Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Аро, Могут ли квантовые эффекты, обусловленные безмассовым комформно взаимодействующим полем, устранить гравитационные сингулярности?, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 1, 162–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6889>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:10:06

© 2012 г.

Ж. Аро*

МОГУТ ЛИ КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ БЕЗМАССОВЫМ КОНФОРМНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМ ПОЛЕМ, УСТРАНИТЬ ГРАВИТАЦИОННЫЕ СИНГУЛЯРНОСТИ?

С помощью квантовых поправок, обусловленных безмассовыми полями, конформно связанными с гравитацией, исследуется возможность избежать сингулярностей, которые появляются в плоской модели Фридмана–Робертсона–Уолкера. Предполагается, что вселенная содержит баротропную идеальную жидкость с уравнением состояния $p = \omega\rho$, где p – давление, ρ – плотность энергии. Изучается динамика модели для всех значений параметра ω , а также для всех значений коэффициентов конформной аномалии α и β . Показано, что сингулярности можно избежать только в случае $\alpha > 0$ и $\beta < 0$. Для того чтобы получить расширяющуюся вселенную Фридмана на поздних временах при $\omega > -1$ (таким поведением на поздних временах может обладать только однопараметрическое семейство решений, но не общее решение), нужно очень точно подобрать начальные условия несингулярных решений на ранних временах. К таким несингулярным решениям относятся общее решение (двухпараметрическое семейство), выходящее из фазы сжатия де Ситтера, и однопараметрическое семейство, выходящее из фазы сжатия Фридмана. С другой стороны, для $\omega < -1$ (фантомное поле) проблема устранения сингулярностей является более запутанной, потому что если рассматривать фазу расширения Фридмана на ранних временах, то наряду с точным подбором начальных условий нужно точно подобрать параметры α и β , чтобы получить несингулярное поведение в будущем, поскольку только однопараметрическое семейство решений следует фазе сжатия Фридмана на поздних временах и только частное решение ведет себя как сжимающаяся вселенная де Ситтера. Остальные решения имеют сингулярности будущего.

Ключевые слова: избежание космологических сингулярностей, квазиклассическое приближение, конформная аномалия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классические решения общей теории относительности для модели Фридмана–Робертсона–Уолкера (ФРУ) содержат в общем случае сингулярности (Большой взрыв, Большой разрыв, внезапные сингулярности будущего). Это означает, что вблизи указанных сингулярностей кривизна пространства-времени сколь угодно велика.

*Department of Applied Mathematics I, Polytechnic University of Catalonia, Barcelona, Spain. E-mail: jaime.haro@upc.edu

При этом для расчета кривизны на длине порядка масштаба Планка следует учитывать квантовые эффекты. Эти квантовые эффекты могут привести к нарушению так называемых энергетических условий [1] и, следовательно, к радикальной модификации классических решений. По этой причине квантовые эффекты, возможно, устраняют классические сингулярности [2].

В настоящей статье мы рассматриваем квантовые эффекты, порождаемые безмассовыми полями, конформно связанными с гравитацией. Это особый случай, когда для плоской вселенной ФРУ квантовый вакуумный тензор напряжений, зависящий от коэффициентов конформной аномалии, которые мы обозначим через α и β , может быть вычислен явно. Тогда с использованием аномалии следа и уравнения сохранения нетрудно вычислить плотность энергии вакуума, которая вносит вклад в квазиклассическое уравнение Фридмана. Это уравнение не интегрируется аналитически, но можно провести его качественное исследование в фазовом пространстве, что составляет основную цель настоящей работы.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 дан обзор классических решений для плоской вселенной ФРУ, содержащей баротропную идеальную жидкость; введены квантовые эффекты и выписано квазиклассическое уравнение Фредгольма, зависящее от параметров α и β , которые, как мы предполагаем, могут принимать все возможные значения.

В разделе 3 рассмотрен простейший случай $\alpha = 0$; при этом квазиклассическое уравнение Фредгольма становится дифференциальным уравнением первого порядка и может быть проинтегрировано. В результате мы приходим к выводу, что сингулярностей избежать невозможно.

В разделе 4 изучается другой простой случай, соответствующий пустой вселенной (которая не содержит баротропную жидкость; принимаются во внимание только квантовые эффекты). Особый случай $\alpha < 0$, $\beta < 0$ отвечает модели Старобинского [3]. Показано, что в этой модели все решения содержат сингулярности, за исключением случая, когда появляется неустойчивое решение де Ситтера, а также неустойчивое решение, которое связывает решение де Ситтера с точкой $H = \dot{H} = 0$ (где H – параметр Хаббла). Наконец, в разделе 5 изучается общий случай, т.е. вселенная, заполненная идеальной баротропной жидкостью с уравнением состояния $p = \omega\rho$. Единственно возможными для существования несингулярных решений являются параметры $\alpha > 0$ и $\beta < 0$. Принимая точку зрения работ [4], [5], мы показываем, что при $\omega > -1$ несингулярное поведение на ранних временах, которое может привести на более поздних временах к фазе расширения Фридмана, отвечает фазам сжатия де Ситтера и Фридмана. Однако их начальные условия должны быть очень точно подобраны для того, чтобы соответствовать фазе расширения Фридмана. С другой стороны, при $\omega < -1$ для решений, начинающихся с фазы расширения Фридмана на ранних временах, несингулярное поведение на поздних временах отвечает фазам сжатия Фридмана и де Ситтера. В этом случае для получения несингулярных решений наряду с точным подбором начальных условий также нужно точно подобрать параметры α и β . Но в обоих случаях $\omega < -1$ и $\omega > -1$ несингулярные решения неустойчивы в том смысле, что малое возмущение переводит их в сингулярный режим.

В разделе 6 мы сравниваем наши результаты с ранее опубликованными в литературе.

В статье используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

2. ОБЗОР КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ КОСМОЛОГИЙ

2.1. Классическая космология. Мы будем использовать следующие обозначения: $\kappa^2 = 16\pi G$, G – постоянная Ньютона, ρ – плотность энергии, p – давление, ω – безразмерный параметр и $H = \dot{a}/a$ – параметр Хаббла, где a – скалярный коэффициент. Тогда для плоской космологии ФРУ уравнение Фридмана и уравнение сохранения можно написать соответственно в виде

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{6}\rho, \quad \dot{\rho} = -3H(\rho + p), \quad (1)$$

а уравнение состояния для баротропной идеальной жидкости, которая будет рассматриваться в настоящей статье, имеет вид $p = \omega\rho$. Используя производную уравнения Фридмана и остальные два уравнения, можно легко получить уравнение для “ускорения”:

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{4}(1 + \omega)\rho. \quad (2)$$

Комбинируя уравнения (1) и (2), можно исключить ρ и написать уравнение

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}(1 + \omega)H^2,$$

интегрируя которое, получим

$$H(t) = \frac{2}{3(1 + \omega)} \frac{1}{t - t_s}, \quad t_s \equiv t_0 - \frac{2}{3H_0(1 + \omega)}, \quad (3)$$

где $H_0 = H(t_0)$ – начальное условие.

Используя определение параметра Хаббла, мы получаем следующее поведение скалярного коэффициента:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t - t_s}{t_0 - t_s} \right)^{2/3(1 + \omega)}, \quad (4)$$

а из уравнения Фридмана имеем

$$\rho(t) = \frac{8}{3\kappa^2(1 + \omega)^2} \frac{1}{(t - t_s)^2}. \quad (5)$$

При описании динамики вселенной уравнениями (3)–(5) мы будем говорить, что вселенная находится во фазе расширения (фазе сжатия) Фридмана, если $H_0 > 0$ (соответственно $H_0 < 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предполагая, что $H_0 > 0$, при $\omega > -1$ имеем $t_s < t_0$, т.е. фаза расширения Фридмана сингулярна на ранних временах (сингулярность Большого взрыва). С другой стороны, при $\omega < -1$ имеем $t_s > t_0$, поэтому фаза расширения Фридмана сингулярна на поздних временах (сингулярность Большого разрыва) [6]. В случае $H_0 < 0$ и $\omega > -1$ имеем $t_s > t_0$, поэтому фаза сжатия Фридмана сингулярна на поздних временах. С другой стороны, при $\omega < -1$ имеем $t_s < t_0$, так что фаза сжатия Фридмана сингулярна на малых временах.

2.2. Квантовые эффекты. Аномальный след для безмассового конформно связанного поля определяется выражением [7]

$$T_{\text{vac}} = \alpha \square R - \frac{\beta}{2} G,$$

где R – скалярная кривизна и $G = -2(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - R^2/3)$ – инвариант кривизны Гаусса–Бонне (чтобы получить такое выражение для G , мы использовали тот факт, что тензор Вейля исчезает в геометрии ФРУ). В терминах параметра Хаббла можно написать [2]

$$T_{\text{vac}} = 6\alpha(\ddot{H} + 12H^2\dot{H} + 7H\ddot{H} + 4\dot{H}^2) - 12\beta(H^4 + H^2\dot{H}),$$

где (см., например, работы [8], [9])

$$\alpha = \frac{1}{2880\pi^2}(N_0 + 6N_{1/2} + 12N_1), \quad \beta = -\frac{1}{2880\pi^2}\left(N_0 + \frac{11}{2}N_{1/2} + 62N_1\right); \quad (6)$$

в равенствах (6) N_0 – число скалярных полей, $N_{1/2}$ – число четырехкомпонентных нейтрино и N_1 – число электромагнитных полей.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как указывалось в работах [8]–[11], величина α произвольна и на нее влияют и метод регуляризации, и поля, присутствующие в нашей Вселенной. Например, размерная регуляризация приводит к формуле (6), а метод расщепления точки – к соотношению $\alpha = (1/2880\pi^2)(N_0 + 3N_{1/2} - 18N_1)$ (см. работу [2]). С другой стороны, параметр β не зависит от схемы ренормировки. Таким образом, в настоящей статье мы можем рассмотреть все значения обоих параметров, хотя параметр β должен быть отрицательным.

Чтобы получить плотность энергии вакуума, можно использовать аномалию следа, $T_{\text{vac}} = \rho_{\text{vac}} - 3p_{\text{vac}}$, и уравнение сохранения. Результат имеет вид

$$\rho_{\text{vac}} = 6\alpha\left(3H^2\dot{H} + H\ddot{H} - \frac{1}{2}\dot{H}^2\right) - 3\beta H^4 + Ca^{-4}, \quad (7)$$

где C – константа интегрирования, которая в нашем случае плоского пространства-времени ФРУ равна нулю. Эту константу можно определить либо путем непосредственного вычисления с использованием регуляризации, либо на основании того, что для статического пространства-времени ($a = a_0 = \text{const}$) уравнение (7) сводится к $\rho_{\text{vac}} = Ca_0^{-4}$, поэтому плоское пространство-время ФРУ сводится к пространству-времени Минковского, для которого $\rho_{\text{vac}} = 0$. Таким образом, в плоском случае $C = 0$. С другой стороны, для замкнутого пространства-времени мы имеем $C = 6(\alpha - \beta)$ (подробности см. в работе [2]). В этом случае последний член в уравнении (7) представляет собой вклад энергии Казимира. Принимая во внимание выражение для плотности энергии вакуума, запишем квазиклассическое уравнение Фридмана в виде

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{6}(\rho + \rho_{\text{vac}}).$$

Используя его производную, уравнение сохранения и аномалию следа, получим квазиклассическое уравнение для ускорения:

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{4}\left((1 + \omega)\rho + \rho_{\text{vac}} + \frac{1}{3}(\rho_{\text{vac}} - T_{\text{vac}})\right).$$

Исключая из этих уравнений ρ , получим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$-\frac{4}{\kappa^2}\dot{H} - \rho_{\text{vac}} - \frac{1}{3}(\rho_{\text{vac}} - T_{\text{vac}}) = (1 + \omega)\frac{6}{\kappa^2}H^2 - (1 + \omega)\rho_{\text{vac}},$$

которое в терминах параметра Хаббла запишем в виде

$$-\frac{4}{\kappa^2}\dot{H} - (1 + \omega)\frac{6}{\kappa^2}H^2 - 3\beta(\omega + 1)H^4 + (18\alpha(\omega + 1) - 4\beta)H^2\dot{H} + 6\alpha(\omega + 2)H\ddot{H} + 3\alpha(\omega + 3)\dot{H}^2 + 2\alpha\ddot{H} = 0. \quad (8)$$

3. СЛУЧАЙ $\alpha = 0$

В этом разделе мы рассматриваем простейший случай $\alpha = 0$ и показываем, что квантовые эффекты не устраняют сингулярности. При $\alpha = 0$ уравнение (8) сводится к следующему дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\dot{H} = -\frac{1 + \omega}{4} \left(\frac{6H^2/\kappa^2 + 3\beta H^4}{1/\kappa^2 + \beta H^2} \right). \quad (9)$$

3.1. Случай $\alpha = 0$ и $\beta > 0$. Интегрируя уравнение (9), получим

$$-\frac{1}{H(t)} + \sqrt{\frac{\beta\kappa^2}{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta\kappa^2}{2}}H(t)\right) = -\frac{3}{2}(1 + \omega)(t - t_s) + \sqrt{\frac{\beta\kappa^2}{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta\kappa^2}{2}}H_0\right).$$

Если $\omega < -1$, то при $t \rightarrow -\infty$ имеем $H \rightarrow 0$, т.е. квантовые эффекты малы на ранних временах. С другой стороны, при $t \rightarrow \bar{t}_s$, где

$$\bar{t}_s \equiv t_s - \frac{2}{3(1 + \omega)} \sqrt{\frac{\beta\kappa^2}{2}} \left(\pi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta\kappa^2}{2}}H_0\right) \right), \quad (10)$$

мы имеем $H \rightarrow \infty$, т.е. квантовые эффекты не устраняют сингулярность Большого разрыва, которая появляется при $t = \bar{t}_s$.

Если $\omega > -1$, то $H \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. квантовые эффекты малы на поздних временах. С другой стороны, $H \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \bar{t}_s$, т.е. квантовые эффекты не устраняют сингулярность Большого взрыва, которая появляется при $t = \bar{t}_s$.

3.2. Случай $\alpha = 0$ и $\beta < 0$. Решение уравнения (9) имеет вид

$$-\frac{1}{H(t)} + \frac{1}{2H_+} \ln \left| \frac{H(t) - H_+}{H_0 - H_+} \frac{H_0 + H_+}{H(t) + H_+} \right| = -\frac{3}{2}(1 + \omega)(t - t_s), \quad H_+ \equiv \sqrt{-\frac{2}{\beta\kappa^2}}.$$

Пусть $\omega < -1$. Тогда для $H_0 \in (0, H_+/\sqrt{2})$ имеем $H \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$; при $H \rightarrow H_+/\sqrt{2}$ имеем $\dot{H}(\bar{t}_s) = +\infty$, где теперь

$$\bar{t}_s \equiv t_s + \frac{2}{3(1 + \omega)} \left(\frac{\sqrt{2}}{H_+} - \frac{1}{2H_+} \ln \left| \frac{H_+/\sqrt{2} - H_+}{H_0 - H_+} \frac{H_0 + H_+}{H_+/\sqrt{2} + H_+} \right| \right), \quad (11)$$

т.е. эти решения сингулярны (скалярная кривизна $R \equiv 6(2H^2 + \dot{H})$ расходится). Если $H_0 \in (H_+/\sqrt{2}, H_+)$, то $H \rightarrow H_+$ при $t \rightarrow -\infty$, однако при $t = \bar{t}_s$ величина $\dot{H}$ расходится. И, наконец, при $H_0 \in (H_+, \infty)$ существует сингулярность в конечный момент времени. Фактически $H \rightarrow H_+$ при $t \rightarrow -\infty$ и $H \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_s$.

Рассмотрим теперь противоположный случай $\omega > -1$. Если $H_0 \in (0, H_+/\sqrt{2})$, то $H \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, при этом если $H \rightarrow H_+/\sqrt{2}$, то $\dot{H}(t_s) = +\infty$, где величина t_s задана в формуле (11), т.е. эти решения сингулярны. Если $H_0 \in (H_+/\sqrt{2}, H_+)$ то $H \rightarrow H_+$ при $t \rightarrow \infty$, однако при $t = t_s$ величина $\dot{H}$ расходится. И, наконец, при $H_0 \in (H_+, \infty)$ существует сингулярность в конечный момент времени. Фактически $H \rightarrow H_+$ при $t \rightarrow \infty$ и $H \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_s$.

4. ПУСТАЯ ВСЕЛЕННАЯ

Еще одним простым случаем является ограничение на инвариантное многообразие $\rho \equiv 0$. Здесь инвариантность многообразия означает, что если изначально траектория находилась на этом многообразии, то она остается на нем все время. Из уравнения сохранения можно получить, что если изначально ρ равно нулю, то оно остается нулевым все время. В этом случае нам потребуется только квазиклассическое уравнение Фридмана, т.е. следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$H^2 = \kappa^2 \alpha \left(3H^2 \dot{H} + H \ddot{H} - \frac{1}{2} \dot{H}^2 \right) - \frac{\kappa^2 \beta}{2} H^4. \quad (12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Решения, в которых $H > 0$, и решения, в которых $H < 0$, не связаны между собой. Чтобы понять это, применим замену переменной $Z \equiv \dot{H}/H$, сделав систему несингулярной при $H = 0$. Тогда при $H = 0$ система имеет вид $\dot{Z} = -Z^2/2 + 1/\kappa^2 \alpha$, а это означает, что решения не могут пересекать ось $H = 0$.

Поскольку уравнение (12) является автономным дифференциальным уравнением второго порядка (не зависит явно от времени), его решения инвариантны относительно сдвига по времени. Таким образом, общее решение представляет собой однопараметрическое семейство. Принимая это во внимание, докажем существование однопараметрического семейства сингулярных решений. Прежде всего будем искать частное сингулярное решение, ведущее себя вблизи сингулярности как $H(t) = C/(t - t_s)$. Подставляя это выражение в (12) и сохраняя только ведущие сингулярные члены, получим, что константа C принимает значения

$$C_{\pm} = \frac{3\alpha}{\beta} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\beta}{3\alpha}} \right).$$

Ясно, что здесь нужно наложить условие $\beta/3\alpha \geq -1$. Для скалярного коэффициента (4) имеем

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t - t_s}{t_0 - t_s} \right)^{C_{\pm}}.$$

Тогда при $\beta/3\alpha > 0$ решение с константой C_+ имеет сингулярность типа $a(t_s) = 0$, а решение с константой C_- – сингулярность типа $a(t_s) = \infty$. При $-1 \leq \beta/3\alpha < 0$ оба решения удовлетворяют условию $a(t_s) = 0$.

Теперь мы можем доказать существование однопараметрического семейства сингулярных решений, которые имеют вблизи сингулярности ведущий член вида $H(t) = C_{\pm}/(t - t_s)$. Для этого прежде всего преобразуем дифференциальное уравнение (12) в уравнение первого порядка, произведя замену $u(H) = \dot{H}(t)$. Тогда уравнение примет вид

$$H^2 = \kappa^2 \alpha \left(3H^2 u + H u u' - \frac{1}{2} u^2 \right) - \frac{\kappa^2 \beta}{2} H^4,$$

где $u'(H) \equiv du/dH$. Новая переменная вблизи сингулярности решения $H(t) = C_{\pm}/(t - t_s)$ имеет вид $u = -H^2/C_{\pm}$. Тогда, если уравнение линеаризовано вблизи этой точки, мы получим следующее общее решение при $H \rightarrow \pm\infty$:

$$u_{\text{linearized}} = \begin{cases} -\frac{1}{C_{\pm}} H^2 v + K |H|^{1-3C_{\pm}} - \frac{C_{\pm}}{\kappa^2 \alpha (3C_{\pm} - 1)}, & C_{\pm} \neq \frac{1}{3}, \\ -\frac{1}{C_{\pm}} H^2 + K - \frac{1}{3\kappa^2} \ln |H|, & C_{\pm} = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

где K – произвольная константа.

Понятно, что нужно наложить условие $C_{\pm} > -1/3$. Тогда, если $-1 < \beta/3\alpha < 0$ или $\beta/3\alpha > 15$, мы получим $C_{\pm} > -1/3$, и однопараметрическое семейство решений существует для обоих значений C . Если $0 < \beta/3\alpha < 15$, то для C_+ существует однопараметрическое семейство, но для C_- следует положить $K = 0$, т. е. существует только частное решение.

Теперь мы можем провести качественный анализ. Сначала отметим, что если $\beta < 0$, то существуют два решения де Ситтера $H_{\pm} = \pm\sqrt{-2/\kappa^2\beta}$. После замены переменной $p \equiv \sqrt{|H|}$ [4], [5] получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{p}^2}{2} + V(p) \right) = -3\epsilon p^2 \dot{p}^2, \quad (13)$$

где

$$\epsilon = \text{sgn}(H), \quad V(p) = -\frac{p^2}{4\kappa^2\alpha} \left(1 + \frac{\kappa^2\beta}{6} p^4 \right).$$

В фазовом пространстве имеем систему уравнений

$$\dot{p} = y, \quad \dot{y} = -3\epsilon p^2 y - V'(p). \quad (14)$$

Мы рассмотрим только область $H > 0$, потому что решения в областях $H > 0$ и $H < 0$ не связаны между собой. Точка $p_+ \equiv \sqrt{H_+}$ является экстремальной точкой потенциала V . Линеаризуя систему (14), получим, что при $\alpha < 0$ критическая точка $(p_+, 0)$ является седловой (линеаризованная вблизи этой точки система имеет собственные числа разных знаков и, таким образом, неустойчива вблизи этой точки), а при $\alpha > 0$ критическая точка асимптотически устойчива (линеаризованная система имеет два собственных значения с отрицательной действительной частью, следовательно, точка $(p_+, 0)$ является аттрактором). Используя выражение для потенциала и учитывая, что система диссипативна при $H > 0$, получим в фазовом пространстве (p, y) при $H > 0$ следующие результаты.

1. При $\alpha > 0$, $\beta > 0$ мы имеем $V < 0$ в точке $(0, \infty)$ и $V(0) = 0$. Точка $(0, 0)$ является неустойчивой критической точкой. Решения сингулярны как на ранних, так и на поздних временах (при $p \rightarrow \infty$). Несингулярным на поздних временах является только решение, имеющее траекторию, приходящую в точку $p = 0$ с нулевой энергией (т. е. приходящее в точку $(0, 0)$). На ранних временах несингулярным является только решение, которое начинается из точки $p = 0$ с нулевой энергией (т. е. начинается из точки $(0, 0)$).

2. При $\alpha < 0$, $\beta > 0$ мы имеем $V > 0$ в точке $(0, \infty)$ и $V(0) = 0$. Точка $(0, 0)$ является асимптотически устойчивой критической точкой, поэтому решения сингулярны

только на ранних временах. На поздних временах они приближаются к устойчивой критической точке.

3. При $\alpha > 0$, $\beta < 0$ система имеет две критические точки. Точка $(0, 0)$ является неустойчивой критической точкой, а точка $(p_+, 0)$ асимптотически устойчива. Решения сингулярны только на ранних временах. На поздних временах они осциллируют и прижимаются к устойчивой точке, т. е. точка $(p_+, 0)$ является глобальным аттрактором. Более того, существует решение, которое заканчивается в точке $(0, 0)$, и несингулярное решение, которое начинается в точке $(0, 0)$ (начинается с нулевой энергии) и заканчивается в точке $(p_+, 0)$.

4. Случай $\alpha < 0$, $\beta < 0$ соответствует модели Старобинского. Система имеет две критические точки: точка $(0, 0)$ является асимптотически устойчивой критической точкой, а точка $(p_+, 0)$ седловая. Существуют решения, которые не пересекают гребень $p = p_+$. Эти решения сингулярны как на ранних, так и на поздних временах, они соответствуют траекториям, которые не могут пройти через вершину потенциала. Существуют другие решения, которые дважды пересекают гребень $p = p_+$, они тоже сингулярны как на ранних, так и на поздних временах. Эти траектории проходят через вершину потенциала, претерпевают отскоки в окрестности точки $p = 0$ и еще раз проходят через вершину потенциала. Существуют решения, которые один раз пересекают гребень $p = p_+$. Эти решения сингулярны на ранних временах, однако на поздних временах они представляют собой спирали, сжимающиеся к началу координат. Такие решения проходят через вершину потенциала один раз и затем несколько раз претерпевают отскок в окрестности точки $p = 0$, прижимаясь к ней. Асимптотическое поведение последних решений при $t \rightarrow \infty$ таково (см., например, работу [12]):

$$H \cong \frac{2}{3t} \left(1 - \frac{\sin \sqrt{-2t/\alpha\kappa^2}}{\sqrt{-2t/\alpha\kappa^2}} \right).$$

Наконец, существуют всего два неустойчивых несингулярных решения, одно из которых переходит из точки $(p_+, 0)$ в точку $(0, 0)$, а другое является решением де Ситтера в точке $(p_+, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Уравнение (12) не меняется при замене $H(t)$ на $-H(-t)$, а это означает, что решения в области $H < 0$ можно получить из решений, изученных выше, с помощью замены времени на обратное.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $\beta/3\alpha < -1$ значения $C_{\pm}$ комплексны. Это происходит из-за того, что система не может монотонно подходить к точке $p = \infty$ (или уходить из нее), поскольку антидиссипационный эффект недостаточно велик по сравнению с потенциальной силой [4].

Случай $\omega = -1$ (инвариантными являются многообразия $\rho = \text{const}$) эквивалентен случаю пустой вселенной с космологической постоянной. Применяя замену переменной $p \equiv \sqrt{|H|}$, вновь получим уравнение (13), где теперь

$$V(p) = -\frac{p^2}{4\kappa^2\alpha} \left(1 + \frac{\kappa^2\beta}{6}p^4 + \frac{\rho\kappa^2}{6p^4} \right).$$

В зависимости от значений параметров α , β и параметра $\Lambda \equiv 1 + \rho\kappa^4\beta/3$, связанного с критическими точками потенциала V , существуют шесть различных случаев. Решения с $\alpha > 0$, являются частными для более общего случая, который мы изучим

в следующем разделе. Три остальных случая можно описать следующим образом (мы приводим решения для $H > 0$ с учетом того, что решения с $H > 0$ и $H < 0$ не связаны).

1. При $\alpha < 0$, $\beta < 0$ и $\Lambda < 0$ потенциал V есть убывающая функция, удовлетворяющая условиям $V(0) = +\infty$ и $V(\infty) = -\infty$ (этот потенциал изображен на рис. 1с в работе [4]). Поведение решений в данном случае является очень простым: они сингулярны как на ранних, так и на поздних временах, выходят из точки $p = +\infty$, достигают некоторого минимального значения и возвращаются в точку $p = +\infty$.

2. При $\alpha < 0$, $\beta < 0$ и $\Lambda \geq 0$ потенциал V удовлетворяет условиям $V(0) = +\infty$ и $V(\infty) = -\infty$, а также имеет минимум и максимум в точках

$$p_{\min} = \left(-\frac{1 - \sqrt{\Lambda}}{\beta\kappa^2} \right)^{1/4}, \quad p_{\max} = \left(-\frac{1 + \sqrt{\Lambda}}{\beta\kappa^2} \right)^{1/4} \quad (15)$$

соответственно (этот потенциал изображен на рис. 1d в работе [4]). Решения, выходящие из точки $p = +\infty$, переходят через максимум потенциала и возвращаются в точку $p = +\infty$. Другие решения выходят из точки $p = +\infty$ и возвращаются в нее, не проходя через максимум потенциала. Существуют также решения, которые выходят из точки $p = +\infty$, проходят через максимум потенциала и захватываются впадиной (минимумом потенциала). Эти решения сингулярны на ранних временах, а на поздних временах приближаются к фазе де Ситтера с $H = (-(1/\beta\kappa^2)(1 - \sqrt{\Lambda}))^{1/2}$. Наконец, существуют неустойчивое решение де Ситтера (максимум потенциала), и два решения, которые либо начинаются, либо заканчиваются на этих неустойчивых решениях де Ситтера.

3. При $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ потенциал V удовлетворяет условию $V(0) = V(\infty) = \infty$ и имеет минимум в точке $p = p_{\min}$, где $p_{\min}$ задана в (15) (этот потенциал изображен на рис. 1е в работе [4]). При этом все решения сингулярны на ранних временах, а на поздних временах приближаются к фазе де Ситтера с $H = (-(1/\beta\kappa^2)(1 - \sqrt{\Lambda}))^{1/2}$.

5. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Лучший способ изучить общий случай – это рассмотреть систему

$$\begin{aligned} \dot{H} &= Y, \\ \dot{Y} &= \frac{1}{2\alpha H} \left(\frac{2H^2}{\kappa^2} - \frac{\rho}{3} - 6\alpha H^2 Y + \alpha Y^2 + \beta H^4 \right), \\ \dot{\rho} &= -3H\rho(1 + \omega). \end{aligned} \quad (16)$$

При $\beta < 0$ эта система имеет две критические точки $(H_{\pm}, 0, 0)$ с $H_{\pm} = \pm\sqrt{-2/\beta\kappa^2}$. При $\omega > -1$ полуплоскость $\rho = 0, H > 0$ (полуплоскость $\rho = 0, H < 0$) является аттрактором (соответственно “отражателем”), а при $\omega < -1$ эти полуплоскости меняются ролями.

Важно подчеркнуть, что при $\alpha < 0$ решений, претерпевающих отскоки, не существует, поскольку в момент отскока t_b мы имеем $-\rho(t_b)/3 + \alpha Y^2(t_b) = 0$, а это означает, что $\rho(t_b) = 0$. Но, как мы видели в предыдущем разделе, $\rho = 0$ является инвариантным многообразием, в котором траектории, соответствующие областям

$H > 0$ и $H < 0$, не связаны между собой. Таким образом, в случае $\alpha < 0$ не существует устойчивых несингулярных траекторий. К неустойчивым несингулярным решениям относятся только те, которые появляются в модели Старобинского.

На основе рассуждений из предыдущего раздела можно сделать вывод, что с точки зрения получения несингулярных решений интересен случай $\alpha > 0$, а на самом деле привлекает внимание случай $\alpha > 0$ и $\beta < 0$. В этом случае мы можем использовать безразмерные переменные $\bar{t} = H_+ t$, $\bar{H} = H/H_+$, $\bar{Y} = Y/H_+^2$ и $\bar{\rho} = \kappa^2 \rho / 6H_+^2$, в которых система (16) принимает вид

$$\begin{aligned}\bar{H}' &= \bar{Y}, \\ \bar{Y}' &= \frac{1}{2\alpha\bar{H}}(-\beta\bar{H}^2 + \beta\bar{\rho} - 6\alpha\bar{H}^2\bar{Y} + \alpha\bar{Y}^2 + \beta\bar{H}^4), \\ \bar{\rho}' &= -3\bar{H}\bar{\rho}(1 + \omega),\end{aligned}\tag{17}$$

где штрих означает производную по времени $\bar{t}$. В этих переменных критическими являются точки $(\pm 1, 0, 0)$. Линеаризованная в точке $(1, 0, 0)$ система имеет собственные числа

$$\lambda_{\pm} = -\frac{3}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\beta}{9\alpha}}\right), \quad \lambda_3 = -3(1 + \omega).$$

Поскольку $\text{Re } \lambda_{\pm} < 0$, а $\bar{\rho} \equiv 0$ является инвариантным многообразием, все решения в полуплоскости $\bar{H} > 0$ асимптотически приближаются к соответствующей критической точке. Собственный вектор $\vec{v}_3 = (1, -3(1 + \omega), 18\omega(1 + \omega)\alpha/\beta - 2)$ отвечает собственному значению λ_3 . Таким образом, при $\omega < -1$ существует решение, которое уходит в расширяющуюся фазу де Ситтера, следуя по направлению вектора $\vec{v}_3$. С другой стороны, при $\omega > -1$ данная критическая точка является аттрактором.

В другой критической точке собственные значения таковы:

$$\lambda_{\pm} = \frac{3}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\beta}{9\alpha}}\right), \quad \lambda_3 = 3(1 + \omega).$$

Поскольку $\text{Re } \lambda_{\pm} > 0$, а $\bar{\rho} \equiv 0$ является инвариантным многообразием, все решения в полуплоскости $\bar{H} < 0$ уходят из этой критической точки. Собственный вектор $\vec{v}_3 = (1, 3(1 + \omega), -18\omega(1 + \omega)\alpha/\beta + 2)$ отвечает собственному значению λ_3 . Это означает, что при $\omega < -1$ существует частное решение, которое асимптотически подходит к фазе сжатия де Ситтера, следуя по направлению вектора $\vec{v}_3$. С другой стороны, при $\omega > -1$ данная критическая точка является отражателем.

Теперь будем искать сингулярные решения, имеющие вид $\bar{H} = C/(\bar{t} - \bar{t}_s)$ при $\bar{t} \rightarrow \bar{t}_s = H_+ t_s$. Подставляя это значение параметра Хаббла в уравнение сохранения, получим $\bar{\rho}(t) = \bar{\rho}_0 |\bar{t} - \bar{t}_s|^{-3C(1+\omega)}$, где параметр $\bar{\rho}_0$ должен быть положительным. Далее, если $\omega < -1$, то, подставляя параметр Хаббла и плотность энергии в квазиклассическое уравнение Фридмана, вновь получим значения константы из раздела 4: $C_{\pm} = (3\alpha/\beta)(-1 \pm \sqrt{1 + \beta/3\alpha})$. Поскольку в этом случае энергия стремится к нулю при $\bar{t} \rightarrow \bar{t}_s$, результат имеет тот же вид, что и в случае $\bar{\rho} \equiv 0$. Единственное отличие заключается в том, что теперь существует двухпараметрическое семейство сингулярных решений ($\bar{\rho}_0$ – свободный параметр, а общее решение системы (17) является двухпараметрическим вследствие инвариантности относительно сдвига по времени).

Случай $\omega > -1$ более сложный. Приведем основные результаты.

1. Пусть $-1 < \beta/3\alpha < 0$. Тогда:

если $C_- < 4/3(1 + \omega)$, то существуют два двухпараметрических семейства решений, в которых $\bar{H} = C_{\pm}/(\bar{t} - \bar{t}_s)$ и $\bar{\rho}_0$ – свободный параметр;

если $C_- = 4/3(1 + \omega)$, то существует двухпараметрическое семейство, в котором $\bar{H} = C_+ / (\bar{t} - \bar{t}_s)$ и $\bar{\rho}_0$ – свободный параметр, и однопараметрическое семейство с $\bar{H} = C_- / (\bar{t} - \bar{t}_s)$ и $\bar{\rho}_0 \equiv 0$;

если $C_+ < 4/3(1 + \omega) < C_-$, то существует двухпараметрическое семейство, в котором $\bar{H} = C_+ / (\bar{t} - \bar{t}_s)$ и $\bar{\rho}_0$ – свободный параметр, однопараметрическое семейство с $\bar{H} = C_- / (\bar{t} - \bar{t}_s)$ и $\bar{\rho}_0 \equiv 0$, а также однопараметрическое семейство с

$$\bar{H} = \frac{4}{3(1 + \omega)(\bar{t} - \bar{t}_s)}, \quad \bar{\rho}_0 = -\frac{16}{9(1 + \omega)^2} \left(\frac{16}{9(1 + \omega)^2} + \frac{6\alpha}{\beta} \frac{4}{3(1 + \omega)} - \frac{3\alpha}{\beta} \right);$$

если $4/3(1 + \omega) \leq C_+$, то существуют два однопараметрических семейства, в которых $\bar{H} = C_{\pm}/(\bar{t} - \bar{t}_s)$ и $\bar{\rho}_0 = 0$.

2. Пусть $\beta/3\alpha = -1$. Тогда:

если $4/3(1 + \omega) > 1$, то существует двухпараметрическое семейство, в котором $\bar{H} = 1/(\bar{t} - \bar{t}_s)$ и $\bar{\rho}_0$ – свободный параметр;

если $4/3(1 + \omega) \leq 1$, то существует однопараметрическое семейство, в котором $\bar{H} = 1/(\bar{t} - \bar{t}_s)$ и $\bar{\rho}_0 = 0$;

3. Пусть $\beta/3\alpha < -1$, тогда сингулярных решений вида $\bar{H} = C/(\bar{t} - \bar{t}_s)$ не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Тот же результат можно получить аналогичным способом, подставляя в уравнение (8) функцию $H = C/(t - t_s)$. Тогда, оставляя ведущий сингулярный член, получим значения $C_{\pm}$ и $4/3(1 + \omega)$. Окончательно, преобразуя дифференциальное уравнение в уравнение второго порядка тем же способом, который использовался в разделе 4, и линеаризуя его вблизи полученных выше сингулярных режимов, можно определить вид и число параметров, от которых зависят разные семейства сингулярных решений.

Чтобы понять полученные результаты, используем замену переменной $\bar{p} \equiv \sqrt{|\bar{H}|}$. Тогда квазиклассическое уравнение Фридмана примет вид [5]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{(\bar{p}')^2}{2} + \tilde{V}(\bar{p}) \right) = -3\epsilon p^2 (\bar{p}')^2 - \frac{3\beta\epsilon}{8\alpha} (1 + \omega) \bar{p}, \quad (18)$$

где

$$\epsilon \equiv \text{sgn}(H), \quad \tilde{V}(\bar{p}) = \frac{\beta}{8\alpha} \left(\bar{p}^2 \left(1 - \frac{1}{3} \bar{p}^4 \right) + \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2} \right).$$

Случай $\omega < -1$ не представляет сложностей. Поскольку $\bar{p} \rightarrow 0$ при $\bar{t} \rightarrow \bar{t}_s$, в сущности мы получим тот же результат, что и в разделе 4. Однако при $\omega > -1$ в правой части уравнения (18) первый член является диссипативным, а второй – антидиссипативным. Более того, в этом случае оба члена расходятся при $\bar{t} = \bar{t}_s$. Тогда если мы ищем сингулярное решение вида $\bar{H} = C/(\bar{t} - \bar{t}_s)$, то первый член в правой части уравнения (18) должен доминировать. В силу того что этот член имеет порядок $1/(\bar{t} - \bar{t}_s)^4$, а второй – порядок $1/|\bar{t} - \bar{t}_s|^{3C(1+\omega)}$, оба они появятся во всех ситуациях, описанных выше.

Интересно также понять форму потенциала $\tilde{V}$ (он изображен на рис. 3 в работе [5]). Воспользуемся безразмерными переменными. Потенциал имеет ноль в точке $\bar{p}_0 = (3/2)^{1/4}(1 + \sqrt{1 + 4\bar{p}/3})^{1/4}$ и две критические точки $\bar{p}_{\pm} = (1/2)^{1/4}(1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{p}})^{1/4}$ (при этом $\bar{p}_- < \bar{p}_+$). Тогда при $\bar{p} > 1/4$ критической точки не существует, и потенциал строго возрастает от $-\infty$ до ∞ . При $\bar{p} < 1/4$ потенциал удовлетворяет условиям $\tilde{V}(0) = -\infty$, $\tilde{V}(\infty) = \infty$, а также имеет относительный максимум при $p = \bar{p}_-$ и относительный минимум при $p = \bar{p}_+$ (впадину). Для очень малого значения $\bar{p}$ в окрестности точки $\bar{p}_-$ имеем $\bar{H}^2 \cong \bar{p}$, т. е. система находится вблизи фазы Фридмана, а в окрестности точки $\bar{p}_+$ имеем $|\bar{H}| \cong 1$, т. е. система находится вблизи фазы де Ситтера.

Следующий шаг – нахождение решений, которые приближаются к решениям Фридмана при $|t| \rightarrow \infty$ (случай с излучением, т. е. $\omega = 1/3$, изучался в работе [13]). Для этого рассмотрим уравнение (8) в безразмерных переменных, введенных выше, и понизим порядок уравнения с помощью замены переменной $u(y) = \bar{H}'(\bar{t})$, где $y = \bar{H}$. Получим следующее уравнение:

$$2\beta u + 3(1 + \omega)\beta(y^2 - y^4) + (18\alpha(1 + \omega) - 4\beta)y^2u + 6\alpha(2 + \omega)y\dot{u}u + + 3\alpha(3 + \omega)u^2 + 2\alpha(\ddot{u}u^2 + \dot{u}^2u) = 0, \quad (19)$$

где теперь $\dot{u} \equiv du/dy$. Поскольку решение Фридмана в этих переменных имеет вид $u_F = -(3/2)(1 + \omega)y^2$, линеаризованное вблизи этой точки уравнение ($u_{\text{linearized}} = u_F + h$) записывается как

$$\ddot{h} + 2y^{-1} \frac{\omega}{1 + \omega} \dot{h} + \left(\frac{4\beta}{9\alpha(1 + \omega)^2} y^{-4} + Ay^{-2} \right) h + B = 0, \quad (20)$$

где A и B – некоторые константы, зависящие от параметров α , β и ω .

Идея решения этого уравнения заключается в том, что мы пренебрегаем членом Ay^{-2} при больших значениях $|t|$ (малых значениях y). Однородное уравнение решается с помощью замены $h = |y|^{-\omega/(1+\omega)}z$, после чего мы получаем уравнение

$$\ddot{z} + \frac{4\beta}{9\alpha(1 + \omega)^2} y^{-4} z = 0,$$

которое можно решить, используя приближение ВКБ (см. работу [14]). Следовательно, однородное уравнение имеет два независимых решения

$$h_{\text{homogeneous}, \pm}(y) = y^{1/(1+\omega)} \exp\left(\pm \frac{2}{3(1 + \omega)} \frac{1}{y} \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\right).$$

Частное решение получается разложением в степенной ряд. Выпишем его ведущий член:

$$h_{\text{particular}}(y) = \frac{9\alpha(1 + \omega)^2}{4\beta} By^4.$$

Тогда общее решение линеаризованного уравнения запишется в приближенном виде как

$$u_{\text{linearized}} = u_F + Kh_{\text{homogeneous}, \pm}(y) + h_{\text{particular}}(y) \quad \text{для} \quad \mp y > 0,$$

где K – произвольный параметр. Итак, мы доказали существование однопараметрического семейства решений, которое приближается к семейству решений Фридмана при больших значениях $|t|$.

На основании полученных выше результатов можно качественно описать несингулярное решение. Начнем со случая $\omega < -1$. Как было показано, существует однопараметрическое семейство решений, которое на ранних временах находится в фазе расширения Фридмана, и нам необходимо найти несингулярные решения, которые на больших временах согласуются с этим семейством. Несингулярными на поздних временах являются следующие решения: однопараметрическое семейство, которое асимптотически приближается к фазе сжатия Фридмана, и частное решение, которое асимптотически подходит к фазе сжатия де Ситтера по направлению $(1, 3(1+\omega), -18\omega(1+\omega)\alpha/\beta+2)$. Динамику решений легко понять из уравнения (18). На ранних временах система находится в точке $\bar{p}_-$ в области $\bar{H} > 0$. После этого она покидает расширяющееся состояние Фридмана и скатывается вниз вправо или влево. В первом случае вселенная приближается к фазе расширения де Ситтера (к относительному минимуму $\bar{p}_+$). Однако, поскольку $\bar{p}$ является возрастающей функцией времени, критические точки исчезают, и потенциал становится возрастающей функцией переменной $\bar{p}$. А это означает, что вселенная скатывается вниз к точке $\bar{p} = 0$, т. е. она претерпевает отскок и входит в фазу убывания $\bar{H} < 0$. После этого она может асимптотически приближаться к точке $\bar{p}_-$ или $\bar{p}_+$ (несингулярное на поздних временах решение), или неоднократно претерпевать отскок, чтобы получить достаточно энергии в области $\bar{H} < 0$ и приблизиться к точке $\bar{p} = \infty$ (сингулярное решение). Последнее поведение легко понять, если учесть, что, во-первых, при $\bar{H} > 0$ (при $\bar{H} < 0$) система диссипативна (соответственно антидиссипативна), и, во-вторых, энергия системы меняет знак во время отскоков (см. уравнение (12) в работе [4]).

В итоге, анализируя поведение сингулярных решений на поздних временах, мы приходим к следующему выводу: нужно очень тщательно подобрать начальные условия и значения параметров α и β , чтобы получить несингулярные решения, у которых несингулярное поведение на поздних временах согласовано с фазой расширения Фридмана на ранних временах, потому что эти семейства решений не относятся к общему решению (двухпараметрическому семейству). С другой стороны, при $\omega > -1$ также существует однопараметрическое семейство решений, которые на поздних временах находятся в фазе расширения Фридмана (в терминах переменной $\bar{p}$ это соответствует точке $\bar{p}_-$ в области $\bar{H} > 0$), так что следует искать решение, которое согласуется на ранних временах с этим семейством. Несингулярными на ранних временах решениями являются следующие. Прежде всего, это однопараметрическое семейство, которое покидает фазу сжатия Фридмана. В терминах переменной $\bar{p}$ это означает, что система покидает относительный максимум $\bar{p}_-$ в области $\bar{H} < 0$ и катится вниз вправо или влево. Но в любом случае, поскольку плотность энергии является возрастающей функцией времени в этой области, система перемещается к точке $\bar{p} = 0$, т. е. претерпевает отскоки, и начинается фаза расширения. Другим несингулярным решением на ранних временах является двухпараметрическое решение (общее решение), которое покидает фазу сжатия де Ситтера. В терминах переменной $\bar{p}$ это означает, что система выходит из точки $\bar{p}_+$ в области $\bar{H} < 0$ и затем вследствие антидиссипации (на ранних временах в области $\bar{H} < 0$ плотность энергии очень мала и доминирует первый член в правой части

уравнения (18)) система освобождается из впадины и скатывается вниз к области $H > 0$.

Из описанного поведения, несингулярного на ранних временах, можно сделать вывод о том, что для согласования несингулярных на ранних временах решений с фазой расширения Фридмана на поздних временах нужно точно подобрать начальные условия. В зависимости от значений параметров α и β получатся разные типы сшивок. Например, в работе [14] приведены результаты численных расчетов в случае излучения, которые продемонстрировали различные сшивки в зависимости от значений обоих параметров.

6. ВЫВОДЫ И СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

Мы показали на качественном уровне, что, принимая во внимание квантовые поправки, вносимые безмассовым полем, конформно связанным с гравитацией, “невозможно” избежать сингулярностей, которые появляются в уравнении Фридмана в присутствии баротропной идеальной жидкости с уравнением состояния $p = \omega\rho$. Это происходит из-за того, что единственными несингулярными решениями, которые находятся в фазе Фридмана на поздних (на ранних) временах при $\omega > -1$ (соответственно при $\omega < -1$), являются неустойчивые решения, другими словами, небольшое возмущение приводит к тому, что их поведение становится сингулярным. Наши выводы при $\omega < -1$ аналогичны предложенным в работе [15], хотя способ их получения совершенно другой. Фактически в работе [15] авторы подставили решение Фридмана (3) в плотность энергии вакуума и давление вакуума (7) и получили эффективную величину параметра $\omega = \omega_{\text{eff}}$, которая удовлетворяет условию $\omega_{\text{eff}} < \omega < -1$. В результате был сделан вывод, что влияние плотности энергии вакуума сводится к усилению ускоряющегося расширения, которое приводит к сингулярности типа Большого разрыва. Ясно, что эти выводы неверны, поскольку для больших значений кривизны квантовые эффекты становятся существенными, и решения радикально отличаются от решений Фридмана (они претерпевают отскоки и т.д.). Решение Фридмана можно подставлять в квантовые вакуумные величины только в том случае, когда они рассматриваются в качестве возмущений, что справедливо в случае их малости, т.е. когда кривизна мала и вселенная находится в фазе расширения Фридмана. Результаты работы [15] можно применять только тогда, когда вселенная покидает эту фазу, но они неприменимы вблизи сингулярности типа Большого разрыва.

При $\omega > -1$ наши выводы полностью совпадают и обобщают выводы, сделанные в работах [5], [14], поскольку в этих работах авторы изучают только случай $\omega = 1/3$.

Мы не рассмотрели влияние квантовых эффектов на внезапные сингулярности будущего, которые появляются в моделях с уравнением состояния

$$p = -\rho - \frac{AB\rho^{a+b}}{A\rho^a + B\rho^b},$$

где A , B , a и b – некоторые постоянные. В работе [7] обсуждается этот случай и сделан вывод, что квантовые эффекты уменьшают или даже устраняют сингулярность типа Большого разрыва. С нашей точки зрения, выводы этой работы носят несколько эвристический характер и нуждаются в более глубоком анализе с использованием техники, описанной в этой статье, т.е. нужно провести качественный анализ в фазовом пространстве.

Наконец, следует подчеркнуть, что мы рассмотрели только квантовые эффекты, возникающие в результате присутствия безмассовых конформно связанных полей. Мы не учли геометрические квантовые эффекты, которые рассматриваются в петлевой квантовой космологии (в теории, основанной на дискретной природе геометрии). При этом нетрудно доказать, что сингулярностей типа Большого взрыва и Большого разрыва можно избежать (см., например, работы [16], [17]). Другим способом учета квантования геометрии является “эффективная формулировка гравитации для космологий ФРУ”, где сингулярностей типа Большого взрыва и Большого разрыва также можно избежать [18], [19]. Таким образом, становится ясно, что для того чтобы избежать сингулярностей, которые появляются в моделях ФРУ, нужно, кроме учета поправок от различных конформных полей, всегда вводить квантовую природу геометрии.

Благодарности. Исследование частично поддержано Ministerio de Ciencia e Innovación (Spain) (проект MTM2008-06349-C03-01) и Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i Recerca (Generalitat de Catalunya) (контракт 2009SGR 345).

Список литературы

- [1] C. Molina-París, M. Visser, *Phys. Lett. B*, **455**:1–4 (1999), 90–95, arXiv: gr-qc/9810023; S. W. Hawking, R. Penrose, *The Nature of Space and Time*, The Isaac Newton Institute Series of Lectures, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1996; S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, **1**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.
- [2] P. C. W. Davies, *Phys. Lett. B*, **68**:4 (1977), 402–404.
- [3] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B*, **91**:1 (1980), 99–102.
- [4] T. Azuma, S. Wada, *Prog. Theor. Phys.*, **75** (1986), 845–861.
- [5] S. Wada, *Phys. Rev. D*, **31**:10 (1985), 2470–2475.
- [6] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, N. N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **91**:7 (2003), 071301, 4 pp., arXiv: astro-ph/0302506.
- [7] S. Nojiri, S. Odintsov, S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D*, **71**:6 (2005), 063005, 21 pp.
- [8] A. O. Barvinsky, A. Yu. Kamenshchik, *Phys. Rev. D*, **74**:12 (2006), 121502, 5 pp.
- [9] A. O. Barvinsky, A. Yu. Kamenshchik, *JCAP*, **09** (2006), 014, arXiv: hep-th/0605132.
- [10] R. M. Wald, *Phys. Rev. D*, **17**:6 (1978), 1477–1484.
- [11] S. W. Hawking, T. Hertog, H. S. Reall, *Phys. Rev. D*, **63**:8 (2001), 083504, 23 pp., arXiv: hep-th/0010232.
- [12] A. Vilenkin, *Phys. Rev. D*, **32**:10 (1985), 2511–2521.
- [13] M. V. Fischetti, J. B. Hartle, B. L. Hu, *Phys. Rev. D*, **20**:8 (1979), 1757–1771.
- [14] P. Anderson, *Phys. Rev. D*, **28**:2 (1983), 271–285.
- [15] H. Calderón, W. A. Hiscock, *Class. Quantum Grav.*, **22**:4 (2005), L23–L26.
- [16] A. Ashtekar, T. Pawłowski, P. Singh, *Phys. Rev. D*, **73**:12 (2006), 124038, 33 pp., arXiv: gr-qc/0604013.
- [17] S. Sami, P. Singh, S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D*, **74**:4 (2006), 043514, 6 pp., arXiv: gr-qc/0605113.
- [18] J. Haro, E. Elizalde, *J. Phys. A*, **42**:20 (2009), 202002, 15 pp.
- [19] E. Elizalde, J. Haro, *J. Phys. A*, **42**:47 (2009), 472001, 9 pp.