Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Саикиа, С. А. С. Ахмед, Отображение между кулоновской системой и гармоническим осциллятором в пространстве высших размерностей, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 1, 79–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6884>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:17:11

© 2012 г.

Н. Саикиа*, С. А. С. Ахмед*

ОТОБРАЖЕНИЕ МЕЖДУ КУЛОНОВСКОЙ СИСТЕМОЙ И ГАРМОНИЧЕСКИМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЫСШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Представлен расширенный метод преобразований для отображения между пространствами высших размерностей. Приведены решения уравнений Шредингера для функции Грина в виде связанных состояний и состояний рассеяния. Обсуждается нормализуемость решения для связанного состояния в порождаемом точно решаемом потенциале.

Ключевые слова: расширенное преобразование, уравнение Шредингера для функции Грина, точно решаемый потенциал.

1. ВВЕДЕНИЕ

Техника функций Грина (ФГ) предлагает мощный и удобный метод решения дифференциальных уравнений. Получение ФГ, зависящих от энергии, для уравнения Шредингера при заданном потенциале эквивалентно решению уравнения Шредингера, поскольку это дает собственные значения энергии и нормированные собственные функции. Кроме того, это также дает решения в виде состояний рассеяния с различными наборами граничных условий. В настоящей работе мы исследуем общее соотношение между зависящими от энергии ФГ двух различных физически значимых квантовых систем. Связь имеет чрезвычайно компактный вид, если ее выразить в терминах радиальной части ФГ для сферически-симметричных потенциалов. Мы использовали простую и компактную процедуру отображения, называемую расширенным преобразованием (РП) [1]–[9], для отображения точно решенных квантовых систем в новые квантовые системы, в рамках техники ФГ, в любом выбранном D -мерном евклидовом пространстве. Более ранние такие исследования были чреваты неточной конкретизацией или выбором *ad hoc* квантового числа момента импульса l .

Тот факт, что кулоновскую систему можно отобразить в систему гармонического осциллятора (ГО), не является новым [10], [11]. Мы применили формализм РП для отображения кулоновской системы в систему ГО и наоборот. При определенной подгонке параметров ФГ может описывать как связанные состояния, так и состояния

*Department of Physics, Guahati University, Guwahati, India.
E-mail: nilamonisaikia@yahoo.com

рассеяния. Чтобы получить состояния рассеяния кулоновской системы, требуется отображение из инвертированного ГО в кулоновскую квантовую систему, причем кулоновское рассеяние задается в пространстве высшей размерности, что проверяется с помощью метода РП.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 кратко представлен формализм РП, в разделе 3 рассматривается РП кулоновской системы и ГО в пространствах высших размерностей. Важный вопрос нормализуемости собственных функций порожденного связанного состояния обсуждается в разделе 4. Кулоновское рассеяние в пространстве произвольной размерности рассматривается в разделе 5. Раздел 6 содержит обсуждение и заключение.

2. ФОРМАЛИЗМ

Радиальная часть уравнения Шредингера для ФГ с потенциалом $V_A(r)$ в D_A -мерном евклидовом пространстве имеет вид ($\hbar = 1$, $2m = 1$)

$$\left(\partial_r^2 + \frac{D_A - 1}{r} \partial_r + E_A - V_A(r) - \frac{l_A(l_A + D_A - 2)}{r^2} \right) G_{l_A}(r, r_0, E_A, V_A, C_A) = \frac{\delta(r - r_0)}{r_0^{D_A - 1}}, \quad (1)$$

где r и r_0 – величины D_A -мерных радиус-векторов, а C_A – характеристическая постоянная точно решаемой квантовой системы (системы A), для которой будет применен метод преобразования.

Полнота множества собственно-энергетических функций эрмитова оператора H позволяет получить стандартное разложение ФГ по собственным функциям:

$$G_{l_A}(r, r_0, E_A, V_A(r), C_A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_A^{(n)}(r) (\varphi_A^{(n)})^*(r_0)}{E - E_A - i\epsilon}, \quad (2)$$

откуда мы извлекаем аналитический вид волновой функции для решенной квантовой системы.

РП [5] представляет собой координатное преобразование, за которым следует функциональное преобразование:

$$r \rightarrow g_B(r), \quad r_0 \rightarrow g_B(r_0), \quad (3)$$

и

$$G_{l_R}(r, r_0, E_B, V_B, C_B) = f_B^{-1}(r) G_{l_A}(g_B(r), g_B(r_0), g_B^2 E_A, g_B^2 V_A, C_A) f_B^{-1}(r_0). \quad (4)$$

Здесь функции преобразования $g_B(r)$, $g_B(r_0)$ и функции модулированной амплитуды $f_B(r)$, $f_B(r_0)$ должны быть определены в рамках РП:

$$\left[\partial_r^2 + \left(\frac{d}{dr} \ln \frac{f_B^2(r) g_B^{D_A - 1}(r)}{g_B'(r)} \right) \partial_r + \left(\frac{d}{dr} \ln f_B(r) \right) \left(\frac{d}{dr} \ln \frac{f_B' g_B^{D_A - 1}(r)}{g_B'(r)} \right) + \right. \\ \left. + g_B^2 \left(E_A - V_A(g_B(r)) - \frac{l_A(l_A + D_A - 2)}{g_B^2} \right) \right] G_{l_B}(r, r_0, E_B, V_B, C_B) = \frac{\delta(r - r_0)}{r_0^{D_B - 1}}. \quad (5)$$

Размерность D_B евклидова пространства для преобразованной квантовой системы (система B) теперь можно выбрать произвольным образом. Для этого потребуем

положить коэффициент при ∂_r в уравнении (5) равным

$$\frac{d}{dr} \ln \frac{f_B^2(r) g_B^{D_A-1}(r)}{g_B'(r)} = \frac{D_B - 1}{r}, \quad (6)$$

что фиксирует $f_B(r)$ как функцию $g_B(r)$ и ее производной:

$$f_B^{-1}(r) = g_B^{-1/2} g_B^{(D_A-1)/2}(r) r^{-(D_B-1)/2}. \quad (7)$$

Для РП функции преобразования $g_B(r)$ и $g_B(r_0)$ должны быть по крайней мере трижды дифференцируемыми.

Соответствующее уравнение второго порядка для квантовой системы B в D_B -мерном пространстве принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[\partial_r^2 + \frac{D_B - 1}{r} \partial_r + E_B - V_B(r) + \frac{1}{2} \{g_B, r\} - \left(l_B + \frac{D_B}{2} - 1 \right)^2 \frac{1}{r^2} - \right. \\ & \quad - \frac{(D_A - 2)^2}{4} \left(\frac{g_B'}{g_B} \right)^2 - \frac{D_A - 1}{2} \frac{D_A - 3}{2} \left(\frac{g_B'}{g_B} \right)^2 + \\ & \quad \left. + \frac{D_B - 1}{2} \frac{D_B - 3}{2} \frac{1}{r^2} \right] G_{l_B}(r, r_0, E_B, V_B, C_B) = \frac{\delta(r - r_0)}{r_0^{D_B-1}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\{g_B, r\} = g_B'''/g_B - (3/2)(g_B''/g_B)^2$ обозначает производную Шварца. Интересно заметить, что величины

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{g_B, r\} - \left(l_B + \frac{D_B}{2} - 1 \right)^2 \frac{1}{r^2} - \frac{(D_A - 2)^2}{4} \left(\frac{g_B'}{g_B} \right)^2 - \\ & \quad - \frac{D_A - 1}{2} \frac{D_A - 3}{2} \left(\frac{g_B'}{g_B} \right)^2 + \frac{D_B - 1}{2} \frac{D_B - 3}{2} \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

задают правильный вид члена, соответствующего “центробежному барьеру” в D_B -мерном пространстве $-l_B(l_B + D_B - 2)/r^2$ [12].

Уравнение (8) мы будем называть преобразованной системой (системой B). Система B должна, вообще говоря, находиться в евклидовом пространстве размерности D_B , отличающейся от D_A .

Чтобы привести уравнение (8) к виду стандартного уравнения Шредингера, следует составить правдоподобные подстановки, являющиеся неотъемлемой частью метода преобразования:

$$g_B'^2 V_A(g_B(r)) = -E_B, \quad (9)$$

$$g_B'^2 E_A = -V_B(r), \quad (10)$$

$$\frac{g_B'^2 (l_A + D_A/2 - 1)^2}{g_B^2} = \frac{(l_B + D_B/2 - 1)^2}{r^2}. \quad (11)$$

Для степенного потенциала конкретное значение размерности D_B зависит от вида функции $g_B(r)$, которая существенным образом зависит от $g_B(r)$, как на то указывает подстановка (9). Вторая подстановка (10) определяет новый потенциал $V_B(r)$

и в то же время дает собственные значения энергии E_B . Подстановка (11) дает требуемую связь между l_A и l_B . В этом методе не остается места для произвольного выбора величин $g_B(r)$, D_B , $V_B(r)$ и E_B при переходе от системы A к системе B .

Известное радиальное уравнение Шредингера для ФГ для квантовой системы B в D_B -мерном пространстве принимает вид

$$\left(\partial_r^2 + \frac{D_B - 1}{r} \partial_r + E_B - V_B(r) - \frac{l_B(l_B + D_B - 2)}{r^2} \right) G_{l_B}(r, r_0, E_B, V_B, C_B) = \frac{\delta(r - r_0)}{r_0^{D_B - 1}}. \quad (12)$$

ФГ для квантовой системы B $G_{l_B}(r, r_0, E_B, V_B, C_B)$ дается формулами (2), (4) и (7), при этом собственные функции энергии можно получить из этого уравнения. Соотношение между квантовыми числами “момента импульса” l_A и l_B получается из подстановки (11) в виде $4l_A = (b_A + 2)(2l_B + D_B - 2) - 2(D_A - 2)$, где b_A – степень потенциальной функции.

3. РП КУЛОНОВСКОЙ СИСТЕМЫ И СИСТЕМЫ ГО В ПРОСТРАНСТВАХ ВЫСШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

D_A -мерная кулоновская система характеризуется потенциалом

$$V_A(r) = V_{\text{Coul}}(r) = -\frac{2}{r}, \quad (13)$$

при этом собственные значения энергии равны $E_n^A = -1/n_A^2$ (в атомных единицах), где $n_A = n_r + l_A + (D_A - 1)/2$.

Радиальное уравнение для ФГ в размерности D_A для кулоновской системы имеет вид (согласно уравнению (1))

$$\begin{aligned} \left(\partial_r^2 + \frac{D_A - 1}{r} \partial_r - \frac{1}{n_A^2} + \frac{2}{r} - \frac{l_A(l_A + D_A - 2)}{r^2} \right) G_A \left(r, r_0, -\frac{1}{n_A^2}, -\frac{2}{r}, Ze^2 \right) = \\ = \frac{\delta(r - r_0)}{r_0^{D_A - 1}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где Ze^2 – характерная константа кулоновской системы.

Рассмотрим притягивающий кулоновский потенциал, подстановку (9) и потенциал $V_{\text{Coul}}^{(w)}(g_B(r)) = -2/g_B(r)$. Тогда простое интегрирование дает функцию преобразования

$$g_B(r) = \frac{1}{4} \left(\frac{E_B}{2} \right) r^2, \quad (15)$$

где постоянная интегрирования положена равной нулю, чтобы было выполнено локальное свойство $g_B(0) = 0$. Формула (10) принимает вид

$$V_B(r) = \frac{1}{16} (E_B)^2 (-E_A) r^2. \quad (16)$$

Ясно, что $V_B(r)$ представляет собой потенциал ГО. Приравнявая коэффициент при r^2 и характерную константу ГО $C_B^2 = \omega^2/4$, получаем

$$V_B(r) = \frac{1}{16} C_B^2 r^2. \quad (17)$$

При этом

$$E_B = \omega(2n_A), \quad (18)$$

что дает энергетический спектр квантовой системы B . Соотношения между квантовыми числами момента импульса l_A и l_B получаются из соотношения (11). Теперь можно выбрать размерность системы ГО для D_B -мерного пространства. Формула (11) дает $2n_A = n_B + D_B/2$, где $n_B = 2n_r + l_B$. Таким образом, получаем $E_B = \omega(n_B + D_B/2)$, где ФГ $G_B(r, r_0, E_B, \omega^2 r^2/4, \omega^2/2)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в D_B -мерном евклидовом пространстве:

$$\left(\partial_r^2 + \frac{D_B - 1}{r} \partial_r + \omega \left(n_B + \frac{D_B}{2} \right) - \frac{1}{4} \omega^2 r^2 - \frac{l_B(l_B + D_B - 2)}{r^2} \right) G_B \left(r, r_0, E_B, \frac{1}{4} \omega^2 r^2, \frac{1}{2} \omega^2 \right) = \frac{\delta(r - r_0)}{r_0^{D_B - 1}}. \quad (19)$$

Используя соотношения (2) и (4), получаем разложение по собственным функциям в терминах ФГ квантовой системы ГО:

$$G_B(r, r_0, E_B, V_B(r), C_B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_B^{-1}(r) (\varphi_A^{(n)}(g_B(r)) (\varphi_A^{(n)})^*(g_B(r_0))) f_B^{-1}(r_0)}{E - \omega(n_B + D_B/2) - i\epsilon}. \quad (20)$$

Явный вид собственно-энергетических функций ГО $\varphi_B^{(N)}(r)$ выводится из формулы (20):

$$\varphi_B^{(N)}(r) = N_B r^{l_B} e^{-\omega^2 r^2/4} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}(l_B - n_B), l_B + \frac{D_B}{2} - D_A + 2, \frac{1}{2} \omega^2 \right) \quad (21)$$

при собственных значениях энергии $E_B = \omega(n_B + D_B/2)$. Если применить РП для преобразования D_A -мерной кулоновской системы в систему ГО, можно выбрать размерность системы ГО.

4. НОРМАЛИЗУЕМОСТЬ ПОРОЖДЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Нормализуемость получаемой с помощью РП волновой функции квантовой системы B можно доказать при достаточно общих условиях, поскольку оно, по-видимому, сохраняет свойство нормализуемости в достаточно широких пределах. Условие для D_B -мерной собственной функции квантовой системы B имеет вид

$$\int_{N=0}^{\infty} (\varphi_B^{(N)})^2(r) r^{D_B-1} dr = |N_B|^{-2} = \text{finite} \neq 0.$$

Используя (3), (4) и (7), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_B^{(N)}(r) &= g_B^{-1/2} g_B^{(D_A-1)/2}(r) r^{-(D_B-1)/2} \varphi_A^{(n)}(g_B(r)), \\ |N_B|^2 \int_{g_B(0)}^{g_B(\infty)} (\varphi_A^{(n)})^2(g_B(r)) \left[-\frac{V_A(g_B(r))}{E_B} \right] d(g_B(r)) &= 1. \end{aligned}$$

С помощью подстановки (9) это уравнение сводится к

$$|N_B|^2 \frac{\langle V_A(g_B(r)) \rangle}{-E_B} = 1,$$

поскольку $g_B^2(r) = -E_B/V_A(g(r))$.

Таким образом, нормализуемыми являются все те функции $\varphi_B^{(N)}(r)$, для которых $E_B \neq 0$, для любой физической квантовой системы, поскольку $\langle V_A(g_B(r)) \rangle$ непременно существует. Волновая функция вновь порожденных квантовых систем почти всегда является нормализуемой в случае степенного закона, если волновые функции исходной квантовой системы являются нормализуемыми.

5. КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Чтобы найти решение в виде состояния рассеяния для кулоновского потенциала, применим РП к квантовой системе ГО. Наиболее существенная часть метода преобразования после проведения РП имеет вид

$$G_{\text{Coul}}(r, r_0, E_n^{\text{Coul}}, V_{\text{Coul}}(r), C_{\text{Coul}}) = f_{\text{Coul}}^{-1}(r) G_{\text{HO}}(g_{\text{Coul}}(r), g_{\text{Coul}}(r_0), g_{\text{Coul}}^2 E_n^{\text{HO}}, g_{\text{Coul}}^2 V_{\text{HO}}(g_{\text{Coul}}(r)), C_{\text{HO}}) f_{\text{Coul}}^{-1}(r_0), \quad (22)$$

где $G_{\text{HO}} = G_B$, $E_n^{\text{HO}} = E_B$ и $V_{\text{HO}} = V_B$. Величины $g_{\text{Coul}}(r)$ и $f_{\text{Coul}}^{-1}(r)$ получаются из формализма РП (см. ниже).

Теперь подстановка (9) принимает вид

$$g_{\text{Coul}}^2 C_{\text{HO}}^2 g_{\text{Coul}}^2 = -E_n^{\text{Coul}}. \quad (23)$$

Интегрирование соотношения (23) дает

$$g_{\text{Coul}}(r) = \pm \sqrt{2} \left(-\frac{E_n^{\text{Coul}}}{C_{\text{HO}}^2} \right)^{1/3} \sqrt{r}. \quad (24)$$

Постоянная интегрирования положена равной нулю, что эквивалентно выбору $g_{\text{Coul}}(0) = 0$ и является желательным локальным свойством $g_{\text{Coul}}(r)$.

Что касается состояний рассеяния кулоновской системы, формула (17) показывает, что мы должны перейти от инвертированного ГО к кулоновской системе, $C_{\text{HO}} \rightarrow iC_{\text{HO}}$, и тогда выражение для $g_{\text{Coul}}(r)$ принимает вид

$$g_{\text{Coul}}(r) = \pm \sqrt{2} \left(\frac{E_n^{\text{Coul}}}{C_{\text{HO}}^2} \right)^{1/4} \sqrt{r}. \quad (25)$$

Подстановка (10) с учетом (25) дает

$$V_{\text{Coul}}(r) = -\frac{1}{2} E_n^{\text{HO}} \sqrt{-\frac{E_n^{\text{Coul}}}{C_{\text{HO}}^2}} \frac{1}{r} = -C_{\text{Coul}}^2 \frac{1}{r}, \quad (26)$$

где C_{Coul}^2 – кулоновская характеристическая постоянная.

Таким образом, в случае рассеяния $E_n^{\text{Coul}} = k^2 > 0$, можно заменить E_n^{Coul} на k^2 и записать аналог разложения (20) как

$$G_{\text{Coul}}\left(r, r_0, k^2, -\frac{C_{\text{Coul}}^2}{\gamma}, C_{\text{Coul}}\right) = \int_0^\infty \frac{dE}{E - k^2 - i\epsilon} f_{\text{Coul}}^{-1}(r) \varphi_{\text{HO}}(g_{\text{Coul}}(r), E, iC_{\text{HO}}) \times \\ \times \varphi_{\text{HO}}^*(g_{\text{Coul}}(r_0), E, iC_{\text{HO}}) f_{\text{Coul}}^{-1}(r_0). \quad (27)$$

Чтобы найти волновую функцию квантовой системы B , принадлежащую континууму, используем символическое тождество

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(E - k^2) \pm i\epsilon} = P \frac{1}{E - k^2} \mp i\pi \delta(E - k^2), \quad (28)$$

откуда получаем

$$G_B(r, r_0, k^2, V_B(r), C_B) = \int_0^\infty \frac{dE}{E - k^2} f_B^{-1}(r) \varphi_A(g_B(r), E, iC_B) \times \\ \times \varphi_A^*(g_B(r_0), E, iC_B) f_B^{-1}(r_0) \mp i\pi \int_0^\infty dE \delta(E - k^2) f_B^{-1}(r) \varphi_A(g_B(r), E, iC_B) \times \\ \times \varphi_A^*(g_B(r_0), E, iC_B) f_B^{-1}(r_0). \quad (29)$$

Мнимая часть этого выражения дает непрерывные собственные значения энергии, поэтому

$$G_B(r, r_0, k^2, V_B(r), C_B) = \pi \int_0^\infty dE \delta(E - k^2) f_B^{-1}(r) \varphi_A(g_B(r), E, iC_B) \times \\ \times \varphi_A^*(g_B(r_0), E, iC_B) f_B^{-1}(r_0), \quad (30)$$

мнимая часть тогда принимает вид

$$G_{\text{Coul}}\left(r, r_0, k^2, -\frac{C_{\text{Coul}}^2}{r}, C_{\text{Coul}}\right) = \pi \int_0^\infty dE \delta(E - k^2) \times \\ \times f_{\text{Coul}}^{-1}(r) \varphi_{\text{HO}}(g_{\text{Coul}}(r), E, iC_{\text{HO}}) \varphi_{\text{HO}}^*(g_{\text{Coul}}(r_0), E, iC_{\text{HO}}) f_{\text{Coul}}^{-1}(r_0). \quad (31)$$

Волновая функция состояния рассеяния кулоновской системы имеет вид

$$\varphi_{\text{Coul}}^{\text{scatt}}(r, E, C_{\text{Coul}}) = N_B r^{l_{\text{Coul}}} e^{\pm ikr} {}_2F_1\left(\frac{i\epsilon^2}{k} + l_{\text{Coul}} - \frac{D_B}{2} + \frac{D_C}{2} + \frac{1}{4}, \right. \\ \left. 2l_{\text{Coul}} - \frac{D_B}{2} + \frac{D_C}{2} + 2, 2ikr\right). \quad (32)$$

Функция $\varphi_{\text{Coul}}^{\text{scatt}}(r, E, C_{\text{Coul}})$ известна, поскольку известны $\varphi_{\text{HO}}(r, E, iC_{\text{HO}})$ и $g_{\text{Coul}}(r)$. Выражение (32) представляет собой обобщенный вид кулоновского рассеяния в пространстве высших размерностей.

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе, используя метод РП, мы рассмотрели порождение точных аналитических решений уравнения Шредингера для ФГ в виде связанных состояний и состояний рассеяния. Различные авторы более ранних исследований отображений рассматривали одномерную систему и/или полностью игнорировали важный

вопрос о размерности пространства преобразованной системы. Дополнительным преимуществом метода РП является то, что с помощью функционального преобразования оказывается возможным предварительно определить размерность пространства, в которое будет вложена новая квантовая система. Другими словами, преобразованную компоненту РП можно рассматривать как средство размерной редукции или размерного расширения порожденных квантовых систем.

В настоящей работе мы показали, как общее соотношение, связанное с квантово-механическими ФГ для двух различных потенциалов, можно просто вывести с помощью отображения кулоновского потенциала и потенциала ГО, используя их в качестве контрольных объектов. Функциональное преобразование для ФГ дается формулой (4), полученная ФГ удовлетворяет преобразованному уравнению Шредингера (12). Размерность евклидова пространства преобразованной квантовой системы можно выбрать с помощью соотношения (6).

Отметим, что процедуру РП можно применять повторно в случае с центральным потенциалом, состоящим из нескольких степенных слагаемых, если выбрать другие рабочие потенциалы так, чтобы породить многообразие решенных квантовых систем. Выбрать рабочий потенциал можно, в принципе, $(2^n - 1)$ различными способами, если исходная квантовая система описывается потенциалом, состоящим из n членов. Процедура преобразования, основанная только на координатном преобразовании, может порождать новый точно решаемый потенциал из степенного потенциала, но, как выяснилось, она является неэффективной, поскольку приводит к проблемам с размерностью (евклидова) пространства, в которое переходит преобразованная система. Иногда это приводит к дробной размерности, которую еще необходимо правильно интерпретировать.

Кроме того, в отличие от точно решаемого потенциала, состоящего из одного члена, точно решаемый потенциал, состоящий из двух или из многих членов, должен удовлетворять некоторым условиям связи. Заслуживает также внимания тот факт, что при РП уравнение связи дает собственные значения энергии и наоборот.

Список литературы

- [1] S. A. S. Ahmed, B. C. Borah, D. Sharma, *Eur. Phys. J. D*, **17**:1 (2001), 5–11.
- [2] S. A. S. Ahmed, B. C. Borah, *Indian J. Phys. B*, **76**:2 (2001), 205–208.
- [3] S. A. S. Ahmed, L. Buragohain, *Latin.-Amer. J. Phys. Educ.*, **3**:3 (2009), 573–577.
- [4] S. A. S. Ahmed, L. Buragohain, N. Saikia, *Internat. J. Pure Appl. Phys.*, **4**:3 (2008), 233–250.
- [5] N. Saikia, S. A. S. Ahmed, *Physica Scr.*, **81**:3 (2010), 035006, 6 pp.
- [6] S. A. S. Ahmed, L. Buragohain, *Physica Scr.*, **80**:2 (2009), 025004, 6 pp.
- [7] N. Saikia, S. A. S. Ahmed, *Physica Scr.*, **83**:3 (2011), 035006, 8 pp.
- [8] L. Buragohain, S. A. S. Ahmed, *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, **3**:3 (2009), 573–577.
- [9] S. A. S. Ahmed, L. Buragohain, *EJTP*, **7**:23 (2010), 145–154.
- [10] S. S. Vassan, S. Seetharaman, K. Raghunathan, *Pramana*, **38**:1 (1992), 1–10.
- [11] F. Steiner, *Phys. Lett. A*, **106**:8 (1984), 356–362.
- [12] J. D. Louck, *J. Molecular Spectroscopy*, **4**:1–6 (1960), 298–333.

Поступила в редакцию 30.12.2010,
после доработки 15.03.2011