Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Плана, Ф. Ансельми, П. Соле, Графы Паули, гипотеза Римана и гольдбаховы пары, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 3, 417–429

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6894>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:30:14

© 2012 г.

М. Плана*, Ф. Ансельми*, П. Соле†

ГРАФЫ ПАУЛИ, ГИПОТЕЗА РИМАНА И ГОЛЬДБАХОВЫ ПАРЫ

Рассматривается группа Паули $\mathcal{P}_q$, порождаемая унитарными квантовыми генераторами сдвига X и умножения Z , действующими на векторы в q -мерном гильбертовом пространстве. Известно, что число максимальных взаимно коммутирующих подмножеств внутри $\mathcal{P}_q$ задается пси-функцией Дедекинда $\psi(q)$, и для этой функции справедливо неравенство, содержащее постоянную Эйлера $\gamma \sim 0.577$, которое выполняется только для специальных малых размерностей $q \in \mathcal{A} = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 18, 30\}$. Множество $\mathcal{A}$ тесно связано с множеством $\mathcal{A} \cup \{1, 24\}$ целых чисел, являющихся полностью гольдбаховыми, т. е. такими числами n , что для всех простых чисел $p < n - 1$, не являющихся делителями n , числа $n - p$ сами оказываются простыми. В случае исключительно высоких размерностей, равных примориальным числам N_r , можно ввести функцию Харди–Литтлвуда $R(q)$ для оценки числа гольдбаховых пар, что приводит к новому неравенству, устанавливающему эквивалентность гипотезе Римана для $R(N_r)$. Указанные теоретико-числовые свойства обсуждаются в применении к коммутационной структуре кудитов.

Ключевые слова: гипотеза Римана, гольдбаховы пары, обобщенная группа Паули, коммутационная структура кудитов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе предлагается новое соответствие между графами Паули [1], [2], которые задают коммутационные соотношения кудитовых наблюдаемых, и теорией простых чисел. Пси-функция Дедекинда $\psi(q) = q \prod_{p|q} (1 + 1/p)$, где p – простое число, используется при нахождении числа максимальных коммутирующих наборов кудитов [1] и отвечает гипотезе Римана (ГР) для примориальных чисел $q \equiv N_r = 2 \dots p_r$ (произведений первых r простых чисел) [3]. Аналогично существует удивительная связь между $\psi(q)$ и функцией Харди–Литтлвуда $g(q) = R(q) \cdot q / \ln^2 q$ для гольдбахового распределения пар простых чисел (определение $R(q)$ см. в разделе 3). В частности, можно увидеть, что $\psi(q)$ соответствует так называемым полностью гольдбаховым числам при малых q и что неравенство $R(q) < \zeta(2) \cdot \psi(q)/q$ также соответствует ГР для примориальных чисел.

*FEMTO-ST Institute, CNRS, Besançon, France. E-mail: michel.planat@femto-st.fr

†Telecom ParisTech, Paris, France. E-mail: sole@telecom-paristech.fr

Постоянная Эйлера

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \sim 0.57721$$

оказывается важной составляющей всех неравенств, встречающихся при рассмотрении этого соответствия, в силу формулы Мертенса

$$e^\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1}.$$

В разделе 2 мы показываем, что при малых q имеет место теоретико-числовое совпадение между $\psi(q)$ и полностью гольдбаховыми числами, а также приводим ранее известную теорему, связывающую $\psi(q)$ с ГР для примориальных чисел N_r . В разделе 3 это совпадение детально исследуется с помощью кудитовых графов Паули. Далее в разделе 4 устанавливается соответствие между $R(q)$ и ГР для примориальных чисел. В заключительном разделе 5 предлагается концепция дефекта Гольдбаха для преодоления различия между малыми и большими значениями q .

2. ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОЕ СОВПАДЕНИЕ

Начнем изложение с нескольких определений и известной теоремы.

Гипотеза Гольдбаха, сформулированная в 1742 г., утверждает, что любое четное целое число, большее двух, представимо в виде суммы двух простых чисел. В настоящее время это утверждение проверено вплоть до $2 \cdot 10^{18}$ [4]. Пара простых чисел (p_1, p_2) такая, что для четного целого числа n имеет место равенство $n = p_1 + p_2$, называется разбиением Гольдбаха.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Положительное целое число n называется *полностью гольдбаховым*, если для всех простых чисел $p < n - 1$, не являющихся делителями n (кроме случая $p = n - p$), числа $n - p$ оказываются простыми [5].

Неравенство

$$\frac{\psi(q)}{q} > e^\gamma \ln \ln q \quad (1)$$

выполняется только для полностью гольдбаховых чисел $q \in \mathcal{A}$, где

$$\mathcal{A} = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 18, 30\}.$$

Единственные полностью гольдбаховы числа, для которых неравенство не выполнено, суть $q = 1$ и $q = 24$. Это утверждение следует из результатов работ [3] и [5] (более общий подход см. в работе [6]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Положительное целое число n называется *почти полностью гольдбаховым* с индексом r , если для всех за исключением r случаев простых чисел $p < n - 1$, не являющихся делителями n (кроме $p = n - p$), число $n - p$ простое.

Обозначим через $g(n)$ число способов представить целое число n в виде суммы двух простых чисел. Максимальное значение $g(n)$ меньше или равно числу простых

ТАБЛИЦА 1. Почти полностью гольдбаховы числа с индексом $r \leq 10$.

Индекс r	Множество почти полностью гольдбаховых чисел
0	$\mathcal{A}_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 18, 24, 30\}$
1	$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \cup \{7, 9, 14, 16, 20, 36, 42, 60\}$
2	$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cup \{15, 22, 48, 90\}$
3	$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 \cup \{13, 26, 28, 34, 54, 66, 84, 120\}$
4	$\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_3 \cup \{11, 21, 40, 78, 210\}$
5	$\mathcal{A}_5 = \mathcal{A}_4 \cup \{19, 32, 44, 50, 72\}$
6	$\mathcal{A}_6 = \mathcal{A}_5 \cup \{17, 25, 46, 70, 102, 114\}$
7	$\mathcal{A}_7 = \mathcal{A}_6 \cup \{33, 38, 52, 64, 126, 150\}$
8	$\mathcal{A}_8 = \mathcal{A}_7 \cup \{23, 27, 31, 39, 56, 58, 96\}$
9	$\mathcal{A}_9 = \mathcal{A}_8 \cup \{29, 35, 76, 108, 168, 180\}$
10	$\mathcal{A}_{10} = \mathcal{A}_9 \cup \{45, 74, 132, 144\}$

чисел p , лежащих в интервале $n/2 \leq p \leq n - 1$. Значения n , при которых $g(n)$ достигает своего максимума, принадлежат множеству

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_0 \cup \{7, 14, 16, 36, 42, 48, 60, 90, 210\},$$

где $\mathcal{A}_0$ – множество полностью гольдбаховых чисел [7]. Не удивительно, что те числа из множества $\mathcal{B}$, которые не являются полностью гольдбаховыми, оказываются почти полностью гольдбаховыми с малыми значениями индекса r (как видно из табл. 1). Первые пять чисел и число 60 имеют индекс 1, числа 48 и 90 имеют индекс 2, а 210 – индекс 4. Для простого числа $p > 3$ индекс $r(p)$ представляет собой последовательность Слоана A062302. Мы исследуем это теоретико-числовое совпадение более подробно в разделе 3 в связи с коммутационной структурой кудитов.

Теоретико-числовые неравенства для примориальных чисел. Начнем с формулировки следующей теоремы, которая была доказана в работе [3] и в более общем виде в работе [6].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N_r = 2 \dots p_r$ – примориал порядка r . Неравенство

$$\frac{\psi(N_r)}{N_r \ln \ln N_r} > \frac{e^\gamma}{\zeta(2)}$$

выполнено при всех $r > 2$ тогда и только тогда, когда справедлива ГР.

В разделе 3 приведены дополнительные утверждения относительно числа гольдбаховых пар, связывающие функцию $\psi(q)$ с функцией Харди–Литтлвуда $R(q)$. Важным результатом является сформулированная в этом разделе гипотеза 1, которая эквивалентна ГР (см. теорему 4).

3. ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОЕ СОВПАДЕНИЕ ДЛЯ КУДИТОВ

В настоящем разделе приводятся определение системы с q уровнями, или кудита, а также теоретико-числовая структура, включающая в себя пси-функцию Дедекинда $\psi(q)$ и описывающая максимальные множества коммутирующих операторов.

Проверки неравенства (1) для различных чисел q , равно как и симметрии систем кудитов в соответствующих размерностях q , приведены в табл. 2 и 3 для того, чтобы подчеркнуть особенности обоих типов систем. В табл. 2 числа q выбраны из множества $\mathcal{A}_0$ полностью гольдбаховых чисел, а в табл. 3 взяты $q \notin \mathcal{A}_0$, $q \leq 36$.

В таблицах символы $\#tG$ и $\#mc$ обозначают соответственно число полностью гольдбаховых пар и число максимальных взаимно коммутирующих подмножеств; символы r и $\#atG$ – индекс почти полностью гольдбаховой пары (см. определение 2) и число этих подмножеств; $\epsilon(q) = \psi(q)/q - e^\gamma \ln \ln q$ и $\text{aut}(\mathcal{G}_q^*)$ – группа автоморфизмов соответствующей проективной прямой. Через K_n , $K_{n_1, \dots, n_l}$, C_n , $\text{Gr}_{p,q}$ и Cu обозначены соответственно полный граф с n вершинами, l -дольный граф, граф многоугольника с n вершинами, решеточный граф $p \times q$ и кубический граф; через BP_6 обозначен двудольный граф со спектром $\{0^8, (-6)^1, 6^1, (-2)^3, 2^3\}$. Через BP_9 обозначен двудольный граф со спектром $\{0^{16}, (-9)^1, 9^1, (-3)^3, 3^3\}$. В табл. 3 спектр подграфа SG в точке $q = 36$ есть $\{8^1, 0^9, (4)^4, 2^4\}$. Символ $\times$ отвечает непересекающимся копиям соответствующих подграфов. В последнем столбце каждой из таблиц представлены графы или нетривиальные подграфы, которые можно выделить на множестве точек однократного или многократного пересечения.

Таблица 2. Структура максимальных взаимно коммутирующих подмножеств для кудитов при $g \in \mathcal{A}_0$.

q	$\#tG$	$\#mc$	$\epsilon(q)$	$\text{aut}(\mathcal{G}_q^*)$	граф и подграфы
2	0	3	2.15	S_3	K_3
3	0	4	1.16	S_4	K_4
4	1	$6 + 1$	0.92	$G_{48} = \mathbb{Z}_2 \times S_4$	$K_{2,2,2}$
5	2	6	0.35	S_6	K_6
6	1	12	0.96	$G_{144} = A_4 \times D_6$ или $S_4 \times S_3$	$\mathcal{G}_6^* \equiv \text{Gr}_{4,3}, 3 \times K_4$
8	2	$12 + 3$	0.20	$\mathbb{Z}_2^6 \times (\mathbb{Z}_3^3 \times G_{48})$	$\mathcal{G}_8^*, 3 \times C_4$
10	3	18	0.31	$A_6 \times D_6$ или $S_6 \times S_3$	$\mathcal{G}_{10}^* \equiv \text{Gr}_{6,3}, 3 \times K_6$
12	2	$24 + 4$	0.38	$\mathbb{Z}_2^{12} \times G_{144}$	$3 \times \text{Cu}, 4 \times \mathcal{G}_4^*, 6 \times K_4$
18	4	$36 + 3$	0.11	$\mathbb{Z}_3^{12} \times (\mathbb{Z}_2^{12} \times G_{144})$	$3 \times \mathcal{G}_9^*, 4 \times \text{Gr}_{3,3}, 12 \times K_3$
24	6	$48 + 12$	-0.059	$(\mathbb{Z}_2^{24} \times \mathbb{Z}_3^{12}) \times (\mathbb{Z}_2^{12} \times G_{144})$	$3 \times \text{BP}_6, 4 \times \mathcal{G}_8^*, 6 \times \text{Cu}, 12 \times \{K_4, K_{2,2}\}$
30	6	72	0.22	$S_3 \times S_4 \times S_6$	$4 \times \mathcal{G}_{10}^*, 6 \times \mathcal{G}_6^*, 12 \times K_6$

Коммутационная структура отдельного кудита.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Неформально говоря, *кудитом* называется группа $\mathcal{P}_q = \langle X, Z \rangle$ с унитарными квантовыми генераторами

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{q-1}), \quad \omega = e^{2i\pi/q}.$$

Таблица 3. Структура максимальных взаимно коммутирующих подмножеств кудитов при $q \notin A_0$.

q	$(r, \#atG)$	$\#mc$	$\epsilon(q)$	$aut(\mathcal{G}_q^*)$	граф и подграфы
7	(1, 2)	8	-0.043	S_8	K_8
9	(1, 2)	$12 + 1$	-0.069	$(\mathbb{Z}_3^4 \times \mathbb{Z}_2^3) \times G_{48}$	$\mathcal{G}_9^*, 4 \times K_3$
11	(4, 0)	12	-0.47	S_{12}	K_{12}
13	(3, 2)	14	-0.60	S_{14}	K_{14}
14	(1, 3)	24	-0.014	$A_8 \times D_6$ или $S_8 \times S_3$	$\mathcal{G}_{14}^*, 3 \times K_8$
15	(2, 2)	24	-0.17	$A_6 \times G_{48}$ или $S_6 \times S_4$	$\mathcal{G}_{15}^*, 4 \times K_6$
16	(1, 4)	$24 + 7$	-0.32	$A_8^2 \times G_{48}$	$3 \times K_{4,4}, 6 \times C_4$
17	(6, 0)	18	-0.80	S_{18}	K_{18}
19	(5, 2)	20	-0.87	S_{20}	K_{20}
20	(1, 4)	$36 + 4$	-0.15	$\mathbb{Z}_2^{18} \times (S_6^2 \times S_3)$	$3 \times BP_5,$ $6 \times \{K_6, \mathcal{G}_4^*\}$
21	(4, 2)	32	-0.46	$A_8 \times G_{48}$ или $S_8 \times S_4$	$\mathcal{G}_{21}^*, 4 \times K_8$
22	(2, 5)	36	-0.37	$A_{12} \times D_6$ или $S_{12} \times S_3$	$\mathcal{G}_{22}^*$
23	(8, 0)	24	-0.99	S_{24}	K_{24}
25	(5, 2)	$30 + 1$	-0.88	$A_5^6 \times (\mathbb{Z}_2^6 \times S_6)$	$6 \times K_5$
26	(3, 5)	42	-0.49	$A_{14} \times D_6$ или $S_{14} \times S_3$	$\mathcal{G}_{26}^*, 3 \times K_{14}$
27	(8, 0)	$36 + 4$	-0.79	$A_9^4 \times (\mathbb{Z}_2^4 \times S_4)$	$4 \times K_{3,3,3}$
28	(3, 4)	$48 + 8$	-0.42	$\mathbb{Z}_2^{24} \times (S_8 \times S_3)$	$3 \times BP_7,$ $6 \times K_8, 8 \times \mathcal{G}_4^*$
29	(9, 0)	30	-1.13	S_{30}	K_{30}
31	(8, 2)	32	-1.16	S_{32}	K_{32}
32	(5, 4)	$48 + 15$	-0.71	$A_{16}^3 \times G_{48}$	$3 \times K_{8,8},$ $6 \times K_{4,4}, 12 \times C_4$
33	(7, 2)	48	-0.77	$A_{12} \times G_{48}$ или $S_{12} \times S_4$	$\mathcal{G}_{33}^*, 4 \times K_{12}$
34	(3, 7)	54	-0.65	$A_{18} \times D_6$ или $S_{18} \times S_3$	$\mathcal{G}_{34}^*, 3 \times K_{18}$
35	(9, 0)	48	-0.89	$A_8 \times G_{48}$ или $S_8 \times S_6$	$\mathcal{G}_{35}^*, 6 \times K_8$
36	(1, 8)	$72 + 19$	-0.27	$A_6^{12} \times (\mathbb{Z}_2^{10} \times S_4^2)$	$4 \times SG, 3 \times BP_9,$ $12 \times \{C_6, \mathcal{G}_4^*\}$

Пара Вейля (X, Z) удовлетворяет соотношению $ZX - \omega XZ = 0$, а каждый элемент группы $\mathcal{P}_q$ записывается единственным образом в виде $\omega^a X^b Y^c$ с величинами a, b, c , лежащими в модулярном кольце $\mathbb{Z}_q$. Имеем $|\mathcal{P}_q| = q^3$, $\mathcal{P}'_q = Z(\mathcal{P}_q)$ (порождаемая при этом подгруппа совпадает с центром группы и имеет порядок q). Можно задаться вопросом о том, каковы максимальные взаимно коммутирующие подмножества, содержащиеся в центральном фактор-множестве $\tilde{\mathcal{P}}_q = \mathcal{P}_q / Z(\mathcal{P}_q)$ с исключенным единичным оператором I_q .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{S}$ – множество максимальных взаимно коммутирующих подмножеств $\mathfrak{M}$ в $\tilde{\mathcal{P}}_q$. Мощность множества $\mathfrak{M}$ равна $|\mathfrak{M}| = q - 1$, а мощность множества $\mathfrak{S}$ равна $|\mathfrak{S}| = \sigma(q)$, где $\sigma(q)$ представляет собой сумму функций делителей числа q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы приведено в работе [8] (по поводу связи с функцией $\sigma(q)$ см. работу [1]). Изложим вкратце его идею.

Применив свойство пары Вейля, запишем теоретико-групповой коммутатор в виде $[X, Z] = XZX^{-1}Z^{-1} = \omega^{-1}I_q$, что приводит к выражению

$$[\omega^a X^b Z^c, \omega^{a'} X^{b'} Z^{c'}] = \omega^{cb' - c'b} I_q,$$

из которого следует, что два элемента из множества $\mathcal{P}_q$ коммутируют тогда и только тогда, когда равен нулю определитель $\Delta = \det \begin{pmatrix} b' & b \\ c' & c \end{pmatrix}$. Два вектора с нулевым симплектическим скалярным произведением $[(b', c'), (b, c)] = \Delta = b'c - bc'$ называются перпендикулярными. Таким образом, вместо исследования коммутационных соотношений для элементов группы $\mathcal{P}_q$ можно провести проверку на перпендикулярность векторов из кольца $\mathbb{Z}_q^2$ [9] с учетом изоморфизма

$$(\mathcal{P}_q/Z(\mathcal{P}_q), \times) \cong (\mathbb{Z}_q^2, +) \quad (2)$$

между фактором $\mathcal{P}_q$ по центральной подгруппе и алгеброй векторов на $\mathbb{Z}_q$ -модулярной решетке $\mathbb{Z}_q^2$, снабженной симплектическим скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$.

Определим теперь прямую изотропии как множество, состоящее из q точек на решетке $\mathbb{Z}_q^2$, такое, что симплектическое произведение любых двух точек из этого множества равно нулю по модулю q . Каждой такой прямой изотропии отвечает максимальное коммутирующее подмножество в $\mathcal{P}_q/Z(\mathcal{P}_q)$. Разложим на простые множители размерность гильбертова пространства: $q = \prod_i p_i^{s_i}$. В работе [8] было показано, что число линий изотропий на решетке $\mathbb{Z}_q^2$ равно

$$\prod_i \frac{p_i^{s_i+1} - 1}{p_i - 1} \equiv \sigma(q). \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{S}$ – подмножество множества $\mathfrak{S}$ такое, что для каждой $d \in \mathfrak{D}$ и $s \in \mathfrak{S}$ пересечение d и s непусто. Тогда мощность множества $\mathfrak{S} - \mathfrak{D}$ равна $\psi(q)$, где $\psi(q)$ – пси-функция Дедекинда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [8] показано, что линия изотропии на решетке $\mathbb{Z}_q^2$ отвечает лагранжеву подмодулю, т. е. максимальному модулю, для которого выполняется условие, что перпендикулярный модуль $M^\perp$ совпадает с M . Ограничим теперь рассмотрение на лагранжевы подмодули, являющиеся свободными циклическими подмодулями,

$$\mathbb{Z}_q(b, c) = \{(ub, uc) \mid u \in \mathbb{Z}_q\},$$

для которых соответствие $u \rightarrow (ub, uc)$ оказывается инъективным. Не все лагранжевы подмодули являются свободными циклическими подмодулями. Точка (b, c) такая, что действие группы $\mathbb{Z}_q(b, c)$ свободно, называется *допустимым вектором*, а набор свободных циклических подмодулей, задаваемых допустимыми векторами, называется *проективной прямой*:

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{Z}_q) = \{\mathbb{Z}_q(b, c) \mid (b, c) - \text{допустимый вектор}\}.$$

В соответствии с теоремой 5 работы [9] (см. также работу [10]) число точек проективной прямой равно

$$|\mathbb{P}_1(\mathbb{Z}_q)| = \prod_i (p_i^{s_i} + p_i^{s_i-1}) \equiv \psi(q). \quad (4)$$

Теперь, применив изоморфизм (2) между линиями изотропий на $\mathbb{Z}_q^2$ и максимальными коммутирующими множествами множества $\mathfrak{S}$, мы заключаем, что свободный циклический подмодуль изоморфен элементу множества $\mathfrak{S} - \mathfrak{D}$ и проективная прямая биективно соответствует множеству $\mathfrak{S} - \mathfrak{D}$. Доказательство теоремы завершено.

Графы Паули над отдельной кудитовой системой. Пусть $\mathcal{G}_q$ – граф Паули, построенный так, что наблюдаемые соответствуют вершинам, а ребра соединяют взаимно коммутирующие наблюдаемые (тождественное преобразование I_q вычеркнуто из списка). В самом деле, $|\mathcal{G}_q| = q^2 - 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Зададим геометрию инцидентности точка-прямая с наблюдаемыми в качестве точек и максимальными кликами в качестве прямых. Можно определить эту геометрию, построив *дуальный граф* $\mathcal{G}_q^*$, в котором вершины являются кликами (их число равно $\sigma(q)$), а ребро соединяет две непересекающиеся максимальные клики. Связная компонента графа $\mathcal{G}_q^*$ отвечает графу проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{Z}_q)$ (размера $\psi(q)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовем *спектром* графа $\mathcal{G}$ множество собственных значений $\text{spec}(\mathcal{G}) = \{\lambda_1^{n_1}, \lambda_2^{n_2}, \dots\}$ (взятых с кратностями n_i). Граф, спектр которого состоит только из целых чисел, называется *целым* графом.

Свойства графов $\mathcal{G}_q$ и $\mathcal{G}_q^*$. Основные свойства графов $\mathcal{G}_q$ и $\mathcal{G}_q^*$ собраны в табл. 2 и 3. Здесь мы вкратце опишем некоторые из заслуживающих упоминания свойств.

Свойство 1. Пусть $\mathcal{G}_q^*$ – дуальный граф Паули из определения 4, т.е. граф, связанный с проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{Z}_q)$. Тогда имеются интегральные графы следующих типов:

1) если $q = r$ при простом r , то

$$\text{spec}(\mathcal{G}_q^*) = \{(r+1)^1, (-1)^{r+1}\};$$

2) если $q = rs$ при двух различных простых числах r, s , то

$$\text{spec}(\mathcal{G}_q^*) = \{q^1, 1^q, (-r)^s, (-s)^r\};$$

3) если $q = rst$ при трех различных простых числах r, s, t , то

$$\text{spec}(\mathcal{G}_q^*) = \{q^1, t^{rs}, s^{rt}, r^{st}, (-1)^q, (-rs)^t, (-rt)^s, (-st)^r\};$$

4) если $q = 4r$ при нечетном простом числе r , то

$$\text{spec}(\mathcal{G}_q^*) = \{q^1, 2^{2r}, 0^{\psi(q)/2}, (-4)^r, (-2r)^2\};$$

5) если $q = p^l$ – степень простого числа p с $l > 1$, то

$$\text{spec}(\mathcal{G}_q^*) = \{q^1, 0^{\psi(q)-(p+1)}, (-q/p)^p\};$$

6) в размерности $q \leq 36$ случаи, не описанные выше, имеют место для $q = 18$, при этом

$$\text{spec}(\mathcal{G}_q^*) = \{18^1, 3^6, 0^{24}, (-6)^3, (-9)^2\},$$

а также для $q = 24$, в этом случае

$$\text{spec}(\mathcal{G}_q^*) = \{24^1, 4^6, 0^{36}, (-8)^3, (-12)^2\},$$

и для $q = 36$, в этом случае

$$\text{spec}(\mathcal{G}_q^*) = \{36^1, 6^6, 0^{60}, (-12)^3, (-18)^2\}.$$

Свойство 2. Пусть $\mathcal{G}_q^*$ – дуальный граф Паули из определения 4. Графы и подграфы следующих типов содержатся в последних столбцах табл. 2 и 3:

1) если $q = r$ при простом r , то $\mathcal{G}_r^* = K_{r+1}$;

2) если $q = rs$, где r, s – два различных простых числа, то имеют место копии полных подграфов вида $p_j \times K_{p_i+1}$ при $i, j \in \{1, 2\}$;

для типов 4, 5 и 6 в размерности q , содержащей квадрат, проективная прямая $\mathbb{P}_1(\mathbb{Z}_q)$ содержит двудольные или многодольные подграфы; при $q \in \mathcal{A}_0$ их тип есть $K_{2,2}$, $K_{2,2,2}$, Cu или BP_6 (см. шестой столбец в табл. 2), при $q \notin \mathcal{A}_0$ мы имеем двудольные или многодольные подграфы типов $K_{4,4}$, $K_{4,4,4}$ и BP_r , $r \neq 6$ (см. шестой столбец в табл. 3);

в случае типа 3 для старших размерностей примориального типа имеет место следующий результат.

Свойство 3. В примориальных размерностях $q = N_r = \prod_{i=1}^r p_i$ при $r > 3$ группа автоморфизмов графа $\mathcal{G}_q^*$ есть произведение симметрических групп S_{p_i+1} , возникающих из сомножителей числа q . Кроме того, в соответствии с теоремой 1 при условии справедливости ГР размер проективной прямой определяется соотношением

$$\frac{|\mathbb{P}_1(\mathbb{Z}_q)|}{q \ln \ln q} > \frac{e^\gamma}{\zeta(2)} \sim 1.08.$$

Некоторые замечания. Обсудим вкратце результаты, собранные в табл. 2 и 3. На первый взгляд симметрии кудитов в размерности $q \in \mathcal{A}_0$, соответствующей полностью гольдбаховому числу (см. табл. 2), не противоречат симметриям, проявляющимся в малых размерностях $q \notin \mathcal{A}_0$, $q \leq 36$ (см. табл. 3). Ограничим рассмотрение таблиц на случаи, в которых q содержит квадраты, так что полное число $\sigma(q)$ изотопических линий/максимальных коммутирующих подмножеств в (3) строго больше, чем число элементов $\psi(q)$ проективной прямой в (4). В результате такое разбиение мощности множества максимальных коммутирующих подмножеств оказывается тем же, что и в третьем столбце табл. 2: $\sigma(q) = \psi(q) + (\cdot) [1]$.

Для случаев, приведенных в пятом столбце табл. 2, не свободных от квадратов, группа G_{48} квартитов и группа G_{144} секститов оказываются строительными блоками групп автоморфизмов. Рассматривая дуальный граф Паули $\mathcal{G}_q^*$ как симплициальный комплекс, получим, что обе эти группы отвечают топологиям сферы и тора. Нетривиальные решеточные графы или двудольные графы можно получить как составляющие графа $\mathcal{G}_q^*$ (см. шестой столбец табл. 2).

В табл. 3 для графа $\mathcal{G}_q^*$ с размерностью, не свободной от квадратов, имеют место симметрии с другими топологиями, включающие симметрические группы старших порядков и более простые двудольные графы такие, как BP_r .

Размерность 24 заслуживает отдельного внимания, поскольку она представляет собой единственное полностью гольдбахово число, при котором нарушается неравенство (1). Заметим, что размерность 24 также оказывается весьма специфичной с точки зрения решеток (таких, как решетка Лича) и соответствует некому фазовому переходу для симметрий другого типа [11] по сравнению с фазовым переходом, описанным в работе [6].

4. О ГОЛЬДБАХОВЫХ ПАРАХ В ПРИМОРИАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ И ГИПОТЕЗЕ РИМАНА

В соответствии с результатами Харди и Литтлвуда [12] число гольдбаховых пар (p_1, p_2) простых чисел, сумма которых является четным числом q , асимптотически задается функцией Харди–Литтлвуда

$$g(q) = R(q) \frac{q}{\ln^2 q}, \quad R(q) = 2C_2 \prod_{p|q} \frac{p-1}{p-2},$$

где

$$C_2 = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \sim 0.660 \quad (5)$$

– постоянная простых чисел-близнецов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $N_r = 2 \dots p_r$ – примориальное число порядка r . Тогда имеет место предельное соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{R(N_r)}{\ln \ln N_r} = e^\gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно расщепить бесконечное произведение в (5) как

$$C_2 = \prod_{i=2}^r \left(1 - \frac{1}{(p_i - 1)^2}\right) \prod_{i=r+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(p_i - 1)^2}\right),$$

откуда с применением равенства

$$\frac{p_i - 1}{p_i - 2} = \frac{1}{1 - 1/(p_i - 1)}$$

мы получаем

$$R(N_r) = 2 \prod_{i=r+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(p_i - 1)^2}\right) \prod_{i=2}^r \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right).$$

Теперь в силу сходимости бесконечного произведения (5) имеем

$$R(N_r) \sim 2 \prod_{i=2}^r \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) = 2 \prod_{i=2}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}.$$

Далее доказываемое утверждение следует из той же цепочки рассуждений, что и в доказательстве предложения 3 в работе [3].

ГИПОТЕЗА 1. *Неравенство Харди–Литтлвуда*

$$\frac{R(N_r)}{\ln \ln N_r} > e^\gamma \quad (6)$$

выполнено при всех $r > 1$.

Справедливость предложенной гипотезы подтверждается численными проверками, результаты которых собраны в табл. 4. Далее мы покажем, что справедливость данной гипотезы эквивалентна справедливости ГР.

ТАБЛИЦА 4. Численное подтверждение гипотезы.

r	N_r	$u_r - e^\gamma$
2	6	2.74
10	6.5×10^9	0.23
10^2	4.2×10^{219}	0.028
10^3	6.8×10^{3392}	0.0049
10^4	9.1×10^{45336}	0.0010
10^5	1.9×10^{563920}	0.00023

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого четного числа q имеет место следующее неравенство:*

$$R(q) < \zeta(2) \frac{\psi(q)}{q}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем отношение

$$x(q) = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{R(q)}{\psi(q)/q},$$

которое можно переписать как

$$x(q) = \frac{2 \prod_{p>2} (1 - 1/(p-1)^2)}{(4/3) \prod_{p>2} (1 - 1/p^2)^{-1}} \prod_{\substack{p>2, \\ p|q}} \frac{1}{(3/2)(1 + 1/p)(1 - 1/(p-1))}.$$

Расщепляя произведение в виде $\prod_{p|q}(\cdot) \times \prod_{p \nmid q}(\cdot)$, получаем

$$x(q) = \prod_{\substack{p>2, \\ p|q}} \frac{1 - 1/(p-1)^2}{1 - 1/p^2} \prod_{\substack{p>2, \\ p \nmid q}} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Второе произведение в правой части равно единице, а первое произведение меньше единицы, вследствие чего неравенство (7) выполняется.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Приморциальные числа N_r суть числа-чемпионы, т.е. левые и правые максимумы функции $q \mapsto x(q)$. Имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} x(N_r) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число гольдбаховых пар таково, что существует постоянная c_1 , для которой $R(q) < c_1 \cdot \psi(q)/q$ (см. работы [13] или [14]). Применяя метод, использованный в работе [3] при вычислении чисел-чемпионов для $\psi(q)/q$, получим, что $c_1 \equiv \zeta(2)$.

ТЕОРЕМА 4. *Гипотеза 1 справедлива тогда и только тогда, когда справедлива ГР.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ГР не выполняется, то в соответствии с теоремой 4.2 работы [3] и в силу неравенства (7) существует бесконечно много чисел r , для которых $R(N_r)/\ln \ln N_r < e^\gamma$, следовательно, для этих чисел нарушается неравенство Харди–Литтлвуда (6).

Выведем теперь гипотезу 1 из ГР. Из теоремы 3(b) работы [15] вытекает, что в предположении справедливости ГР для произвольного $x \geq 2$

$$f(x) = e^\gamma \ln \theta(x) \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < 1,$$

где $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$ – первая функция Чебышёва. Введем новую функцию

$$g(x) = \frac{e^\gamma}{2C_2} \ln \theta(x) \prod_{p \leq x} \frac{p-2}{p-1}$$

и покажем, что в предположении справедливости ГР имеет место неравенство

$$g(x) < 1. \quad (8)$$

Найдем в явном виде отношение

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{C_2} \prod_{2 < p \leq x} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2},$$

где

$$C_2 = \prod_{2 < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p > x} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Путем непосредственных вычислений получим

$$\ln g(x) = \ln f(x) - \sum_{p > x} \ln \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right). \quad (9)$$

Применяя теперь замену переменных $y = x - 1$, зададим область значений, при которых $p - 1 > y$, так что

$$\ln \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) < \ln \left(1 - \frac{1}{y^2}\right).$$

Заменив суммирование интегрированием в правой части уравнения (9), получим, что при больших y

$$\begin{aligned} - \sum_{p > x} \ln \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) &< - \int_y^\infty \ln \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) du = \\ &= - \left[u \ln \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) + \ln \left(\frac{u+1}{u-1}\right) \right]_y^\infty \sim \frac{1}{y} \sim \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

В силу теоремы 3(b) из работы [15] это выражение ограничено сверху величиной $\ln f$. Тем самым в соответствии с формулой (9) имеем $\ln g < 0$, и неравенство (8) выполнено.

Теперь, применяя те же рассуждения, что и в работе [15], получим, что гипотеза 1 является следствием неравенства $g(x) < 1$, поскольку

$$g(p_r) = \frac{e^\gamma \ln \ln N_r}{R(N_r)}.$$

Это завершает доказательство теоремы.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Полезно обсудить некоторые результаты, полученные для гольдбаховых пар в малых четных размерностях и в размерностях, равных примориалям, введя меру, которую мы называем гольдбаховым дефектом. Для положительного четного числа q гольдбахов дефект $\text{gd}_q = \zeta(2)qR(q) - \psi(q)$. Имеет место следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Числа-чемпионы функции gd_q (числа, при которых gd_q достигает нового рекорда) образуют последовательность

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \{ & 2, 4, 6, 12, 18, 24, 30, 42, 54, 60, 84, 90, 120, 150, 180, 210, 270, 300, 330, 390, 420, \\ & 510, 570, 630, 780, 840, 990, 1050, 1260, 1470, 1650, 1680, 1890, 2100, 2310, 2730, \\ & 3150, 3360, 3570, 3990, 4290, 4410, 4620, 5250, 5460, 6090, 6510, 6930, 7770, \\ & 7980, 8190, 9030, 9240, \dots \}. \end{aligned}$$

Последовательность $\mathcal{C}$ есть подмножество чисел-чемпионов для кототиентной функции (номенклатура A051953 в энциклопедии Слоана). По определению последовательность $\mathcal{C}$ включает в себя четные полностью гольдбаховы числа, кроме числа 10 (см. определение 1) и приморимальные числа (см. гипотезу 1 и следствие 1). Ни одна из (малых) четных размерностей из табл. 3 не принадлежит этой последовательности. Для всех $i \neq 2$, принадлежащих последовательности $\mathcal{C}$, справедливо неравенство

$$\frac{\zeta(2)\psi(i)}{i \ln \ln i} > \frac{R(i)}{\ln \ln i} > e^\gamma.$$

В дальнейших исследованиях гольдбахов дефект может оказаться полезным при обсуждении изменений симметрий графов Паули. Первая не свободная от квадратов и не полностью гольдбахова размерность в последовательности $\mathcal{C}$ есть $q = 60$. Мощность максимальных коммутирующих множеств в этом случае допускает разложение $\sigma(60) = \psi(60) + (\cdot)$, т.е. $168 = 144 + 24$.

В заключение отметим, что нами обнаружен краеугольный камень, лежащий в основе связи между арифметикой кудитов, гольдбаховыми парами и ГР. Может оказаться, что потеря когерентности в классической системе по сравнению с квантовой существенно зависит от ее высокой размерности. С помощью неравенств, приведенных в теоремах 1 и 3, можно определить энтропию. Смешанные системы из нескольких структур кудитов также имеют привлекательные гнездовые арифметические и геометрические структуры, которые заслуживают детального исследования (см. табл. 1 в работах [1] и [16]).

Список литературы

- [1] M. Planat, *J. Phys. A*, **44**:4 (2010), 045301, 16 pp., arXiv: 1009.3858.
- [2] M. Planat, M. Saniga, *Quantum Inf. Comput.*, **8**:1–2 (2008), 127–146.
- [3] P. Solé, M. Planat, *J. Comb. and Numb. Theory*, **3**:1 (2011), 33–38, arXiv: 1011.1825.
- [4] T. Oliveira e Silva, *Goldbach conjecture verification*.
<http://www.ieeta.pt/~tos/goldbach.html>, 2012.
- [5] D. van Golstein Brouwers, J. Bamberg, G. Cairns, *Aust. Math. Soc. Gaz.*, **31**:4 (2004), 251–255.
- [6] M. Planat, P. Solé, S. Omar, *J. Phys. A*, **44**:14 (2011), 145203, 9 pp., arXiv: 1012.4665.
- [7] J.-M. Deshouillers, A. Granville, W. Narkiewicz, C. Pomerance, *Math. Comp.*, **61**:203 (1993), 209–213.
- [8] O. Albouy, *J. Phys. A*, **42**:8 (2009), 072001, arXiv: 0809.3220.
- [9] H. Havlicek, M. Saniga, *J. Phys. A*, **41**:1 (2008), 015302, 12 pp.
- [10] A. Vourdas, C. Banderier, *J. Phys. A*, **43**:4 (2010), 042001, 9 pp.
- [11] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer, New York, 1998.
- [12] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Acta Math.*, **44**:1 (1923), 1–70.
- [13] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory*, v. I: *Classical Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [14] J. Sándor, D. S. Mitrinović, B. Crstici, *Handbook of Number Theory*. I, Springer, Dordrecht, 2006.
- [15] J.-L. Nicolas, *J. Number Theory*, **17**:3 (1983), 375–388.
- [16] M. Saniga, M. Planat, *J. Phys. A*, **44**:22 (2011), 225305, 12 pp., arXiv: 1102.3281.

Поступила в редакцию 14.04.2011