0) &= -(-1)^{p(f)} 2 \frac{\partial f}{\partial \tau} \alpha_0 = -(-1)^{p(f)} M_1(f) \alpha_0, \end{aligned} \quad (20)$$

то $K_f \in \mathfrak{k}(2n+1|m)$ и $M_f \in \mathfrak{m}(n)$. Нетрудно показать, что

$$\mathfrak{k}(2n+1|m) = \text{Span} \left\{ K_f \mid f \in \begin{cases} \mathbb{C}[t, p, q, \xi, \eta] & \text{при четном } m, \\ \mathbb{C}[t, p, q, \xi, \eta, \theta] & \text{при нечетном } m \end{cases} \right\}$$

и $\mathfrak{m}(n) = \text{Span}\{M_f \mid f \in \mathbb{C}[q, \xi, \tau]\}$.

Мы рассмотрим эти векторные супералгебры Ли $\mathfrak{g}_* = \oplus \mathfrak{g}_i$ со стандартными $\mathbb{Z}$ -градуировками, в которых степени всех переменных, кроме t и τ , равны 1, а $\deg t = \deg \tau = 2$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathfrak{g}_*$ – простые векторные супералгебры Ли с полиномиальными коэффициентами в стандартной градуировке, соответствующие выделенным простым струнным супералгебрам Ли (коэффициенты которых – ряды Лорана). Тогда коциклы (старшего веса относительно $\mathfrak{g}_0$, когда это осмысленно) представляют базисные элементы пространства $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g}_*)$:

$\text{vect}(1|n)^{\mathbb{R}} \subset \text{vect}(2|2n; \mathbb{R})$ при $n = 1, 2$ – уже рассмотрены в теореме 2;

$\text{svect}(1|2)^{\mathbb{R}} \subset \text{vect}(2|4; \mathbb{R})$ – коциклы старшего относительно $\mathfrak{g}_0$ -действия веса, представляющие элементы из $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_*)$, где $\mathfrak{g}_* = \text{svect}(1|2)^{\mathbb{R}}$, суть те же, что и для $\text{vect}(1|2)^{\mathbb{R}}$, и дополнительно

$$\begin{aligned} c_3^1 &= \partial_1 \otimes (\partial_4^* \wedge \partial_6^* - \partial_1^* \wedge \partial_3^*) + \partial_2 \otimes (\partial_2^* \wedge \partial_3^* + \partial_5^* \wedge \partial_6^*) + \partial_3 \otimes ((\partial_3^*)^{\wedge 2} + (\partial_6^*)^{\wedge 2}) + \\ &\quad + \partial_4 \otimes (\partial_1^* \wedge \partial_6^* - \partial_3^* \wedge \partial_4^*) + \partial_5 \otimes (\partial_3^* \wedge \partial_5^* - \partial_2^* \wedge \partial_6^*), \\ c_4^1 &= \partial_1 \otimes \partial_3^* \wedge \partial_4^* - \partial_2 \otimes \partial_3^* \wedge \partial_5^* - \partial_3 \otimes \partial_3^* \wedge \partial_6^* - \partial_4 \otimes \partial_1^* \wedge \partial_3^* + \\ &\quad + \partial_5 \otimes \partial_2^* \wedge \partial_3^* + \partial_6 \otimes (\partial_3^*)^{\wedge 2}, \\ c_5^1 &= \partial_1 \otimes \partial_4^* \wedge \partial_6^* - \partial_2 \otimes \partial_5^* \wedge \partial_6^* - \partial_3 \otimes (\partial_6^*)^{\wedge 2} - \partial_4 \otimes \partial_1^* \wedge \partial_6^* + \\ &\quad + \partial_5 \otimes \partial_2^* \wedge \partial_6^* + \partial_6 \otimes \partial_3^* \wedge \partial_6^*, \\ c_6^1 &= -\partial_1 \otimes \partial_1^* \wedge \partial_6^* + \partial_2 \otimes \partial_2^* \wedge \partial_6^* + \partial_3 \otimes \partial_3^* \wedge \partial_6^* - \partial_4 \otimes \partial_4^* \wedge \partial_6^* + \\ &\quad + \partial_5 \otimes \partial_5^* \wedge \partial_6^* + \partial_6 \otimes (\partial_6^*)^{\wedge 2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для $\mathfrak{k}(1|1)^{\mathbb{R}} \subset \text{vect}(2|2; \mathbb{R})$ мы имеем

$$\mathfrak{g}_- = \text{Span}(K_1, iK_1, K_\theta, iK_\theta), \quad \mathfrak{g}_0 = \text{Span}(K_t, iK_t), \quad H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g}_*) = 0.$$

Для $\mathfrak{k}(1|n)^{\mathbb{R}} \subset \text{vect}(2|2n; \mathbb{R})$, где $n \geq 2$, все нетривиальные коциклы имеют нулевую степень:

в случае $\mathfrak{k}(1|2)^{\mathbb{R}}$ имеем

$$\mathfrak{g}_- = \text{Span}(K_1, iK_1, K_\xi, iK_\xi, K_\eta, iK_\eta), \quad \mathfrak{g}_0 = \text{Span}(K_t, iK_t, K_{\xi\eta}, iK_{\xi\eta});$$

коциклы, представляющие элементы из $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g}_*)$ (ниже в коциклах для серии $\mathfrak{k}$ мы пишем f вместо K_f) –

$$\begin{aligned} c_1^0 &= 1 \otimes \xi^* \wedge (i\xi)^*, & c_3^0 &= 1 \otimes (\xi^*)^{\wedge 2}, \\ c_2^0 &= 1 \otimes \eta^* \wedge (i\eta)^*, & c_4^0 &= 1 \otimes (\eta^*)^{\wedge 2}; \end{aligned}$$

в случае $\mathfrak{k}(1|3)^{\mathbb{R}}$ имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_- &= \text{Span}(K_1, iK_1, K_\xi, iK_\xi, K_\eta, iK_\eta, K_\theta, iK_\theta), \\ \mathfrak{g}_0 &= \text{Span}(K_t, iK_t, K_{\xi\theta}, iK_{\xi\theta}, K_{\xi\eta}, iK_{\xi\eta}, K_{\eta\theta}, iK_{\eta\theta});\end{aligned}$$

коциклы старшего веса, представляющие элементы из $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g}_*)$ суть

$$c_1^0 = 1 \otimes (\eta^*)^{\wedge 2}, \quad c_2^0 = 1 \otimes \eta^* \wedge (i\eta)^*.$$

Более общо, при $n \geq 2$ для $\mathfrak{k}(1|2n)^{\mathbb{R}}$ коциклы старшего веса, представляющие элементы из $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g}_*)$, суть

$$\begin{aligned}c_1^0 &= 1 \otimes (\xi_n^*)^{\wedge 2}, & c_2^0 &= 1 \otimes \xi_n^* \wedge (i\xi_n)^*, \\ c_3^0 &= 1 \otimes \xi_n^* \wedge \eta_1^*, & c_4^0 &= 1 \otimes \xi_n^* \wedge (i\eta_1)^*, \\ c_5^0 &= 1 \otimes (\eta_1^*)^{\wedge 2}, & c_6^0 &= 1 \otimes \eta_1^* \wedge (i\eta_1)^*.\end{aligned}$$

Для $\mathfrak{k}(1|2n+1)^{\mathbb{R}}$ коциклы старшего веса, представляющие элементы из $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g}_*)$, суть

$$\begin{aligned}c_1^0 &= 1 \otimes (\eta_1^*)^{\wedge 2}, & c_2^0 &= 1 \otimes (\eta_2^*)^{\wedge 2}, \\ c_3^0 &= 1 \otimes \eta_1^* \wedge (i\eta_1)^*, & c_4^0 &= 1 \otimes \eta_2^* \wedge (i\eta_2)^*, \\ c_5^0 &= 1 \otimes \eta_1^* \wedge (\eta_2)^*, & c_6^0 &= 1 \otimes \eta_2^* \wedge (i\eta_2)^*;\end{aligned}$$

в случае $\mathfrak{m}(1)^{\mathbb{R}} \subset \mathbf{vect}(2|4; \mathbb{R})$ имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_- &= \text{Span}(M_1, iM_1, M_q, iM_q, M_\theta, iM_\theta), \\ \mathfrak{g}_0 &= \text{Span}(M_\tau, iM_\tau, M_{q\theta}, iM_{q\theta}, M_{q^2}, iM_{q^2});\end{aligned}$$

коциклы старшего веса, представляющие элементы из $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g}_*)$, –

$$\begin{aligned}c_1^0 &= 1 \otimes q_1^* \wedge (iq_1)^*, & c_3^1 &= 1 \otimes \theta_1^* \wedge 1^* + q_1 \otimes iq_1^* \wedge (i\theta_1)^*, \\ c_2^0 &= 1 \otimes (q_1^*)^{\wedge 2}, & c_4^1 &= 1 \otimes \theta_1^* \wedge (i1)^* - q_1 \otimes q_1^* \wedge (i\theta_1)^*;\end{aligned}$$

операторы M_{q^2} и iM_{q^2} действуют на когомологические классы, представленные этими коциклами, тривиально.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Хотя $\mathbf{vect}(1|1) \cong \mathfrak{k}(1|2) \cong \mathfrak{m}(1)$ как абстрактные супералгебры Ли [20], они неизоморфны как фильтрованные, а также как градуированные супералгебры Ли и сохраняют совершенно разные структуры. Неудивительно поэтому, что препятствия к интегрируемости почти комплексных (соответственно почти вещественно-комплексных) структур (в случае $\mathbf{vect}(1|1)$ и соответственно в случаях $\mathfrak{k}(1|2)$ и $\mathfrak{m}(1)$) выглядят (и являются) совершенно разными.

4. О КЭЛЕРОВЫХ И ГИПЕРКЭЛЕРОВЫХ СУПЕРМНОГООБРАЗИЯХ

4.1. Определения на многообразиях. Пусть на вещественном многообразии M задана почти комплексная структура J и метрика h , такая что

$$h(X, Y) = h(JX, JY) \quad (22)$$

для любых векторных полей X, Y (такая метрика называется *псевдоэрмитовой*). Многообразие M называется *кэлеровым*, если

$$\nabla J = 0, \quad (23)$$

где ∇ – связность Леви-Чивита, отвечающая метрике h . Каждое кэлерово многообразие является симплектическим: невырожденная антисимметрическая 2-форма определяется из формулы

$$\omega(X, Y) = h(JX, Y) \quad (24)$$

для любых векторных полей $X, Y \in \mathbf{vect}(M)$, а требование $d\omega = 0$ и есть условие кэлеровости в одном из эквивалентных определений. Собственно, формула (24) по любым двум членам тройки (ω, h, J) определяет третий член.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Чтобы формула (24) определяла третий член тройки (ω, h, J) по двум другим, нам нужна невырожденность формы ω и метрики h . Требование плоскостности G -структуры, ассоциированной с J в стандартном определении кэлорова многообразия (т. е. требование, чтобы J была комплексной, а не почти комплексной структурой) не выглядит обоснованным: от метрики h мы же не требуем плоскостности, так отчего дискриминировать J ? Кроме того, почему требуется, чтобы метрика h была знакоопределенной?

М. С. Вербицкий сообщил нам, что и вправду знакоопределенность метрики h в традиционном определении кэлорова многообразия не является необходимой (однако классификационные результаты известны лишь для знакоопределенных метрик h), а вот плоскостность почти симплектической структуры нужна, потому что

$$d\omega = 0 \iff \nabla J = 0. \quad (25)$$

Условие $d\omega = 0$ является фактически системой двух уравнений (равенство нулю обеих компонент элемента $d\omega \in \Omega^3 = P^3 \oplus \omega \wedge \Omega^1$, где P^3 – пространство примитивных (в другой терминологии – гармонических) форм, т. е. тех, что “не делятся” на ω), и оба они нужны, чтобы выполнялось условие (23).

В свете этого замечания мы предлагаем следующее определение кэлорова супермногообразия, пригодное и в не суперситуации.

Невырожденную суперсимметричную билинейную форму h на суперпространстве V назовем *метрикой*, *псевдоэрмитовой относительно оператора* $J \in \text{End}(V)$ такого, что $J^2 = \pm \text{id}$, если $h(X, Y) = (-1)^{p(X)p(J)} h(JX, JY)$ для любых векторов $X, Y \in V$.

Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ – вещественное супермногообразие с (почти) J -симметрической или Π -симметрической структурой, h – метрика на $\mathcal{M}$, псевдоэрмитова относительно J или Π , а ω – невырожденная и замкнутая дифференциальная 2-форма на $\mathcal{M}$. Супермногообразие $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ назовем *почти кэлеровым*, если выполняются два условия:

- 1) $\omega(X, Y) = h(JX, Y)$ для любых $X, Y \in \mathbf{vect}(\mathcal{M})$, где $p(h) + p(J) = p(\omega)$;
 - 2) $\nabla J = 0$ для связности Леви-Чивита ∇ , отвечающей метрике h [19].
- (26)

Из этого определения вытекают следующие ограничения на возможные суперразмерности супермногообразия $\mathcal{M}$ над $\mathbb{R}$:

	$p(J) = \bar{0}$	$p(J)$ (или $p(\Pi) = \bar{1}$)
$p(h) = \bar{0}$	$2n 2m$	$2n 2n$
$p(h) = \bar{1}$	$2n 2n$	$n n$ (над любым полем $\mathbb{K}$)

(27)

Если условия интегрируемости тензорного поля J (или Π) выполнены, то супермногообразие $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ назовем *кэлеровым* (без “почти”).

Напомним, кстати, что нечетная невырожденная и замкнутая форма ω , которая получается во внедиагональных клетках таблицы (27), называется, по совету А. Вейля, *периплектической*; она является тем аналогом симплектической формы, который приводит к “антискобке” и соответствующей механике, открытой в работе [28] и переоткрытой в работе [29], где предлагаются ее физические применения (далеко не полный их обзор см. в работе [30]). Супералгебра Ли, сохраняющая нечетную невырожденную антисимметрическую билинейную форму, называется *периплектической* и обозначается $\mathfrak{pe}^a(n)$; нечетную невырожденную симметрическую билинейную форму сохраняет некоторая супералгебра Ли $\mathfrak{pe}(n)$, причем $\mathfrak{pe}^a(n) \simeq \mathfrak{pe}(n)$.

Если заданы три (почти) комплексные структуры J_i , удовлетворяющие соотношениям кватернионных единиц, и одна метрика h , псевдоэрмитова относительно каждой структуры J_i , а также три симплектические (или периплектические) формы ω_i , связанные между собой тремя соотношениями (24), мы получаем определение (почти) *гиперкэлерова супермногообразия*.

Большинство понятий, определенных в этом разделе, ранее не были выделены явно. Интересно было бы обобщить с помощью этого раздела идеи, изложенные в лекциях [31] и последующих работах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Картановское продолжение и его обобщения ([32])

П.1. Картановские продолжения. Пусть $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли, V есть $\mathfrak{g}$ -модуль, а S^i – оператор i -й симметрической степени. Положим $\mathfrak{g}_{-1} = V$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, а при $k > 0$ определим k -е *картановское продолжение* пары $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)$ формулой

$$\mathfrak{g}_k = \{X \in \text{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{k-1}) \mid X(v_0)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \\ = X(v_1)(v_0, v_2, \dots, v_k) \text{ при любых } v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathfrak{g}_{-1}\}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} i: S^{k+1}(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_{-1} &\rightarrow S^k(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}, \\ j: S^k(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_0 &\rightarrow S^k(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1} \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

– естественные вложения. Тогда $\mathfrak{g}_k = i(S^{k+1}(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}) \cap j(S^k(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_0)$.

Полным картановским продолжением пары $(V, \mathfrak{g})$ называется пространство $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_* = \bigoplus_{k \geq -1} \mathfrak{g}_k$. Это пространство – алгебра Ли относительно естественной скобки, которую абстрактно довольно долго определять. А вот если $\mathfrak{g}_0$ -модуль $\mathfrak{g}_{-1}$ точен, то имеется вложение

$$(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_* \subset \mathbf{vect}(n) = \mathbf{der} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n],$$

где $n = \dim \mathfrak{g}_{-1}$,

$$\mathfrak{g}_i = \{D \in \mathbf{vect}(n) \mid \deg D = i, [D, X] \in \mathfrak{g}_{i-1} \text{ для любых } X \in \mathfrak{g}_{-1}\}$$

и структура алгебры Ли на $\mathbf{vect}(n)$ индуцирует структуру алгебры Ли на $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*$, совпадающую с той, которую мы не стали определять в абстрактных терминах.

Из четырех серий простых векторных алгебр Ли с полиномиальными коэффициентами три являются полными картановскими продолжениями:

$$\mathbf{vect}(n) = (\mathrm{id}, \mathfrak{gl}(n))_*, \quad \mathbf{svect}(n) = (\mathrm{id}, \mathfrak{sl}(n))_*, \quad \mathfrak{h}(2n) = (\mathrm{id}, \mathfrak{sp}(n))_*.$$

Четвертая серия алгебр Ли $\mathfrak{k}(2n+1)$ является результатом несколько более общей конструкции, которую мы опишем ниже в п. П.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Суперизация предложенных конструкций непосредственна: по правилу знаков. Таким образом, мы получаем бесконечномерные супералгебры Ли

$$\begin{aligned} \mathbf{vect}(m|n) &= (\mathrm{id}, \mathfrak{gl}(m|n))_*, & \mathbf{svect}(m|n) &= (\mathrm{id}, \mathfrak{sl}(m|n))_*, \\ \mathfrak{h}(2m|n) &= (\mathrm{id}, \mathfrak{osp}^a(m|2n))_*, & \mathfrak{le}(n) &= (\mathrm{id}, \mathfrak{pe}^a(n))_*, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{osp}^a(m|2n)$ считается сохраняющей невырожденную четную антисимметрическую билинейную форму, а изоморфная супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(m|2n)$ – сохраняющей невырожденную четную симметрическую билинейную форму.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Картановское продолжение $(\mathrm{id}, \mathfrak{osp}(m|2n))_* = (\Pi(\mathrm{id}), \mathfrak{osp}^a(m|2n))_*$ конечномерно.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Суперизация контактных алгебр Ли приводит к двум сериям, а именно $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{m}$, описанным ниже.

П.2. Обобщение картановского продолжения. Рассмотрим нильпотентную $\mathbb{Z}$ -градуированную алгебру Ли $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{-d \leq i \leq -1} \mathfrak{g}_i$ и подалгебру Ли $\mathfrak{g}_0 \subset \mathbf{der}_0 \mathfrak{g}_-$ ее дифференцирований, сохраняющих $\mathbb{Z}$ -градуировку. Пусть

$$\begin{aligned} i: S^{k+1}(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_- &\rightarrow S^k(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g}_-, \\ j: S^k(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_0 &\rightarrow S^k(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g}_- \end{aligned}$$

– естественные вложения, сходные с (П.1). При $k > 0$ определим k -е продолжение пары $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)$, положив

$$\mathfrak{g}_k = (j(S^\bullet(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_0) \cap i(S^\bullet(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_-))_k,$$

где индекс k в правой части выделяет компоненту степени k .

Положим $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)_* = \bigoplus_{i \geq -d} \mathfrak{g}_i$. Если $\mathfrak{g}_0$ -модули $\mathfrak{g}_i$ неприводимы при $i < 0$, то, как легко проверить, $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)_*$ – подалгебра Ли в $\mathbf{vect}(\dim \mathfrak{g}_-)$. Суперизация очевидна.

Что же такое алгебра Ли контактных векторных полей в этих терминах? Обозначим символом $\mathfrak{hei}(2n)$ алгебру Гейзенберга: ее пространство – $W \oplus \mathbb{C} \cdot z$, где W есть $2n$ -мерное пространство с невырожденной антисимметрической билинейной формой B , а скобка задана следующими соотношениями:

$$z \text{ лежит в центре и } [v, w] = B(v, w) \cdot z \text{ при всех } v, w \in W. \quad (\text{П.2})$$

Ясно, что $\mathfrak{k}(2n+1) \cong (\mathfrak{hei}(2n), \mathfrak{csp}(2n))_*$, где $\mathfrak{cg}$ – тривиальное центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с помощью 1-мерного центра.

Зададим структуру супералгебры Ли $\mathfrak{hei}(2n|m)$ на прямой сумме $(2n, m)$ -мерно-го суперпространства W с невырожденной антисимметрической четной билинейной формой B и $(1, 0)$ -мерном пространстве, натянутом на элемент z с помощью формулы (П.2). Очевидно, что

$$\mathfrak{k}(2n+1|m) = (\mathfrak{hei}(2n|m), \mathfrak{cosp}^a(m|2n))_*.$$

Периконтактный (т.е. “нечетный” контактный) аналог серии $\mathfrak{k}$ ассоциирован со следующим “нечетным” аналогом супералгебры $\mathfrak{hei}(2n|m)$. Обозначим символом $\mathfrak{ab}(n)$ *антискобочную* супералгебру: ее пространство – $W \oplus \mathbb{C} \cdot z$, где W есть $n|m$ -мерное суперпространство, снабженное невырожденной антисимметрической нечетной билинейной формой B , а скобка в $\mathfrak{ab}(n)$ задана следующими соотношениями: z нечетен и лежит в центре, а $[v, w] = B(v, w) \cdot z$ при всех $v, w \in W$.

Пусть $\mathfrak{pe}^a(n)$ – супералгебра Ли, сохраняющая *нечетную* невырожденную антисимметрическую билинейную форму. Ясно, что

$$\mathfrak{m}(n) = (\mathfrak{ab}(n), \mathfrak{cpe}^a(n))_*.$$

Благодарности. Авторы благодарны И. Н. Бернштейну, заинтересовавшему их задачей описать инварианты вещественно-комплексных супермногообразий, А. Лебедеву за помощь и рецензенту за полезные замечания. Работа С. Буарруджа была частично поддержана грантом AD 065 NYUAD.

Список литературы

- [1] Д. А. Лейтес, *УМН*, **29:3** (177) (1974), 209–210.
- [2] Д. А. Лейтес, *УМН*, **35:1**(211) (1980), 3–57.
- [3] А. Ю. Вайнтроб, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, **32** (1988), 125–211.
- [4] *Concise Encyclopedia of Supersymmetry and Noncommutative Structures in Mathematics and Physics*, eds. S. Duplij, W. Siegel, J. Bagger, Kluwer, Dordrecht, 2004.
- [5] И. Н. Бернштейн, Д. А. Лейтес, В. Молотков, В. Шандер, *Семинар по суперсимметрии*, т. 1: *Алгебра и анализ: основные факты*, ред. Д. А. Лейтес, МЦНМО, М., 2011.
- [6] *Quantum Fields and Strings: a Course for Mathematicians*, Material from the Special Year on Quantum Field Theory (Princeton, NJ, 1996–1997), v. 1, eds. P. Deligne, P. Etingof, D. Freed, L. Jeffrey, D. Kazhdan, J. Morgan, D. Morrison, E. Witten, AMS, Providence, RI; IAS, Princeton, NJ, 1999.
- [7] Ю. И. Манин, *Калибровочные поля и комплексная геометрия*, Наука, М., 1984.
- [8] Ф. А. Березин, *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*, Изд-во МГУ, М., 1983.
- [9] С. Стернберг, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Мир, М., 1970.

- [10] В. М. Сергеев, *Пределы рациональности*, Фазис, М., 1999; English transl.: *The thermodynamic approach market*, arXiv: 0803.3432.
- [11] P. Grozman, D. Leites, “From supergravity to ballbearings”, *Supersymmetries and Quantum Symmetries*, Proceedings of the Internatnl seminar in the memory of V. Ogievetsky (Dubna, July 22–26, 1997), v. 524, Lecture Notes in Physics, eds. J. Wess, E. A. Ivanov, Springer, Berlin, 1999, 58–67.
- [12] П. Я. Грозман, Д. А. Лейтес, *ТМФ*, **153**:2 (2007), 186–219, arXiv: math.DG/0509399.
- [13] D. Leites (ed.), *J. Jost–D. Leites Seminar on Super Riemann Surfaces*, in preparation; available in preliminary form.
- [14] A. Newlander, L. Nirenberg, *Ann. Math.*, **65** (1957), 391–404.
- [15] P. Grozman, *Invariant bilinear differential operators*, arXiv: math/0509562.
- [16] B. Kruglikov, “Dozen definitions of the Nijenhuis tensor $N_J \in \Lambda^2 T^*M \otimes TM$ of an almost complex structure $J \in T^*M \otimes TM$ ”, 2004.
<http://www.math.uit.no/ansatte/boris/Images/1/12DEF-NJ.pdf>.
- [17] А. Ю. Вайнтроб, “Почти комплексные структуры на супермногообразиях”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ред. А. Онищик, ЯрГУ, Ярославль, 1985, 139–142.
- [18] A. McHugh, *J. Math. Phys.*, **30**:5 (1989), 1039–1042.
- [19] E. Poletaeva, *The analogs of Riemann and Penrose tensors on supermanifolds*, arXiv: math.RT/0510165.
- [20] P. Grozman, D. Leites, I. Shchepochkina, *Acta Math. Vietnam.*, **26**:1 (2001), 27–63, arXiv: hep-th/9702120.
- [21] М. Л. Концевич, *Функци. анализ и его прил.*, **21**:2 (1987), 78–79.
- [22] A. A. Beilinson, V. V. Shekhtman, *Commun. Math. Phys.*, **118**:4 (1988), 651–701.
- [23] Yu. I. Manin, *Topics in Noncommutative Geometry*, M. B. Porter Lectures, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1991.
- [24] P. Grozman, *SuperLie. A Mathematica package for calculations in Lie algebras and superalgebras*, 2009, <http://www.equaoonline.com/math/SuperLie>.
- [25] P. Grozman, D. Leites, “An unconventional supergravity”, *Noncommutative Structures in Mathematics and Physics* (Kiev, September 24–28, 2000), NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, **22**, eds. S. Duplij, J. Wess, Kluwer, Dordrecht, 2001, 41–47, arXiv: hep-th/0202115.
- [26] О. И. Богоявленский, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:6 (2004), 71–84.
- [27] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, *Harmonic Superspace*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [28] Д. А. Лейтес, *Докл. АН СССР*, **236**:4 (1977), 804–807.
- [29] I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett. B*, **102**:1 (1981), 27–31; *Phys. Rev. D*, **28**:10 (1983), 2567–2582; Erratum **30**:2 (1984), 508.
- [30] J. Gomis, J. Paris, S. Samuel, *Phys. Rep.*, **259**:1-2 (1995), 1–145, arXiv: hep-th/9412228.
- [31] S. Kuzenko, *J. Phys. A*, **43**:44 (2010), 443001, 46 pp., arXiv: 1004.0880.
- [32] И. М. Щепочкина, *ТМФ*, **147**:3 (2006), 450–469, arXiv: math.RT/0509472.

Поступила в редакцию 2.05.2010,
после доработки 10.06.2012