Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Боголюбов (мл.), М. Ю. Расулова, И. А. Тишабаев,
Статистический подход к модели Джейнса–Каммингса,
ТМФ, 2012, том 171, номер 1, 116–123

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6890>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:06:57

© 2012 г. Н. Н. Боголюбов (мл.)*, М. Ю. Расулова^{†‡},
И. А. Тишабаев[†]

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИ ДЖЕЙНЕСА–КАММИНГСА

Исследуется динамика систем, состоящих из взаимодействующих двухуровневых атомов и поля (микрорезонаторов). К таким системам относится модель Джейнеса–Каммингса. Сформулирована задача и представлена краткая история проблемы; выведено обобщенное кинетическое уравнение для рассматриваемой системы и найдено его решение; показано, что модель позволяет описать излучение и поглощение фотонов.

Ключевые слова: обобщенное кинетическое уравнение, двухуровневый атом, микрорезонаторы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько лет сильно возрос интерес к исследованиям взаимодействия двухуровневых атомов с полем. К этим, в основном прикладным, областям относятся такие области науки, как квантовая оптика, квантовая информация и квантовые вычисления. Внимание к этим системам прежде всего обусловлено двумя факторами: возможностью более глубокого понимания квантовой динамики в открытых системах и возможностью их практического применения в квантовых вычислениях и теории квантовой информации [1], [2]. Одной из самых простых и в то же время интересных квантовых моделей, в которых изучается взаимодействие между излучением и веществом, является модель Джейнеса–Каммингса (МДК) [3]. Эта модель описывает взаимодействие между одиночным двухуровневым атомом и одной модой электромагнитного поля. Свойства МДК были изучены теоретически [4]–[7] и подтверждены экспериментально [8], [9]. В настоящее время в исследованиях по квантовой информатике МДК используется для описания эволюции взаимодействия между атомами и фотонами [10]–[12].

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: bogolubv@mi.ras.ru

[†]Институт ядерной физики АН Республики Узбекистан, Улугбек, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: rasulova@live.com, tishabaev@inp.uz

[‡]Malasian Institute of Microelectronic Systems, Kuala-Lumpur, Malaysia

В настоящей работе для системы, состоящей из одиночного двухуровневого атома и микрорезонатора с гамильтонианом МДК [3], [13]

$$\hat{H}_{\text{МДК}} = \hbar\omega_0\hat{S}^z + \hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar g(\hat{b}\hat{S}^+ + \hat{b}^\dagger\hat{S}^-)$$

на основе статистических методов Боголюбовых [14]–[16] выведено и решено обобщенное кинетическое уравнение. Здесь $\hat{b}$ и $\hat{b}^\dagger$ – операторы уничтожения и рождения фотона соответственно, ω_0 – частота расщепления между атомными уровнями, $\hbar$ – постоянная Планка, ω – частота моды поля, g – параметр дипольной связи, а $\hat{S}^+$, $\hat{S}^-$, $\hat{S}^z$ – операторы атомного спина, удовлетворяющие следующим коммутационным соотношениям: $[\hat{S}^\pm, \hat{S}^z] = \mp\hat{S}^\pm$, $[\hat{S}^+, \hat{S}^-] = 2\hat{S}^z$, где

$$\hat{S}^\pm = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y), \quad \hat{S}^z = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z$$

и $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ – матрицы Паули.

В настоящей работе МДК исследуется с помощью метода, изложенного в работах [14]–[16]. Рассматриваемая система включает в себя N двухуровневых атомов, взаимодействующих с модами электромагнитного поля. Гамильтониан такой системы в обозначениях работ [15], [16] задается формулой

$$\hat{H}_t = \hat{H}(S) + \hat{H}(\Sigma) + \hat{H}_t(S, \Sigma), \quad (1)$$

где первое слагаемое описывает энергию свободного атома и имеет вид

$$\hat{H}(S) = \hat{H}_0 + \sum_{j=1}^N \hbar\omega_0\hat{S}_j^z,$$

здесь $\hat{H}_0$ – кинетическая энергия атомов. Второе слагаемое соответствует свободному электромагнитному полю и имеет вид

$$\hat{H}(\Sigma) = \sum_{k=1}^N \hbar\omega_k\hat{b}_k^\dagger\hat{b}_k,$$

где $\hat{b}_k$, $\hat{b}_k^\dagger$ – операторы уничтожения и рождения фотонов с волновым вектором k . Последнее слагаемое описывает взаимодействие атомов с полем и задается как

$$\hat{H}_t(S, \Sigma) = e^{\epsilon t} \sum_{k,j=1}^N \frac{\hbar g_k}{\sqrt{N}} (e^{ikx_j} \hat{b}_k \hat{S}_j^-(\mu) + e^{-ikx_j} \hat{b}_k^\dagger \hat{S}_j^+(\mu)),$$

где g_k – параметр дипольной связи, N – число атомов, x_j – радиус-вектор j -го атома, $\hat{S}_j^\pm(\mu) = \hat{S}_j^\pm + \mu\hat{S}_j^\mp$, $\epsilon, \mu \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$ – время. В (1) S означает совокупность переменных, относящихся к атому, а Σ – совокупность переменных, относящихся к фотонному полю.

2. ОБОБЩЕННОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Начнем с построения кинетического уравнения для системы с гамильтонианом (1). Обозначим через D_t статистический оператор полной системы с гамильтонианом (1), удовлетворяющим уравнению Лиувилля

$$i\hbar \frac{\partial D_t}{\partial t} = [H_t, D_t].$$

Как известно [14], связь между средними значениями динамической величины $\mathcal{U}(S, \Sigma)$ в представлениях Шредингера и Гейзенберга определяется как

$$\langle \mathcal{U}_t \rangle = \text{Tr}_{(S, \Sigma)} \mathcal{U}(S, \Sigma) D_t = \text{Tr}_{(S, \Sigma)} \{ U^{-1}(t, t_0) \mathcal{U}(S, \Sigma) U(t, t_0) \} D_{t_0}. \quad (2)$$

Очевидно, что

$$\mathcal{U}(t, S, \Sigma) = U^{-1}(t, t_0) \mathcal{U}(S, \Sigma) U(t, t_0) \quad (3)$$

является выражением динамической величины в представлении Гейзенберга. Унитарный оператор $U(t, t_0)$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H} U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = 1.$$

Пусть $f(S)$ – оператор, действующий на переменные S системы. Уравнение движения для этого оператора в представлении Гейзенберга (3) имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial f(S_t)}{\partial t} = [f(S_t), \hat{H}_t]. \quad (4)$$

Среднее значение динамической величины $f(S)$ определяется как [14]:

$$\langle f(S_t) \rangle = \text{Tr}_{(S, \Sigma)} f(S_t) D_{t_0}(S, \Sigma) = \text{Tr}_{(S, \Sigma)} f(S) D_t(S, \Sigma) = \text{Tr}_{(S)} f(S) \rho_t(S), \quad (5)$$

где $\rho_t(S) = \text{Tr}_{(\Sigma)} D_t(S, \Sigma)$.

С помощью метода исключения бозонных переменных [14] уравнение (4) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_{(S)} \left(f(S) \frac{\partial \rho_t(S)}{\partial t} + \frac{\hat{H}(S) f(S) - f(S) \hat{H}(S)}{i\hbar} \rho_t(S) \right) = \\ & = \sum_{k,j=1}^N \frac{g_k^2}{N} \int_{t_0}^t d\tau \text{Tr}_{(S, \Sigma)} e^{-i\omega_k(t-\tau)} e^{\epsilon(t+\tau)} \times \\ & \times \{ N_k e^{ikx_j} \hat{S}_j^+(\tau, \mu) [f(S_t), e^{-ikx_j} \hat{S}_j^-(t, \mu)] + \\ & + (1 + N_k) [e^{-ikx_j} \hat{S}_j^-(t, \mu), f(S_t)] e^{ikx_j} \hat{S}_j^+(\tau, \mu) \} D_{t_0}(S, \Sigma) + \\ & + \sum_{k,j=1}^N \frac{g_k^2}{N} \int_{t_0}^t d\tau \text{Tr}_{(S, \Sigma)} e^{i\omega_k(t-\tau)} e^{\epsilon(t+\tau)} \times \\ & \times \{ (1 + N_k) e^{-ikx_j} \hat{S}_j^-(\tau, \mu) [f(S_t), e^{ikx_j} \hat{S}_j^+(t, \mu)] + N_k [e^{ikx_j} \hat{S}_j^+(t, \mu), f(S_t)] \times \\ & \times e^{-ikx_j} \hat{S}_j^-(\tau, \mu) \} D_{t_0}(S, \Sigma), \quad N_k = \frac{e^{-\beta\hbar\omega(k)}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega(k)}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $f(S_t)$ – динамическая величина, $\rho(S)$ – приведенный статистический оператор системы S , $D(S, \Sigma)$ – статистический оператор системы (S, Σ) .

3. РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для решения обобщенного кинетического уравнения для МДК с гамильтонианом (1) воспользуемся методом исключения бозонных операторов [14]–[16]. Предполагая, что взаимодействие между атомами и полем является слабым, и вводя неоднородное лоренцево уширение [16], [17], получим

$$\hat{S}^\pm(\tau) \cong \hat{S}^\pm(t) e^{\mp i\omega_0(t-\tau)} e^{-(t-\tau)/2T}, \quad (7)$$

где T – время жизни осциллятора, характеризующее ширину неоднородного лоренцева уширения. Введем коллективные переменные [16]

$$\hat{S}_\nu^+ = \sum_j \hat{S}_j^+ e^{i\nu' x_j}, \quad \hat{S}_\nu^- = \sum_j \hat{S}_j^- e^{-i\nu x_j}, \quad (8)$$

где вектор ν соответствует модам поля.

Подставляя формулы (7), (8) в уравнение (6), переходя к усреднению (5) и пренебрегая быстроосциллирующими членами типа $\hat{S}^+ \hat{S}^+$, $\hat{S}^- \hat{S}^-$, а также вкладом членов с $\nu \neq \nu'$, при условиях $\epsilon \rightarrow 0$ и $\mu = 0$ (что соответствует приближению вращающейся волны) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle f(S_t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}(S), f(S_t)] \rangle = \\ = \sum_{k, \nu=1}^N \frac{g_k^2}{N} |\varphi(k - \nu)|^2 \int_{t_0}^t d\tau e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t - \tau)} e^{-(t - \tau)/2T} \times \\ \times \{ N_k \langle \hat{S}_\nu^-(t) [f(S_t), \hat{S}_\nu^+(t)] \rangle + (1 + N_k) \langle [\hat{S}_\nu^+(t), f(S_t)] \hat{S}_\nu^-(t) \rangle \} + \\ + \sum_{k, \nu=1}^N \frac{g_k^2}{N} |\varphi(k - \nu)|^2 \int_{t_0}^t d\tau e^{i(\omega_k - \omega_0)(t - \tau)} e^{-(t - \tau)/2T} \times \\ \times \{ (1 + N_k) \langle \hat{S}_\nu^+(t) [f(S_t), \hat{S}_\nu^-(t)] \rangle + N_k \langle [\hat{S}_\nu^-(t), f(S_t)] \hat{S}_\nu^+(t) \rangle \}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\varphi(k - \nu) = \sum_j e^{i(k - \nu)x_j}$.

Рассмотрим случай $f(S_t) = \hat{S}^z(t)$. Тогда уравнение (9) может быть представлено следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{S}^z(t) \rangle = -\frac{2n}{N} \langle \hat{S}^z(t) \rangle - \sum_{\nu=1}^N \frac{\gamma}{N} \langle \hat{S}_\nu^+(t) \hat{S}_\nu^-(t) \rangle, \quad (10)$$

где

$$\gamma = 2 \sum_{k=1}^N \frac{g_k^2 |\varphi(k - \nu)|^2 T}{1 + 4T^2(\omega_0 - \omega_k)^2}, \quad n = 2 \sum_{k=1}^N \frac{g_k^2 |\varphi(k - \nu)|^2 T N_k}{1 + 4T^2(\omega_0 - \omega_k)^2}.$$

В уравнении (10) вместо операторов $\hat{S}_\nu^+ \hat{S}_\nu^-$ можно ввести оператор $\hat{R}_\nu$ по формуле [16]

$$\hat{S}_\nu^\pm \hat{S}_\nu^\mp = \hat{R}_\nu + \frac{N}{2} \pm \hat{S}^z, \quad \hat{R}_\nu = \sum_{j \neq j'} \hat{S}_j^+ \hat{S}_{j'}^- e^{i\nu(x_j - x_{j'})}.$$

Среднее значение оператора $\hat{R}_\nu$ имеет вид

$$\langle \hat{R}_\nu \rangle = \left(\Gamma(\nu - \nu_0) - \frac{1}{N} \right) \left(\frac{N^2}{4} - \langle \hat{S}^z \rangle^2 \right),$$

где

$$\Gamma(\nu - \nu_0) \equiv \left| \frac{1}{N} \sum_j e^{i(\nu - \nu_0)x_j} \right|^2.$$

Тогда уравнение (10) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{S}^z(t) \rangle = -\frac{1}{N} \sum_{\nu} \left\{ \gamma \left(\Gamma(\nu - \nu_0) - \frac{1}{N} \right) \left(\frac{N^2}{4} - \langle \hat{S}^z(t) \rangle^2 \right) + \langle \hat{S}^z(t) \rangle (2n + \gamma) + \gamma \frac{N}{2} \right\}.$$

В частном случае $\beta^{-1} = 0$ (β – обратная температура) вместо последнего уравнения получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{S}^z(t) \rangle = \frac{\alpha}{N} \left(\langle \hat{S}^z(t) \rangle + \frac{N}{2} \right) \left(\langle \hat{S}^z(t) \rangle - \frac{N}{2} - \frac{\gamma}{\alpha} \right), \quad (11)$$

где

$$\alpha \equiv \sum_{\nu} \alpha_{\nu}, \quad \alpha_{\nu} = \gamma \left(\Gamma(\nu - \nu_0) - \frac{1}{N} \right).$$

Если в уравнении (11) произвести замену переменных

$$X = \langle \hat{S}^z(t) \rangle, \quad X_1 = \frac{N}{2} + \frac{\gamma}{\alpha}, \quad X_2 = -\frac{N}{2},$$

то оно перейдет в уравнение

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\alpha}{N} (X - X_2)(X - X_1), \quad (12)$$

решение которого можно найти, пользуясь следующим представлением уравнения:

$$\frac{dX}{(X - X_2)(X - X_1)} = \frac{\alpha}{N} dt.$$

Предполагая, что

$$\frac{1}{(X - X_2)(X - X_1)} = \frac{A}{X - X_2} + \frac{B}{X - X_1},$$

получаем $A + B = 0$, $-AX_1 - BX_2 = 1$. Из этой системы уравнений легко определить A и B :

$$A = \frac{1}{X_2 - X_1}, \quad B = \frac{1}{X_1 - X_2}.$$

Очевидно, что $A = -B$, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(X - X_2)(X - X_1)} &= B \left(-\frac{1}{X - X_2} + \frac{1}{X - X_1} \right), \\ |X - X_2|^A \cdot |X - X_1|^B &= \exp \left\{ \frac{\alpha}{N} (t - t_0) \right\}, \\ \int \frac{dX}{(X - X_2)(X - X_1)} &= B \ln |X - X_1| - B \ln |X - X_2| = \int \frac{\alpha}{N} dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\left| \frac{X - X_1}{X - X_2} \right| = \exp \left\{ \frac{1}{B} \frac{\alpha}{N} (t - t_0) \right\}.$$

Рассмотрим решение этого уравнения при условии $X_1 > X > X_2$:

$$X = X_2 + \frac{X_1 - X_2}{1 + e^{\eta(t-t_0)}}, \quad \eta = \frac{\alpha}{N} \left(N + \frac{\gamma}{\alpha} \right). \quad (13)$$

Используя эту связь, можно найти решение уравнения (11):

$$\langle \hat{S}^z(t) \rangle = -\frac{N}{2} + \left(N + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \frac{1}{1 + e^{\eta(t-t_0)}}. \quad (14)$$

Формула (14) дает решение обобщенного кинетического уравнения для N двухуровневых атомов в микрорезонаторах.

В настоящей работе мы применили статистический подход и рассмотрели МДК для случая системы, состоящей из большого числа частиц. При этом мы использовали коллективные операторы и приняли во внимание неоднородное лоренцево уширение. Рассмотрим частный случай, когда система состоит из одного двухуровневого атома и одного микрорезонатора, $N = 1$, $k = 1$. В этом случае гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}_{\text{МДК}} = \hbar\omega_0 \hat{S}^z + \hbar\omega \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar g (\hat{b} \hat{S}^+ + \hat{b}^\dagger \hat{S}^-).$$

Ограничимся рассмотрением только одной частицы и не будем принимать во внимание неоднородное лоренцево уширение. Тогда уравнение (9) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle f(S_t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [\hbar\omega_0 \hat{S}^z, f(S_t)] \rangle = \\ & = g^2 \int_{t_0}^t d\tau e^{-i(\omega-\omega_0)(t-\tau)} \{ \bar{N} \langle \hat{S}^-(t) [f(S_t), \hat{S}^+(t)] \rangle + (1 + \bar{N}) \langle [\hat{S}^+(t), f(S_t)] \hat{S}^-(t) \rangle \} + \\ & + g^2 \int_{t_0}^t d\tau e^{i(\omega-\omega_0)(t-\tau)} \{ (1 + \bar{N}) \langle \hat{S}^+(t) [f(S_t), \hat{S}^-(t)] \rangle + \bar{N} \langle [\hat{S}^-(t), f(S_t)] \hat{S}^+(t) \rangle \}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\bar{N} = e^{-\beta\hbar\omega} / (1 - e^{-\beta\hbar\omega})$.

Рассмотрим случай $f(S_t) = \hat{S}^z(t)$. Тогда уравнение (15) может быть представлено как

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{S}^z(t) \rangle = -2g^2 \int_{t_0}^t d\tau \cos[\delta\omega(t-\tau)] [2\bar{N} \langle \hat{S}^z(t) \rangle + \langle \hat{S}^+(t) \hat{S}^-(t) \rangle]. \quad (16)$$

Здесь $\delta\omega = \omega - \omega_0$ и $\langle \hat{S}^+(t) \hat{S}^-(t) \rangle = \langle \hat{S}^z(t) \rangle + 1/2$. Введем новую переменную интегрирования $\xi = t - \tau$, так что

$$\int_{t_0}^t d\tau (\dots) = \int_0^{t-t_0} d\xi (\dots).$$

После интегрирования уравнение (16) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{S}^z(t) \rangle = -2 \frac{g^2}{\delta\omega} \sin[\delta\omega(t-t_0)] \left[\frac{1}{2} + (2\bar{N} + 1) \langle \hat{S}^z(t) \rangle \right].$$

Отсюда можно получить соотношение

$$\left| \frac{1}{2} + (2\bar{N} + 1) \langle \hat{S}^z(t) \rangle \right| = e^{c(t)}, \quad (17)$$

где

$$c(t) = 2 \frac{g^2 (2\bar{N} + 1)}{\delta\omega^2} (\cos[\delta\omega(t-t_0)] - 1).$$

При $\langle \hat{S}^z(t) \rangle > 0$ имеем решение обобщенного кинетического уравнения для МДК:

$$\langle \hat{S}^z(t) \rangle = \left(e^{c(t)} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2\bar{N} + 1}. \quad (18)$$

Можно видеть, что в МДК имеет место процесс, аналогичный диссипации в модели Калдейра-Леггетт [18]–[21].

Исходя из равенства (18) и используя стандартное соотношение [16], [17]

$$I(t) = -\hbar\omega_0 \frac{d}{dt} \langle \hat{S}^z(t) \rangle, \quad (19)$$

можно получить выражение для интенсивности излучения и поглощения. Из формул (17)–(19) мы можем определить интенсивность излучения ($I(T) > 0$):

$$I_{\text{emit}}(t) = 2\hbar \frac{g^2\omega_0}{\delta\omega} \sin[\delta\omega(t - t_0)] e^{c(t)},$$

а при условии $\langle \hat{S}^z(t) \rangle < -1/2$ – интенсивность поглощения ($I(T) < 0$):

$$I_{\text{abs}}(t) = -2\hbar \frac{g^2\omega_0}{\delta\omega} \sin[\delta\omega(t - t_0)] e^{c(t)}.$$

Для N атомов интенсивность излучения в силу (19) и (14) имеет вид

$$I_{\text{emit}}(t) = \frac{\hbar\omega_0\alpha}{4N} \left(N + \frac{\gamma}{\alpha} \right)^2 \text{sech}^2 \frac{\eta(t - t_0)}{2},$$

а при условии $\langle \hat{S}^z(t) \rangle < -N/2$ и при $t \neq t_0$ интенсивность поглощения имеет вид

$$I_{\text{abs}}(t) = -\frac{\hbar\omega_0\alpha}{4N} \left(N + \frac{\gamma}{\alpha} \right)^2 \text{cosech}^2 \frac{\eta(t - t_0)}{2}.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена система, состоящая из двухуровневых атомов, взаимодействующих с микрорезонаторами. Для этой системы выведено и решено обобщенное кинетическое уравнение. Показано, что на основе этой модели можно описать процессы излучения и поглощения фотонов. Для МДК (при $N = 1$, $k = 1$) определены решение обобщенного кинетического уравнения, явный вид излучения и поглощения.

Таким образом, предложенный в работе статистический подход к проблеме позволяет обобщить известные теоретические и прикладные результаты для МДК на системы, состоящие из многих двухуровневых атомов и микрорезонаторов.

Следует заметить, что почти во всех ранее опубликованных статьях, посвященных изучению МДК, система рассматривалась как одна частица, взаимодействующая с полем одной моды. При определенных физических приближениях изучение динамики МДК можно свести к решению уравнения типа марковского Master equation. Как известно [19], решение уравнений марковского типа можно найти с помощью метода полугрупп. Динамику МДК можно исследовать также с учетом немарковских эффектов [19], [22]–[24]. В настоящей работе в отличие от других

работ для решения этой проблемы был использован метод исключения бозонных переменных [14], ранее примененный к изучению двухфотонных процессов в макроскопической двухуровневой системе [16]. Это дало возможность найти не только явное решение обобщенного кинетического уравнения, но и явное выражение для интенсивности излучения фотонов как для МДК (когда $N = 1$), так и для статистического обобщения этой модели (когда N является произвольным конечным числом).

Список литературы

- [1] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi, H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.*, **75**:25 (1995), 4710–4613, arXiv: quant-ph/9511008.
- [2] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [3] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**:1 (1963), 89–109.
- [4] H. I. Yoo, J. H. Eberly, *Phys. Rep.*, **118**:5 (1985), 239–337.
- [5] B. W. Shore, P. L. Knight, *J. Modern Opt.*, **40**:7 (1993), 1195–1238.
- [6] H. Weimer, G. Mahler, *Phys. Rev. A*, **76**:5 (2007), 053819, 4 pp., arXiv: 0711.4705.
- [7] S. De Liberato, D. Gerace, I. Carusotto, C. Ciuti, *Phys. Rev. A*, **80**:5 (2009), 053810, 5 pp., arXiv: 0906.2706.
- [8] G. Rempe, H. Walther, N. Klein, *Phys. Rev. Lett.*, **58**:4 (1987), 353–356.
- [9] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **76**:11 (1996), 1800–1803.
- [10] S. Bose, I. Fuentes-Guridi, P. L. Knight, V. Vedral, *Phys. Rev. Lett.*, **87**:5 (2001), 050401, 4 pp., arXiv: quant-ph/0103063.
- [11] S. Scheel, J. Eisert, P. L. Knight, M. B. Plenio, *J. Modern Opt.*, **50**:6–7 (2003), 881–889, arXiv: quant-ph/0207120.
- [12] H. Azuma, *J. Phys. D*, **41**:2 (2008), 025102, 10 pp., arXiv: quant-ph/0604086.
- [13] Н. Н. Боголюбов (мл.), Б. И. Садовников, А. С. Шумовский, *Математические методы статистической механики модельных систем*, Наука, М., 1989.
- [14] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Аспекты теории полярона*, Физматлит, М..
- [15] Н. Н. Боголюбов (мл.), В. Н. Плечко, А. С. Шумовский, *ЭЧАЯ*, **14**:6 (1983), 1483–1499.
- [16] Н. Н. Боголюбов (мл.), Фам Ле Киен, А. С. Шумовский, *ТМФ*, **62**:3 (1985), 461–471.
- [17] Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, М., 1978.
- [18] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, *Annals Phys.*, **149**:2 (1983), 374–456.
- [19] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, Series in Modern Condensed Matter Physics, **10**, World Scientific, Singapore, 1999.
- [20] H.-P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
- [21] A. E. Allahverdyan, R. Serral Gracià, M. Th. Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. E*, **71**:4 (2005), 046106, 22 pp., arXiv: quant-ph/0411018.
- [22] R. Zwanzig, *Physica*, **30**:6 (1964), 1109–1123.
- [23] S. Nakajima, *Progr. Theor. Phys.*, **20**:6 (1958), 948–959.
- [24] R. Zwanzig, *J. Chem. Phys.*, **33**:5 (1960), 1338–1341.

Поступила в редакцию 25.02.2011,
после доработки 25.07.2011