Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, Построение несчетного числа предельных гиббсовских мер неоднородной модели Изинга, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 1, 95–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 10:05:05

© 1999 г.

У. А. Розиков*

ПОСТРОЕНИЕ НЕСЧЕТНОГО ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ГИББСОВСКИХ МЕР НЕОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА

Для неоднородной модели Изинга на дереве Кэли доказано, что существует несчетное число предельных гиббсовских мер, и дано их конструктивное описание.

Данная работа является продолжением недавно опубликованной работы [1].

Пусть $\Gamma^k = (V, L)$ – дерево Кэли порядка $k \geq 1$, где V – множество вершин, а L – множество ребер данного дерева [2, 3].

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим

$$\begin{aligned} W_n &= \{x \in V : d(x, x^0) = n\}, \\ V_n &= \bigcup_{m=0}^n W_m = \{x \in V : d(x, x^0) \leq n\}, \\ L_n &= \{\langle x, y \rangle \in L : x, y \in V_n\}, \end{aligned}$$

где $d(x, y)$ – расстояние на Γ^k , т.е. число ребер кратчайшего пути, соединяющего x и y . Говорят, что $x < y$, если путь из x^0 в y проходит через x . При этом вершина y называется “прямым потомком” вершины x , если $y > x$ и x, y являются ближайшими соседями. Если $S(x)$ – совокупность “прямых потомков” вершины x , то для любой вершины $x \in V$, отличной от x^0 , имеем $|S(x)| = k$ и $|S(x^0)| = k + 1$.

Неоднородная модель Изинга определяется формальным гамильтонианом [4]

$$H(\sigma) = - \sum_{\langle x, y \rangle} J_{xy} \sigma(x) \sigma(y), \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем парам ближайших соседей $\langle x, y \rangle$, J_{xy} – действительная функция, задающая взаимодействие соседей x и y , $\sigma(x) \in \{-1, 1\}$ для любого $x \in V$.

* Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Ташкент, Республика Узбекистан.
E-mail: nasyr@uwed.freenet.uz

Пусть $A \subset V$ – конечное подмножество. Обозначим через $\Omega_A = \{-1, 1\}^A$ пространство конфигураций, определенных на множестве A . Пусть h_x – действительнoзначная функция точки $x \in V$. Для каждого n определим меру μ_n на Ω_{V_n} , полагая

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x) \right\}, \quad (2)$$

где $\beta = 1/T$ (T – температура), $\sigma_n = \{\sigma(x), x \in V_n\} \in \Omega_{V_n}$, Z_n – нормирующий множитель и

$$H_n(\sigma_n) = - \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} J_{xy} \sigma(x) \sigma(y).$$

Условия согласования для $\mu_n(\sigma_n)$, $n \geq 1$, определяются равенством

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad (3)$$

где $\sigma^{(n)} = \{\sigma(x), x \in W_n\}$. В этом случае в силу теоремы Колмогорова о продолжении мер существует и притом единственное распределение Гиббса μ на Ω_V .

ТЕОРЕМА 1 [5]. *Для того чтобы меры (2) удовлетворяли условию (3), необходимо и достаточно, чтобы для $h_x, x \in V$, выполнялось равенство*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y; \theta_{xy}) \quad (4)$$

для любого $x \in V$, где $f(h; \theta) = \operatorname{arcth}(\theta \operatorname{th} h)$ и $\theta_{xy} = \operatorname{th}(J_{xy}/T)$.

Положим

$$\mathcal{G} = \left\{ \mathbf{h} = \{h_x, x \in V\} : h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y; \theta_{xy}) \right\}.$$

В соответствии с теоремой 1 задача описания предельных гиббсовских мер неоднородной модели Изинга сводится к описанию элементов множеств $\mathcal{G}$. Отсюда следует, что при различных совокупностях $\{h_x, x \in V\}$ получаются различные меры.

Пусть G_{k+1} – свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$. Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между элементами группы G_{k+1} и множеством вершин V дерева Кэли Γ^k порядка $k \geq 1$ [2].

В работах [1, 3] построены классы нормальных делителей конечного индекса группы G_{k+1} , изучены структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса.

Пусть G_{k+1} – правое представление дерева Кэли Γ^k и $T_y(x) = xy$; $x, y \in G_{k+1}$ – левый сдвиг на правом представлении G_{k+1} . Пусть $H_0 \subset G_{k+1}$ – нормальный делитель индекса r [3] и $G_{k+1}/H_0 = \{H_0, H_1, \dots, H_{r-1}\}$ – фактор-группа относительно H_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Совокупность чисел $\{h_x, x \in G_{k+1}\}$ называется H_0 -периодической, если для любого $x \in G_{k+1}$ выполняется равенство

$$h_x = h_{T_y(x)}, \quad y \in H_0.$$

Мера, соответствующая H_0 -периодической совокупности величин $\{h_x, x \in G_{k+1}\}$, называется H_0 -периодической.

В работе [1] для неоднородной модели Изинга описаны периодические распределения Гиббса.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} q_i(x) &= |S(x) \cap H_i|, \quad i = \overline{0, r-1}; \\ Q(x) &= (q_0(x), q_1(x), \dots, q_{r-1}(x)); \\ q_i(H_0) &= q_i(e), \quad e - \text{единичный элемент группы } G_{k+1}; \\ Q(H_0) &= (q_0(H_0), q_1(H_0), \dots, q_{r-1}(H_0)); \\ N(H_0) &= |\{j: q_j(H_0) \neq 0\}|, \end{aligned}$$

где $|\cdot|$ — число элементов множества.

ТЕОРЕМА 2 [1]. Для любого $x \in G_{k+1}$ существует перестановка π_x координат вектора $Q(H_0)$ такая, что

$$\pi_x Q(H_0) = Q(x).$$

Пусть

$$N(H_0) = |\{q_{i_1}(H_0), q_{i_2}(H_0), \dots, q_{i_{N(H_0)}}(H_0)\}|, \quad \theta_{xy} = \theta_{ij},$$

если $x \in H_i, y \in H_j$. На параметры θ_{ij} наложим следующее условие.

УСЛОВИЕ I. Пусть для заданных чисел $c_1, c_2, \dots, c_{r-1} \in R$ параметры θ_{ij} удовлетворяют условиям:

$$1) c_{\pi_m(i_1)} \theta_{m\pi_m(i_1)} = c_{\pi_m(i_2)} \theta_{m\pi_m(i_2)} = \dots = c_{\pi_m(i_{N(H_0)})} \theta_{m\pi_m(i_{N(H_0)})}, \quad m = \overline{0, n-1};$$

$$2) \sum_{j=1}^{N(H_0)} q_{i_j}(H_0) c_{i_j} \theta_{0i_j} - c_{i_{j_0}} \theta_{0i_{j_0}} > 1;$$

$$3) f(\pm h_0^*, c_m) = \sum_{j=1}^{N(H_0)} q_{i_j}(H_0) f(\pm h_0^*; c_{\pi_m(i_j)} \theta_{m\pi_m(i_j)}) - f(\pm h_0^*; c_{\pi_m(i_{j_0})} \theta_{m\pi_m(i_{j_0})}),$$

$$m = \overline{0, n-1}, \quad j_0 = \overline{1, N(H_0)},$$

где $\pm h_0$ — решения уравнения

$$h_0 = \sum_{j=1}^{N(H_0)} q_{i_j}(H_0) f(h_0; c_{i_j} \theta_{0i_j}) - f(h_0; c_{i_{j_0}} \theta_{0i_{j_0}}), \quad j_0 = \overline{1, N(H_0)}.$$

В работе [1] при выполнении условия I доказано, что множество $\mathcal{G}$ имеет три H_0 -периодических элемента $\mathbf{h}^{(0)}$, $\mathbf{h}^{(1)}$, $\mathbf{h}^{(2)}$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(0)} &= \{h_x = 0 \text{ для любого } x \in V\}, \\ \mathbf{h}^{(1)} &= \left\{ h_x = \begin{cases} -h_0^*, & \text{если } x \in H_0, \\ -h_i^* = f(-h_0^*; c_i), & \text{если } x \in H_i, \quad i = \overline{1, r-1} \end{cases} \right\}, \\ \mathbf{h}^{(2)} &= -\mathbf{h}^{(1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $c_i \in R$ ($i = \overline{0, r-1}$) – заданные числа, $h_0^* > 0$.

Обозначим через μ_0 , μ_1 , μ_2 меры, соответствующие совокупностям величин $\mathbf{h}^{(0)}$, $\mathbf{h}^{(1)}$, $\mathbf{h}^{(2)}$.

В данной работе при выполнении условия I доказывается, что множество $\mathcal{G}$ не меньше несчетного множества, и дается конструктивное описание элементов $\mathcal{G}$. В распределениях, которые мы строим, “1/3-я часть” дерева Кэли занята фазой μ_0 , “1/3-я часть” – фазой μ_1 и “1/3-я часть” – фазой μ_2 . Впервые распределения такого типа были построены Добрушиным в модели Изинга на Z^3 [6]. В работах [3, 7–9] на дереве Кэли изучены такие распределения, в которых “половина” решетки занята одной фазой, а “половина” – другой фазой рассматриваемых на этой решетке моделей.

Используемый ниже подход основан на теории марковских случайных полей на деревьях и рекуррентных уравнениях этой теории [1, 3, 5, 7–11].

Рассмотрим произвольный (конечный или бесконечный) путь $x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$, идущий из точки x^0 . Путь можно изображать последовательностью $i_1 i_2 i_3 \dots$, где $i_1 = \overline{0, k}$; $i_n = \overline{0, k-1}$, $n \geq 2$. Перенумеруем для этого ребра, выходящие вверх из вершины $x \in V$, как $l_0(x), l_1(x), \dots, l_{k-1}(x)$ и ребра, выходящие из вершины x^0 , как $l_0(x^0), l_1(x^0), \dots, l_{k-1}(x^0), l_k(x^0)$. Тогда пути $x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ можно сопоставить последовательность $i_1 i_2 i_3 \dots$ такую, что $\langle x_{n-1}, x_n \rangle = l_{i_n}(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$, $i_1 = \overline{0, k}$; $i_n = \overline{0, k-1}$, $n \geq 2$. Последовательность $i_1 i_2 i_3 \dots$ однозначно задает путь $x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$.

Любой конечный путь $x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = x$ длины n определяет точку $x \in W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\}$. Если путь $x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = x$ изображается последовательностью $i_1 i_2 \dots i_n$, то мы будем считать, что и вершина x изображается этой последовательностью.

Пусть $x, y \in W_n$, x изображается последовательностью $i_1 i_2 \dots i_n$, а y – последовательностью $j_1 j_2 \dots j_n$, причем $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2, \dots, i_m = j_m$, но $i_{m+1} < j_{m+1}$ для некоторого m . В этом случае будем говорить, что $x \prec y$.

Пусть π – бесконечный путь, изображаемый последовательностью $i_1 i_2 \dots$ ($i_1 = \overline{0, k}$; $i_n = \overline{0, k-1}$, $n \geq 2$). Сопоставим пути π вещественное число

$$t = t(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{k^n}.$$

Ясно, что $t \in [0; 1 + 1/k]$.

Это сопоставление взаимно однозначно всюду, кроме тех чисел t , которые разлагаются в конечную сумму

$$t = \sum_{n=1}^N \frac{i_n}{k^n}, \quad i_N \neq 0.$$

Обозначим множество таких дробей через Q_k , т.е.

$$Q_k = \left\{ 0 < t < 1 + \frac{1}{k} : t = \sum_{n=1}^N \frac{i_n}{k^n}, i_N \neq 0 \right\}.$$

Если $t \in Q_k$, то число t , как известно, можно разложить двумя способами:

$$\begin{aligned} t &= \sum_{n=1}^N \frac{i_n}{k^n}, \\ t &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{i_n}{k^n} + \frac{i_N - 1}{k^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{k-1}{k^n}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\{i_n^{(1)}, n = 1, 2, \dots\}$ первую из этих последовательностей, а через $\{i_n^{(2)}, n = 1, 2, \dots\}$ вторую, т.е.

$$\begin{aligned} i_n^{(1)} &= i_n^{(2)} = i_n, & n &\leq N-1; \\ i_N^{(1)} &= i_N, & i_N^{(2)} &= i_N - 1; \\ i_n^{(1)} &= 0, & i_n^{(2)} &= k-1, & n &\geq N+1. \end{aligned}$$

Пусть пути $\pi(t, 1)$ и $\pi(t, 2)$ изображаются соответственно последовательностями $i_1^{(1)}i_2^{(1)} \dots$ и $i_1^{(2)}i_2^{(2)} \dots$. Ясно, что путь $\pi(t, 1)$ при $n \geq N+1$ все время “идет направо”, а путь $\pi(t, 2)$ при $n \geq N+1$ все время “идет налево”.

Пусть $\pi_1 = \{x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots\}$ и $\pi_2 = \{x^0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots\}$ – бесконечные пути. Сопоставим путям π_1, π_2 совокупность чисел $\mathbf{h}^{\pi_1 \pi_2} = \{h_x^{\pi_1 \pi_2}, x \in V\}$, удовлетворяющих уравнениям (4).

Предположим, что выполняется условие I. Совокупность $\mathbf{h}^{\pi_1 \pi_2}$ однозначно определяется следующими условиями при $x \in W_n$:

$$h_x^{\pi_1 \pi_2} = \begin{cases} -h_i^*, & \text{если } x \prec x_n \text{ и } x \in H_i, \\ 0, & \text{если } x_n \prec x \prec y_n, \\ h_i^*, & \text{если } y_n \prec x \text{ и } x \in H_i, \end{cases} \quad (6)$$

где $h_i^*, i = \overline{0, r-1}$, определено формулой (5), $n = 1, 2, \dots$.

В случае $k = 2$ и $H_0 = \{x \in G_{k+1} : \text{в несократимой записи } x \text{ участвуют четные числа } a_1 \text{ и } a_2\}$ вид $\mathbf{h}^{\pi_1 \pi_2}$ на дереве Кэли Γ^2 показан на рисунке. Заметим, что в этом случае индекс нормального делителя H_0 равен 4 [3].

ТЕОРЕМА 3. Для любых бесконечных путей π_1, π_2 существует и единственная совокупность чисел $\mathbf{h}^{\pi_1 \pi_2}$, удовлетворяющих соотношениям (4) и (6).

Доказательство. Зададим на множестве W_n совокупность

$$h_x^{(n)} = \begin{cases} h_x^{\pi_1 \pi_2}, & \text{если } x \in W_n \setminus \{x_n, y_n\}, \\ h_{x_n}^{(n)}, & \text{если } x = x_n, \\ h_{y_n}^{(n)}, & \text{если } x = y_n, \end{cases} \quad (7)$$

где $h_x^{\pi_1 \pi_2}$ определяется формулой (6) и $h_{x_n}^{(n)}, h_{y_n}^{(n)} \in [-h_0^*, h_0^*]$ произвольные. Доопределим с помощью рекуррентных уравнений (4) $h_x^{(n)}$ для всех

$$x \in V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m.$$

Докажем, что предел

$$h_x = \lim_{n \rightarrow \infty} h_x^{(n)} \quad (8)$$

существует для любого фиксированного $x \in V$ и этот предел не зависит от выбора $h_x^{(n)}$ при $x = x_n, y_n$.

Так как совокупности чисел $\mathbf{h}^{(0)}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}$ удовлетворяют равенству (4), заметим, что для любого $m \leq n$

$$h_x^{(n)} = \left\{ h_x^{\pi_1 \pi_2}, x \in W_n, x \neq x_m, y_m \right\}.$$

Отсюда следует, что при $x \in W_n, x \neq x_m, y_m$ предел (8) существует, и, таким образом, нужно установить только, что предел (8) существует при $x = x_m, y_m$.

Для путей π_1, π_2 всегда имеется такое число $m_1 \geq 0$, что $x_i = y_i$, если $i = \overline{0, m_1}$, и $x_i \neq y_i$, если $i > m_1$.

Пусть $1 \leq m \leq n$. Если рассмотреть две совокупности $\{\tilde{h}_x^{(n)}, x \in V_n\}$ и $\{\hat{h}_x^{(n)}, x \in V_n\}$, отвечающие двум значениям $\tilde{h}_x^{(n)}$ и $\hat{h}_x^{(n)}$ при $x = x_n, y_n$ в (7), то из равенства (4) и неравенства $|f'_h(h; \theta)| \leq \theta$ следует, что

$$|\hat{h}_{x_{m-1}}^{(n)} - \tilde{h}_{x_{m-1}}^{(n)}| \leq \begin{cases} |\theta_{x_{m-1}x_m}| |\hat{h}_{x_m}^{(n)} - \tilde{h}_{x_m}^{(n)}|, & \text{если } m < m_1 \text{ или } m > m_1, \\ |\theta_{x_{m-1}x_m}| |\hat{h}_{x_m}^{(n)} - \tilde{h}_{x_m}^{(n)}| + |\theta_{y_{m-1}y_m}| |\hat{h}_{y_m}^{(n)} - \tilde{h}_{y_m}^{(n)}|, & \text{если } m = m_1, \end{cases}$$

и

$$|\hat{h}_{y_{m-1}}^{(n)} - \tilde{h}_{y_{m-1}}^{(n)}| \leq \begin{cases} |\theta_{y_{m-1}y_m}| |\hat{h}_{y_m}^{(n)} - \tilde{h}_{y_m}^{(n)}|, & \text{если } m < m_1 \text{ или } m > m_1, \\ |\theta_{x_{m-1}x_m}| |\hat{h}_{x_m}^{(n)} - \tilde{h}_{x_m}^{(n)}| + |\theta_{y_{m-1}y_m}| |\hat{h}_{y_m}^{(n)} - \tilde{h}_{y_m}^{(n)}|, & \text{если } m = m_1. \end{cases}$$

Итерируя эти оценки, получаем

$$\begin{aligned} |\hat{h}_{x_m}^{(n)} - \tilde{h}_{x_m}^{(n)}| &\leq \\ &\leq \begin{cases} \prod_{i=1}^{n-m} |\theta_{x_{m-1+i}x_{m+i}}| |\hat{h}_{x_n}^{(n)} - \tilde{h}_{x_n}^{(n)}|, & \text{если } m < n < m_1 \text{ или } m_1 < m < n, \\ \prod_{i=1}^{n-m} |\theta_{x_{m-1+i}x_{m+i}}| |\hat{h}_{x_n}^{(n)} - \tilde{h}_{x_n}^{(n)}| + \\ + \prod_{i=1}^{n-m} |\theta_{y_{m-1+i}y_{m+i}}| |\hat{h}_{y_n}^{(n)} - \tilde{h}_{y_n}^{(n)}|, & \text{если } m \leq m_1 < n. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} |\hat{h}_{y_m}^{(n)} - \tilde{h}_{y_m}^{(n)}| &\leq \\ &\leq \begin{cases} \prod_{i=1}^{n-m} |\theta_{y_{m-1+i}y_{m+i}}| |\hat{h}_{y_n}^{(n)} - \tilde{h}_{y_n}^{(n)}|, & \text{если } m < n < m_1 \text{ или } m_1 < m < n, \\ \prod_{i=1}^{n-m} |\theta_{x_{m-1+i}x_{m+i}}| |\hat{h}_{x_n}^{(n)} - \tilde{h}_{x_n}^{(n)}| + \\ + \prod_{i=1}^{n-m} |\theta_{y_{m-1+i}y_{m+i}}| |\hat{h}_{y_n}^{(n)} - \tilde{h}_{y_n}^{(n)}|, & \text{если } m \leq m_1 < n. \end{cases} \end{aligned}$$

В силу условия I $\theta_{xy} = \theta_{ij}$, если $x \in H_i$, $y \in H_j$, $i, j = \overline{1, r-1}$. Введем обозначение $\theta = \max\{|\theta_{ij}|; i, j = \overline{1, r-1}\}$.

Пусть теперь даны произвольные $N, M > n$ и совокупности $\{h_x^{(N)}, x \in V_N\}$ и $\{h_x^{(M)}, x \in V_M\}$, определяемые начальными условиями вида (6) при $x \in W_N$ и $x \in W_M$, соответственно, и рекуррентными уравнениями (4). Положим $\tilde{h}_x^{(n)} = h_x^{(N)}$, $\hat{h}_x^{(n)} = h_x^{(M)}$ при $x = x_n, y_n$. Тогда из неравенства (9) имеем

$$|h_{x_m}^{(N)} - h_{x_m}^{(M)}| \leq 4C\theta^{n-m}, \quad |h_{y_m}^{(N)} - h_{y_m}^{(M)}| \leq 4C\theta^{n-m},$$

где

$$C = k \max_h |f(h; \theta)| = k \operatorname{arcth} \theta.$$

Из этой оценки вытекает, что последовательности $h_{x_m}^{(n)}$ и $h_{y_m}^{(n)}$ удовлетворяют при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном m критерию Коши и, следовательно, предел (8) существует и не зависит от выбора функций $h_{x_n}^{(n)}$ и $h_{y_n}^{(n)}$ в (7). Поскольку допредельные совокупности $\{h_x^{(n)}\}$ удовлетворяют по построению уравнениям (4), то и $\{h_x\}$ удовлетворяет этим уравнениям. Единственность $\{h_x\}$ следует, очевидно, из оценки (9). Теорема доказана.

ЛЕММА 1. Для любого $t, s \in Q_k$, $t \leq s$,

$$t = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{i_n}{k^n}, \quad s = \sum_{n=1}^{N_2} \frac{j_n}{k^n},$$

совпадают следующие совокупности чисел:

- а) $\mathbf{h}^{\pi_1(t,1)\pi_2(s)}$ и $\mathbf{h}^{\pi_1(t,2)\pi_2(s)}$; $h_x^{\pi_1(t,1)\pi_2(s)} = 0$, если $x = x_n$, $n \geq N_1 + 1$;
 б) $\mathbf{h}^{\pi_1(t)\pi_2(s,1)}$ и $\mathbf{h}^{\pi_1(t)\pi_2(s,2)}$; $h_x^{\pi_1(t)\pi_2(s,1)} = h_i^*$, если $x = y_n \in H_i$, $i = \overline{0, r-1}$,
 $n \geq N_2 + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай “а”. Пусть $\pi_1 = \pi_1(t, 1)$. Положим при $n > N_1$

$$h_x = \begin{cases} -h_i^*, & \text{если } x \prec x_n \text{ и } x \in H_i, \quad i = \overline{0, r-1}, \\ 0, & \text{если } x_n \preceq x \prec y_n, \\ h_i^*, & \text{если } y_n \preceq x \text{ и } x \in H_i, \quad i = \overline{0, r-1}, \end{cases}$$

и доопределим совокупность $\{h_x, x \in V\}$ при $x \in V_{N_1}$, пользуясь рекуррентными уравнениями (4). Тогда совокупность $\{h_x, x \in V\}$, как легко видеть, удовлетворяет этим уравнениям при всех $x \in V$, и вследствие условия единственности в теореме 3 построенная совокупность $\{h_x, x \in V\}$ и есть $\{h_x^{\pi_1(t,1)\pi_2(s)}, x \in V\}$. По тем же самым соображениям совокупность $\{h_x, x \in V\}$ совпадает и с $\{h_x^{\pi_1(t,2)\pi_2(s)}, x \in V\}$, следовательно,

$$\mathbf{h}^{\pi_1(t,1)\pi_2(s)} = \mathbf{h}^{\pi_1(t,2)\pi_2(s)}.$$

Аналогично доказывается случай “б”. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что для любой точки $(t, s) \in D = \{(t_1, t_2) \in [0; 1 + 1/k] \times [0; 1 + 1/k] : t_1 \leq t_2\}$ однозначно определяется совокупность чисел $\mathbf{h}^{\pi_1(t)\pi_2(s)}$.

Пусть $h_0(t, s) = h_{x_0}^{\pi_1(t)\pi_2(s)}$, где x_0 — граничная вершина графа Γ^k .

ЛЕММА 2. Функция $h_0(t, s)$, $(t, s) \in D$, является строго убывающей непрерывной функцией относительно каждой из переменных t, s и $h_0(0, 0) = h_0^*$, $h_0(0, 1 + 1/k) = 0$, $h_0(1 + 1/k, 1 + 1/k) = -h_0^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$t_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{k^n}, \quad t_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{k^n}$$

и $t_1 > t_2$. Тогда существует такое N , что

$$k^N \sum_{n=1}^N \frac{i_n}{k^n} - k^N \sum_{n=1}^N \frac{j_n}{k^n} \geq 2. \quad (10)$$

Пусть $\pi_1(t_1) = \{x^0 = x_0^{(1)} < x_2^{(1)} < \dots\}$ и $\pi_1(t_2) = \{x^0 = x_0^{(2)} < x_2^{(2)} < \dots\}$. Тогда из (10) следует, что $x_N^{(2)} \prec x_N^{(1)}$ и между $x_N^{(2)}, x_N^{(1)}$ существует еще по меньшей мере одна вершина x_N , т.е. $x_N^{(2)} \prec x_N \prec x_N^{(1)}$. По условиям (6) отсюда следует, что

$$\begin{aligned} h_x^{\pi_1(t_1)\pi_2} &\leq h_x^{\pi_1(t_2)\pi_2}, & x \in W_N; \\ h_x^{\pi_1(t_1)\pi_2} &= -h_i^* < h_x^{\pi_1(t_2)\pi_2} = 0, & \text{если } x = x_N \in H_i, \quad i = \overline{0, r-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда с помощью (4) из (11) для любого $n \leq N$ имеем

$$\begin{aligned} h_x^{\pi_1(t_1)\pi_2} &\leq h_x^{\pi_1(t_2)\pi_2}, & x \in W_n; \\ h_x^{\pi_1(t_1)\pi_2} &< h_x^{\pi_1(t_2)\pi_2}, & \text{если } x = x_n. \end{aligned}$$

Полагая $n = 0$, мы получаем, что $h_{x_0}^{\pi_1(t_1)\pi_2} < h_{x_0}^{\pi_1(t_2)\pi_2}$, это доказывает строгую монотонность функции $h_0(t, s)$ относительно t . Докажем ее непрерывность (относительно t). Пусть функции $\pi_1(t_1)$ и $\pi_2(t_2)$ до уровня N совпадают. Положим $\tilde{h}_{x_N}^{(N)} = h_{x_N}^{\pi_1(t_1)\pi_2}$ и $\hat{h}_{x_N}^{(N)} = h_{x_N}^{\pi_1(t_2)\pi_2}$. Тогда очевидно, что $|h_0(t_1, s) - h_0(t_2, s)| \leq 4C\theta^N$, если $|t_1 - t_2| \leq k^{-N-1}$. Из этой оценки следует, что

$$|h_0(t_1, s) - h_0(t_2, s)| \leq C_1 |t_1 - t_2|^\alpha, \quad \alpha = -\frac{\log \theta}{\log k},$$

это доказывает непрерывность функции $h_0(t, s)$ относительно t . Аналогично проводится доказательство относительно s .

Соотношения $h_0(0, 0) = h_0^*$, $h_0(0, 1 + 1/k) = 0$, $h_0(1 + 1/k, 1 + 1/k) = -h_0^*$ следуют из леммы 1. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что совокупности чисел $\mathbf{h}^{\pi_1(t)\pi_2(s)}$ различны при различных $(t, s) \in D$.

Обозначим через $\mu(t, s)$ гиббсовскую меру, соответствующую совокупности величин $\mathbf{h}^{\pi_1(t)\pi_2(s)}$, $(t, s) \in D$. Из вышеизложенного вытекает основной результат данной статьи.

ТЕОРЕМА 4. *Для любой точки $(t, s) \in D$ существует единственная гиббсовская мера $\mu(t, s)$, и при этом*

$$\mu(0, 0) = \mu_2, \quad \mu\left(0, 1 + \frac{1}{k}\right) = \mu_1, \quad \mu\left(1 + \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right) = \mu_0.$$

Поскольку распределения $\mu(t, s)$ различны при различных $(t, s) \in D$, мы получаем континуум предельных гиббсовских мер.

Благодарности. В заключение автор хотел бы выразить свою признательность Н. Н. Ганиходжаеву за внимание к работе.

Список литературы

- [1] У. А. Розиков. ТМФ. 1997. Т. 112. № 1. С. 170–175.
- [2] Н. Н. Ганиходжаев. ДАН РУз. 1994. № 5. С. 3–6.
- [3] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков. ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 109–117.
- [4] P. M. Bleher. Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 411–419.
- [5] S. Katsura, M. Takizawa. Progr. Theor. Phys. 1974. V. 51. P. 82–98.
- [6] Р. Л. Добрушин. Теория вероятн. и ее примен. 1973. Т. 18. В. 2. С. 261–279.
- [7] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев. Теория вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35. В. 2. С. 220–230.
- [8] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков. УзМЖ. 1995. № 4. С. 8–19.
- [9] Н. Н. Ганиходжаев. ТМФ. 1990. Т. 85. № 2. С. 163–175.
- [10] К. Престон. Гиббсовские состояния на счетных множествах. М.: Мир, 1977.
- [11] F. Spitzer. Ann. Prob. 1975. V. 3. P. 387–398.

Поступила в редакцию 11.III.1998 г.,
после доработки 4.VI.1998 г.