Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Славнов, Возможность согласования квантовой механики с общей теорией относительности, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 3, 493–510

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6895>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:50:30

© 2012 г.

Д. А. Славнов*

ВОЗМОЖНОСТЬ СОГЛАСОВАНИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ С ОБЩЕЙ ТЕОРИЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Показано, что математический формализм общей теории относительности может быть согласован с математическим формализмом квантовой механики, основанным на алгебраическом подходе. При этом не требуется квантования гравитационного поля.

Ключевые слова: общая теория относительности, квантовая механика, алгебраический подход.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двадцатый век подарил человечеству две замечательные физические теории: квантовую механику и теорию относительности. Но отношения между этими теориями оказались не безоблачными. Специальную теорию относительности, хотя и не без проблем, удалось объединить с квантовой механикой. От этого союза родилось жизнеспособное дитя – квантовая теория поля. А вот общую теорию относительности (ОТО) с квантовой механикой в гармоничный союз пока никак объединить не удается. Противоречия оказались слишком серьезными.

Вся ОТО пронизана духом локальности (см., например, [1]). Формально в квантовой теории поля аксиома локальности (причинности) также является одной из основополагающих. Но одновременно с этим широко используется так называемый проекционный принцип [2], который очень плохо стыкуется со свойством локальности. Существуют многочисленные “доказательства” того, что локальность и причинность не совместимы с математическим аппаратом, используемым в квантовой механике.

Наиболее рельефно несогласованность математических аппаратов ОТО и квантовой механики проявляется в основном уравнении ОТО. Это уравнение связывает кривизну четырехмерного пространства-времени $\mathfrak{M}$ с тензором энергии-импульса (4-импульса) материи. Кривизна пространства $\mathfrak{M}$ является одним из основных понятий ОТО и описывается в терминах c -числовых функций. С другой стороны, тензор

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: slavnov@goa.bog.msu.ru

4-импульса материи является важным понятием в квантовой теории и описывается в терминах операторов в гильбертовом пространстве, т. е. с помощью q -числовых функций. Поэтому при попытке прямого объединения ОТО с квантовой механикой мы были бы вынуждены приравнивать s -числовые и q -числовые функции. Это указывает на то, что без модернизации ОТО или квантовой теории, или без того и другого одновременно, обойтись не удастся.

Основной целью настоящей статьи является формулировка математического аппарата, который с единых позиций описывал бы как квантовые, так и классические наблюдаемые. Особенно это важно в теории, которая претендует одновременно описывать как квантовые явления, так и гравитацию.

В настоящее время в качестве основного направления гармонизации ОТО и квантовой теории выбрано квантование гравитационного поля. Построена очень красивая математическая схема – так называемая супергравитация. Однако эта схема оказалась не без существенных недостатков. Например, никак не удастся построить перенормируемую теорию гравитационного поля. И, что самое главное, супергравитация, как и любая суперсимметричная теория, предполагает существование суперпартнеров обычных частиц. Ничего похожего экспериментально обнаружено не было.

В настоящей статье предлагается пойти в другом направлении, а именно: отказаться от принятого в стандартной квантовой механике фактического отождествления понятий *наблюдаемая* и *оператор в гильбертовом пространстве*. Для классических наблюдаемых такое отождествление явно не подходит. Вместо этого предлагается воспользоваться алгебраическим подходом, в котором наблюдаемые рассматриваются как элементы некоторой алгебры без какой-либо ссылки на их представление в виде операторов. Такой подход пригоден как для квантовых, так и для классических наблюдаемых. Ниже мы рассмотрим специальный вариант алгебраического подхода к квантовой теории, разработанный автором в цикле статей [3]–[7]. Феноменологическое обоснование аксиом, принятых в этом подходе, описано в работе [3]. Здесь мы ограничимся только формулировкой основных из этих аксиом и краткими комментариями.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Основным понятием, используемым нами, как и в общем случае алгебраического подхода, является *наблюдаемая*. Эта такая характеристика изучаемой физической системы, для которой с помощью определенной измерительной процедуры можно получить некоторое численное значение. Нужно четко различать понятия наблюдаемой и значения наблюдаемой. Часто эти понятия путают. Наблюдаемая – это то, что измеряется (атрибут изучаемой системы). Значение наблюдаемой – это численное значение, которое получается в результате измерения (показание измерительного прибора).

Основное свойство наблюдаемых состоит в том, что их можно умножать на действительные числа, складывать и перемножать между собой. Предполагается, что выбрана некоторая система единиц и все наблюдаемые можно считать безразмерными. Таким образом, наблюдаемые обладают алгебраическими свойствами. Эти свойства фиксируются в постулате.

ПОСТУЛАТ 1. *Наблюдаемые являются эрмитовыми элементами некоторой C^* -алгебры $\mathfrak{A}$.*

Множество наблюдаемых будем обозначать $\mathfrak{A}_+$ ($\mathfrak{A}_+ \subset \mathfrak{A}$). Обоснование того, что $\mathfrak{A}$ должна быть C^* -алгеброй (см., например, [8]), можно найти в статье [3]. Обратим внимание, что постулат 1 справедлив как для квантовых, так и для классических систем. Далее термин *классический* будет считаться синонимом термина *неквантовый*. Поэтому релятивистские объекты могут быть как классическими, так и квантовыми.

Что такое *физическая система* или *физический объект* интуитивно более или менее ясно. Но математический аппарат желательно строить на основании математически четко определенных понятий. Поэтому далее под термином физическая система мы будем подразумевать определенное подмножество $\mathfrak{D}$ точек x четырехмерного пространства-времени $\mathfrak{M}$ и определенное множество наблюдаемых, заданных на $\mathfrak{D}$. Некоторые из наблюдаемых должны иметь фиксированные значения. Например, электрон – это некоторая область в пространстве $\mathfrak{M}$ и определенный набор наблюдаемых, заданных на этой области. В набор наблюдаемых входят 4-импульс, спин, проекции спина, масса, электрический и другие заряды и т.д. При этом заряды, спин, масса и некоторые другие наблюдаемые имеют фиксированные значения.

Выбранная терминология удобна тем, что она позволяет просто и математически корректно определить понятие *подсистемы* физической системы. Подсистема – это просто некоторое подмножество множества $\mathfrak{D}$ и некоторое подмножество множества наблюдаемых систем. При этом не предполагается, что подсистема должна быть изолирована от остальной части системы. Она может взаимодействовать с другими частями системы и не обязана быть пространственно выделенной из системы.

Часто приходится рассматривать наблюдаемые $\hat{A}(x)$, заданные на отдельной точке x . Хотя, строго говоря, как правило, на отдельной точке наблюдаемую задать нельзя. В этом случае величину $\hat{A}(x)$ следует понимать в духе теории обобщенных функций, т. е. как обобщенную наблюдаемую. Здесь и далее наблюдаемые обозначаются латинскими буквами с “крышкой”. Полученное в результате измерения значение наблюдаемой обозначается той же буквой, но без “крышки”.

Следует подчеркнуть, что точки пространства $\mathfrak{M}$ (4-координаты) не являются наблюдаемыми, хотя в нерелятивистской квантовой механике часто используется термин *оператор координаты*. При этом в стандартной квантовой механике обычно отождествляются понятия линейного оператора в гильбертовом пространстве и наблюдаемой. Впрочем, время в качестве наблюдаемой не рассматривается.

Какая же величина в действительности является наблюдаемой в том случае, когда говорят о координате, как о наблюдаемой? Чтобы ответить на этот вопрос, надо обратиться к процедуре измерения координаты. Схематически эта процедура выглядит следующим образом. Пусть мы хотим измерить координату точечного объекта. Тогда в качестве измерительного прибора мы используем линейку с нанесенными на нее делениями. В фиксированный момент времени каждое такое деление приближенно может быть проиндексировано точкой пространства $\mathfrak{M}$. Введем наблюдаемую $\hat{p}(x)$, которая принимает значение $p(x) = 1$, если объект попал в деление с координатой x , и значение $p(x) = 0$, если не попал. Наблюдаемая $\hat{p}(x)$ обладает свойствами проектора и является элементом алгебры $\mathfrak{A}$. В случае результата $p(x) = 1$ мы, допуская вольность речи, говорим, что объект имеет координату x .

Наблюдаемые могут быть двух типов: совместимые (одновременно измеримые) и несовместимые. Понятие совместимости тесно связано с процессом измерения наблюдаемых. Измерения могут быть воспроизводимыми и невоспроизводимыми. В процессе измерения исследуемая физическая система подвергается воздействию измерительного прибора, в результате которого в системе могут происходить какие-то изменения.

Пусть измеряется наблюдаемая $\hat{A}$ и в результате измерения получено значение наблюдаемой A . Если при повторном измерении этой наблюдаемой обязательно получается такое же значение, то первое измерение называется воспроизводимым. Предполагается, что между измерениями система не подвергалась никакому воздействию, а возможное изменение за счет свободной эволюции мы умеем учитывать.

Будем у системы воспроизводимым образом измерять две наблюдаемые $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Сначала измеряем наблюдаемую $\hat{A}$, затем наблюдаемую $\hat{B}$, потом опять наблюдаемую $\hat{A}$ и, наконец, повторно наблюдаемую $\hat{B}$. Если при повторных измерениях каждой из наблюдаемых будут воспроизводиться первоначальные результаты, то такую процедуру измерения и соответствующие измерительные приборы назовем совместимыми. Если для наблюдаемых $\hat{A}$ и $\hat{B}$ существует такая процедура, то наблюдаемые назовем совместимыми.

Классические и квантовые системы различаются между собой тем, что у классических систем все наблюдаемые совместимы (одновременно измеримы). У квантовых систем есть как совместимые, так и несовместимые наблюдаемые. Это критическое свойство мы примем за определение классических и квантовых физических систем и сформулируем следующий постулат.

ПОСТУЛАТ 2. *Множество совместимых наблюдаемых является действительной ассоциативной коммутативной алгеброй. Наоборот, если наблюдаемые принадлежат некоторой действительной ассоциативной коммутативной алгебре, то они совместимы.*

Каждая C^* -алгебра $\mathfrak{A}$ имеет максимальную коммутативную подалгебру Ω_ξ . Эта такая подалгебра, которая не является подалгеброй (отличной от себя) никакой другой коммутативной подалгебры. Если алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна, то она сама является максимальной коммутативной подалгеброй. В этом случае множество Ξ , которое пробегает индекс ξ , отличающий одну максимальную подалгебру от другой, состоит из одного элемента. Можно убедиться (см. [3]), что если алгебра $\mathfrak{A}$ некоммутативна, то множество Ξ имеет мощность континуума. Опыт показывает, что если система классическая, то при совместимых измерениях сумме наблюдаемых соответствует сумма результатов измерения каждой из наблюдаемых. Аналогично для произведения двух наблюдаемых и произведения наблюдаемой на действительное число. Иными словами, для классической системы результаты измерений являются гомоморфным отображением алгебры наблюдаемых в множество действительных чисел. Для коммутативной C^* -алгебры такое отображение называется характером алгебры.

Характер подалгебры Ω_ξ будем обозначать через $\varphi_\xi(\cdot)$. Отображение

$$\hat{A} \rightarrow A_\xi = \varphi_\xi(\hat{A}), \quad \hat{A} \in \Omega_\xi,$$

задает линейный мультипликативный функционал на алгебре Ω_ξ .

Теперь опишем такое понятие, как состояние физической системы. Для классических и квантовых систем состояния обычно задаются совершенно различными способами: для классических систем – с помощью точки в фазовом пространстве, для квантовых – либо с помощью вектора состояния, либо с помощью матрицы плотности. Объединяет эти способы то, что в обоих случаях каждой наблюдаемой ставится в соответствие некоторое число. Возьмем этот факт за основу и для классической системы определим состояние как характер алгебры ее наблюдаемых. Заметим, что такое определение не требует знания динамики системы. Оно пригодно как для замкнутых, так и для открытых систем. На случай квантовых систем этот способ задания состояния можно обобщить следующим образом.

Каждая наблюдаемая $\hat{A}$ квантовой системы принадлежит множеству $\mathfrak{A}_+ \subset \mathfrak{A}$. Одновременно она принадлежит некоторой максимальной коммутативной подалгебре $\mathfrak{Q}_\xi \subset \mathfrak{A}_+$ алгебры $\mathfrak{A}$. Руководствуясь нашим определением понятия подсистемы, мы можем рассматривать квантовую систему как множество классических подсистем. Эти подсистемы будут открытыми, так как они могут взаимодействовать между собой. Кроме того, каждая из этих подсистем может не иметь собственной динамики, так как обобщенная координата и обобщенный импульс, соответствующие одной степени свободы, могут принадлежать разным подалгебрам $\mathfrak{Q}_\xi$. Но все это не мешает заданию состояния каждой из этих подсистем с помощью соответствующего характера $\varphi_\xi(\cdot)$. Состояние исходной квантовой системы мы можем задать с помощью набора $\varphi = [\varphi_\xi]$ характеров $\varphi_\xi(\cdot)$, задающих состояния всех ее максимальных классических подсистем. Назовем такой набор элементарным состоянием физической системы и примем следующий постулат.

ПОСТУЛАТ 3. *Результат измерения наблюдаемых физической системы определяется ее элементарным состоянием.*

Как показано в статье [3], не ограничивая общности физического описания системы, можно наложить дополнительное требование на алгебру $\mathfrak{A}$.

ПОСТУЛАТ 4. *Если для всех элементарных состояний $\varphi(\hat{A}) = 0$, то $\hat{A} = 0$.*

Постулаты 3 и 4 также годятся как для квантовой, так и для классической системы. Только для классической системы набор $[\varphi_\xi]$ состоит из одного элемента, а для квантовой – из бесконечного числа элементов. Для классической системы понятие *элементарное состояние* эквивалентно обычному понятию *состояние*. Для квантовой системы элементарное состояние – это совершенно новое понятие, существенным образом отличающееся от понятия *квантового состояния*.

Если бы мы могли найти элементарное состояние квантовой системы, мы смогли бы предсказать результат измерения любой наблюдаемой. Однако это сделать невозможно из-за наличия несовместимых наблюдаемых. Максимальную информацию об элементарном состоянии мы можем получить в процессе совместного измерения максимального числа наблюдаемых. Все эти наблюдаемые принадлежат какой-то одной подалгебре $\mathfrak{Q}_\eta$, $\eta \in \Xi$. Поэтому максимально, что мы можем определить из всего набора $\varphi = [\varphi_\xi]$, – это один функционал $\varphi_\eta(\cdot)$.

Для определения любого другого характера обязательно потребуется измерение, несовместимое с предыдущими. Это измерение неконтролируемым образом возмущит состояние системы и обесценит ранее полученную информацию. В связи

с этим полезно рассмотреть класс $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ элементарных φ_η -эквивалентных состояний $\varphi = [\varphi_\xi]$. Этот класс состоит из элементарных состояний, для которых функционал $\varphi_\eta(\cdot) \in \varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ один и тот же. Все другие функционалы $\varphi_\xi(\cdot)$ в различных элементах класса друг с другом не связаны. Таким образом, максимально, что мы можем узнать об элементарном состоянии, – это то, что оно принадлежит некоторому классу эквивалентности.

Наблюдаемая $\hat{A}$ может одновременно принадлежать нескольким подалгебрам $\mathfrak{Q}_\xi$. В этом случае мы не будем требовать, чтобы обязательно выполнялось, казалось бы, естественное равенство

$$\varphi_\xi(\hat{A}) = \varphi_{\xi'}(\hat{A}), \quad \text{если} \quad \hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi \cap \mathfrak{Q}_{\xi'}, \quad \varphi_\xi(\cdot) \in \varphi, \quad \varphi_{\xi'}(\cdot) \in \varphi. \quad (1)$$

Если потребовать, чтобы равенство (1) выполнялось для всех наблюдаемых, то нельзя доказать, что соответствующие элементарные состояния существуют. Без условия (1) теорему существования элементарных состояний доказать можно (см. [3]). В работе [3] также показано, что для каждой отдельной наблюдаемой $\hat{A}$, и даже для любой группы взаимно коммутирующих наблюдаемых, существуют элементарные состояния φ , в которых равенство (1) справедливо для всех $\mathfrak{Q}_\xi$, содержащих наблюдаемую $\hat{A}$ (или упомянутую группу). В этом случае будем говорить, что наблюдаемая $\hat{A}$ (группа наблюдаемых) стабильна на элементарном состоянии φ и, наоборот, элементарное состояние φ стабильно на наблюдаемой $\hat{A}$ (на группе наблюдаемых).

С другой стороны, квантовый эксперимент не требует выполнения равенства (1). Функционал $\varphi_\xi(\cdot)$ описывает результат взаимодействия измерительного прибора с исследуемой физической системой. Этот результат может зависеть как от свойств исследуемой системы, так и от свойств измерительного прибора. Простейший пример можно указать в классической нерелятивистской механике. Пусть прибор измеряет скорость некоторой материальной точки и регистрирует некоторый результат. Пусть другой прибор, движущийся относительно первого прибора, также измеряет скорость того же объекта. Результаты измерения будут разными.

Конечно, в данном случае проблема решается тривиально. Если мы знаем скорость одного прибора относительно другого, то без труда пересчитаем показания одного прибора в показания другого. В этом смысле мы можем считать, что показания обоих приборов эквивалентны, или иначе, мы можем сказать, что эти приборы откалиброваны согласованным образом. Отметим, что для классической системы проблемы равенства (1) нет, так как имеется только одна максимальная коммутативная подалгебра.

В квантовом случае дело обстоит иначе. Вопрос о справедливости равенства (1) мог бы решить эксперимент, но такого эксперимента не существует. Для проверки равенства (1) надо провести, используя разные приборы, два последовательных эксперимента по измерению наблюдаемой $\hat{A}$ у одной и той же физической системы. Если первое измерение невоспроизводимо, то в результате него элементарное состояние системы изменится неконтролируемым образом. Поэтому результат второго измерения никак не будет связан с результатом первого измерения. Если первое измерение воспроизводимо, то в результате него элементарное состояние системы изменится так, что оно станет стабильным на наблюдаемой $\hat{A}$. Поэтому результат второго измерения будет совпадать с результатом первого, вне зависимости от

того, выполнялось или нет равенство (1) до первого измерения. В любом случае проверить это равенство мы не сможем. Заметим, что нарушение равенства (1) позволяет обойти запрещающую (no-go) теорему Кохена–Шпекера [9], которая является одним из главных аргументов, используемых при доказательстве отсутствия локальной физической причины результатов квантовых измерений.

Возможность нарушения равенства (1) означает, что нельзя требовать, чтобы регистрируемое значение наблюдаемой было физической реальностью, целиком определяемой изучаемой физической системой. С другой стороны, ничто не препятствует считать такой физической реальностью элементарное состояние системы.

Регистрируемое значение наблюдаемой может зависеть не только от изучаемой системы, но и от используемого измерительного прибора. Каждый измерительный прибор можно отнести к одному из типов (ξ -тип) в зависимости от того, каким функционалом $\varphi_\xi(\cdot)$ определяется регистрируемый результат. Здесь возможны два варианта: 1) принадлежность к данному ξ -типу заложена в самой конструкции прибора; 2) конструкция прибора не фиксирует его ξ -тип, принадлежность к тому или иному типу определяется неконтролируемым внутренним состоянием прибора в момент измерения.

Если физическая система находится в элементарном состоянии, стабильном на наблюдаемой $\hat{A}$, то о значении A этой наблюдаемой уже можно говорить, как о физической реальности. Так как для классической системы существует только одна максимальная коммутативная подалгебра, то для такой системы любое элементарное состояние стабильно на любой наблюдаемой.

Рассмотрим класс $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$, элементами которого являются φ_η -эквивалентные элементарные состояния, стабильные на всех наблюдаемых из подалгебры $\mathfrak{Q}_\eta$. Если известно, что система находится в элементарном состоянии из этого класса, то при измерении любой наблюдаемой $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\eta$ мы с определенностью зарегистрируем значение $A_\eta = \varphi_\eta(\hat{A})$. Если $\hat{A} \notin \mathfrak{Q}_\eta$, то предсказать результат измерения нельзя, так как для разных элементов класса $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ эти результаты могут быть разными.

Именно такие физические свойства приписываются квантовому состоянию в стандартном подходе к квантовой механике. Это является основанием объявить рассмотренный класс эквивалентности квантовым состоянием $\Psi_{\varphi_\eta} = \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ в нашем подходе. Особо следует подчеркнуть, что элементарные состояния, являющиеся элементами этого класса, обладают всеми признаками элементарных событий колмогоровской теории вероятностей (см. [10], [11]). Поэтому среднее значение наблюдаемой $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi$ по классу эквивалентности $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ естественным образом задается стандартной формулой теории вероятностей

$$\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{A}) = \int_{\varphi \in \Psi_{\varphi_\eta}} P_{\hat{A}}(d\varphi) \varphi_\xi(\hat{A}), \quad (2)$$

где

$$P_{\hat{A}}(d\varphi) = P(\varphi : \varphi_\xi(\hat{A}) \leq A + dA) - P(\varphi : \varphi_\xi(\hat{A}) \leq A),$$

$P(\varphi)$ – вероятностная мера на классе $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ (подробнее см. [3]).

Наблюдаемая $\hat{A}$ может принадлежать не только подалгебре $\mathfrak{Q}_\xi$, но и другой подалгебре $\mathfrak{Q}_{\xi'}$. В принципе, значение $\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{A})$ могло бы зависеть от того, какую из подалгебр $\mathfrak{Q}_\xi$ мы будем использовать в правой части равенства (2). Однако опыт

показывает, что такой зависимости нет. Кроме того, опыт показывает, что функционал $\Psi_{\varphi_\eta}(\cdot)$ должен быть линейным. Поэтому следует принять следующий постулат.

ПОСТУЛАТ 5. *Вероятностное распределение в классе эквивалентности, соответствующем квантовому состоянию, таково, что правая часть равенства (2) не зависит от ξ и задает линейный функционал на алгебре $\mathfrak{A}$.*

В статье [3] показано, что такое распределение существует и квантовое состояние Ψ_{φ_η} является чистым.

В стандартной квантовой механике среднее значение наблюдаемой в квантовом состоянии задается формулой, не имеющей, казалось бы, ничего общего с формулой (2). Поэтому естественно возникает вопрос, существует ли какая-нибудь связь стандартного подхода к квантовой механике с подходом, используемым в настоящей статье. Такую связь дает каноническая конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС) [12], [13]. Эта конструкция позволяет для любой C^* -алгебры и линейного функционала на ней построить представление этой алгебры в гильбертовом пространстве, т. е. она позволяет построить гильбертово пространство, в котором каждому элементу алгебры соответствует линейный оператор, а линейные функционалы на алгебре представляются в виде математического ожидания этих операторов по соответствующим векторам гильбертова пространства. Применительно к рассматриваемому случаю конструкция описана в работе [3].

Таким образом, чтобы трактовать наблюдаемые как операторы, нужно перейти от алгебры к ее представлению в гильбертовом пространстве. В конструкции ГНС для этого на алгебре должен быть задан линейный функционал. Здесь этот функционал задается формулой (2). Поэтому рассмотрение наблюдаемых как операторов хорошо подходит для описания средних значений наблюдаемых по квантовому ансамблю, но может не подходить для описания других свойств наблюдаемых.

3. РАСШИРЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ ПОДХОДА НА ОТО

В предыдущем разделе соотношения между квантовыми и классическими системами описывались без учета ОТО. Для учета ОТО основные положения должны быть несколько модифицированы и дополнены. Дополним постулаты предыдущего раздела еще одним.

ПОСТУЛАТ 6. *Четырехмерное пространство $\mathfrak{M}$ является гладким многообразием. Метрический тензор $g^{\mu\nu}(x)$ этого многообразия является значением классической наблюдаемой $\hat{g}^{\mu\nu}(x)$.*

Используемое в ОТО многообразие $\mathfrak{M}$ не является линейным пространством. Следуя Картану [14], четырехмерное нелинейное пространство $\mathfrak{M}$ удобно представлять в виде гладкой четырехмерной поверхности в линейном пространстве $\mathfrak{R}$ большей размерности. Однако никакого физического смысла пространству $\mathfrak{R}$ мы приписывать не будем.

Наблюдаемые $\hat{g}^{\mu\nu}(x)$ являются компонентами контравариантного тензора. Этому тензору можно сопоставить ковариантный тензор с компонентами $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$. Часто

между тензорами $\hat{g}^{\mu\nu}(x)$ и $\check{g}_{\mu\nu}(x)$ не делают принципиального различия и компоненты одного тензора выражают через компоненты другого, хотя с точки зрения математики они являются элементами различных (взаимно сопряженных) линейных пространств. У нас эти тензоры будут играть существенным образом различные роли. В то время как контравариантный тензор $\hat{g}^{\mu\nu}(x)$ описывает гравитационную наблюдаемую, ковариантный тензор $\check{g}_{\mu\nu}(x)$ никакой наблюдаемой не описывает. Он задает некоторое линейное отображение. Далее в качестве наблюдаемых, соответственно элементов C^* -алгебры, мы будем рассматривать контравариантные компоненты тензорных величин. Ковариантные компоненты будем использовать для построения линейных отображений, компоненты смешанных тензоров будем избегать. Операции интегрирования и дифференцирования по x также используются для построения линейных отображений.

Будем считать, что отображение $\check{g}_{\mu\nu}(x)$ действует на наблюдаемую $\hat{g}^{\mu\nu}(x)$ следующим образом:

$$\check{g}_{\mu\lambda}(x)\hat{g}^{\lambda\nu}(x) = \delta_\mu^\nu \hat{I}, \quad (3)$$

где δ_μ^ν – символ Кронекера, а $\hat{I}$ – единичный элемент алгебры наблюдаемых. Наряду с наблюдаемыми $\hat{A}(x)$ часто приходится использовать их производные

$$\frac{\partial \hat{A}(x)}{\partial x_\sigma} = \partial^\sigma \hat{A}(x) \equiv \hat{A}^{\cdot\sigma}(x), \quad \frac{\partial^2 \hat{A}(x)}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} = \partial^\sigma \partial^\tau \hat{A}(x) \equiv \hat{A}^{\cdot\sigma\tau}(x).$$

В ОТО в общем случае наблюдаемые $\hat{A}^{\cdot\sigma}(x)$ и $\hat{A}^{\cdot\sigma\tau}(x)$ не являются компонентами тензоров, т.е. при преобразовании координат они не преобразуются, как это положено тензорам. С другой стороны, относительно отображения $\check{g}_{\mu\nu}(x)$ они ведут себя, как контравариантные компоненты тензоров. До сих пор в ОТО нет устоявшегося термина для таких величин. Мы будем использовать термин *паратензор* (якобы тензор). Настоящими тензорами в ОТО являются ковариантные производные $\hat{A}^{\cdot\sigma}(x)$, $\hat{A}^{\cdot\sigma\tau}(x)$.

Продифференцировав обе части равенства (3) по x_σ , получим

$$(\check{g}_{\mu\lambda}^{\cdot\sigma}(x))\hat{g}^{\lambda\nu}(x) = -\check{g}_{\mu\lambda}(x)(\hat{g}^{\lambda\nu,\sigma}(x)).$$

Умножая обе части этого равенства на $\check{g}_{\nu\gamma}(x)$ и учитывая равенство (3), получим

$$\check{g}_{\mu\nu}^{\cdot\sigma}(x) = -\check{g}_{\mu\lambda}(x)\hat{g}^{\lambda\kappa,\sigma}(x)\check{g}_{\kappa\nu}(x).$$

Проделанная выкладка аналогична соответствующей выкладке в книге [15]. Мы только последовательно обращали внимание на различие между наблюдаемыми и линейными отображениями наблюдаемых.

В ОТО большое внимание уделяется так называемому бескоординатному описанию физической системы. При таком описании между наблюдаемыми величинами устанавливаются соотношения, которые не зависят от частного выбора системы отсчета в четырехмерном пространстве-времени $\mathfrak{M}$.

В используемом нами подходе наблюдаемые – это элементы алгебры, т.е. наблюдаемые – это величины, которые удовлетворяют определенным алгебраическим соотношениям. Эти соотношения, естественно, никак не зависят от выбора координат в пространстве $\mathfrak{M}$.

Другой важной характеристикой физической системы является элементарное состояние. Элементарное состояние сопоставляет каждой наблюдаемой ее значение, регистрируемое измерительным прибором. У физической системы, находящейся в определенном элементарном состоянии, разные измерительные приборы для одной и той же наблюдаемой могут зарегистрировать разные значения. Это аналогично тому, как в ОТО значения наблюдаемых могут зависеть от системы отсчета. Поэтому в нашем подходе систему отсчета мы будем отождествлять с некоторой системой классических измерительных приборов.

Как указано в разделе 2, в квантовом случае элементарное состояние – это бесконечный набор функционалов на множестве квантовых наблюдаемых. Этот набор фиксирует результаты измерения, полученные прибором любого типа. В этом смысле элементарное состояние не зависит от выбора измерительного прибора. В разделе 2 речь шла о наблюдаемых материи в отсутствие гравитационного поля. Теперь посмотрим, какие изменения следует сделать при учете гравитационного поля.

Эти изменения будут двоякого рода. Во-первых, появятся гравитационные наблюдаемые. Поэтому функционалы, характеризующие элементарные состояния рассматриваемой физической системы (или подсистемы), должны быть определены также и на гравитационных наблюдаемых. Во-вторых, значительно расширится набор приборов, которые могут быть использованы для измерения как гравитационных наблюдаемых, так и наблюдаемых материи. Теперь мы должны учитывать, что измерительный прибор может произвольным образом двигаться относительно изучаемой физической системы. Каждому такому прибору (системе приборов) следует сопоставить в элементарном состоянии определенный функционал. Таким образом, следует значительно расширить набор функционалов, составляющих каждое отдельное элементарное состояние. Элементарное состояние после включения в него таких функционалов будет описывать результаты измерений при любой системе приборов. Это значит, что такое расширенное элементарное состояние не зависит от системы приборов. Поэтому можно считать, что элементарное состояние – это объективная физическая реальность, определяемая только исследуемой системой.

Другое дело, зарегистрированные значения наблюдаемых. Они зависят как от исследуемой системы, так и от системы измерительных приборов. Поэтому они не являются объективной характеристикой исследуемой системы. В связи с этим представляется неудачным общеупотребительное утверждение такого типа. Движущийся с большой постоянной скоростью объект испытывает лоренцевское сокращение. Это утверждение порождает иллюзию того, что в движущемся объекте происходят какие-то объективные изменения. В действительности в самом объекте никакого изменения не происходит, просто он по-разному взаимодействует с измерительными приборами, которые движутся относительно него с разными скоростями.

Иными словами, размеры движущегося объекта не являются его объективной характеристикой. В связи с этим можно вспомнить о практически забытом термине *масса движения*, которая также не является объективной характеристикой. В противоположность этому *масса покоя* такой характеристикой является. В терминах, используемых в настоящей статье, можно сказать, что масса является стабильной наблюдаемой для физически реализуемых элементарных состояний исследуемой системы.

Стабильная наблюдаемая, как она определена в разделе 2, – это наблюдаемая, на которой различные функционалы, входящие в данное элементарное состояние, принимают одно и то же значение. Применительно к ОТО понятие стабильной наблюдаемой может быть расширено. В него можно включить все наблюдаемые, являющиеся тензорами. Конечно, результат измерения каждой компоненты тензорной наблюдаемой может зависеть от используемой системы измерительных приборов (от системы отсчета). Однако, зная значения всех компонент, найденных одним прибором, мы можем однозначно предсказать результат измерения этих компонент, если будем использовать другой прибор, связанный с первым соответствующим координатным преобразованием. В этом случае мы можем считать, что тензорная наблюдаемая, рассматриваемая как единое целое, является стабильной. Соответственно, можно считать, что значение такой наблюдаемой (совокупность значений всех ее компонент) является объективной реальностью.

Наблюдаемые, имеющие структуру паратензоров, мы не должны считать стабильными. Значения их компонент в одном и том же элементарном состоянии, найденные с помощью одной системы измерительных приборов, нельзя однозначно пересчитать в значения, которые могут быть найдены с помощью другой системы приборов. Если быть более точным, такой пересчет возможен. Однако для его реализации необходима полная история перехода одной системы приборов в другую. Мы можем синхронизировать показания приборов в разных точках пространства $\mathcal{M}$, однако результат такой синхронизации может зависеть от пути, соединяющего эти точки.

4. ТЕНЗОРЫ 4-ИМПУЛЬСА

С помощью стандартной процедуры (см., например, [15], [16]) из метрического тензора и его производных можно построить другие основные гравитационные наблюдаемые: символы Кристоффеля

$$\hat{K}^{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\hat{g}^{\mu\nu,\sigma} + \hat{g}^{\mu\sigma,\nu} - \hat{g}^{\nu\sigma,\mu}),$$

тензор кривизны

$$\hat{R}^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\hat{g}^{\mu\sigma,\rho\nu} - \hat{g}^{\nu\sigma,\rho\mu} - \hat{g}^{\mu\rho,\sigma\nu} + \hat{g}^{\nu\rho,\sigma\mu}) + \check{g}_{\alpha\beta}(\hat{K}^{\alpha\mu\sigma}\hat{K}^{\beta\nu\rho} - \hat{K}^{\alpha\mu\rho}\hat{K}^{\beta\nu\sigma}),$$

тензор Риччи

$$\hat{R}^{\nu\rho} = \check{g}_{\alpha\beta}\hat{R}^{\alpha\nu\rho\beta},$$

скалярную кривизну

$$\hat{R} = \check{g}_{\alpha\beta}\hat{R}^{\alpha\beta}$$

и тензор Эйнштейна–Гильберта

$$\hat{G}^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}\left(\hat{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu}\hat{R}\right).$$

Согласно тождеству Бианки для этого тензора справедливо равенство

$$\hat{G}^{\mu\nu}{}_{;\nu}(x) = 0. \quad (4)$$

В силу принятого нами определения физической системы мы можем рассматривать некоторую область $\mathfrak{D}$ в пространстве $\mathfrak{M}$ в совокупности с определенными на ней наблюдаемыми материи, гравитационными наблюдаемыми $\hat{g}^{\mu\nu}(x)$ и их первыми двумя производными в качестве некоторой физической системы. Из этой системы мы можем выделить две подсистемы. Элементами первой подсистемы являются точки области $\mathfrak{D}$ в совокупности с алгеброй гравитационных наблюдаемых. Эта алгебра коммутативна и принадлежит центру алгебры, содержащей все наблюдаемые. Следовательно, эта подсистема будет классической.

Элементами второй подсистемы являются точки области $\mathfrak{D}$ в совокупности с алгеброй $\mathfrak{A}(\mathfrak{D})$, генерируемой наблюдаемыми материи, определенными на точках $x \in \mathfrak{D}$. В общем случае алгебра $\mathfrak{A}(\mathfrak{D})$ некоммутативна. Соответственно, вторая подсистема будет квантовой. Чтобы не усложнять терминологию, наблюдаемые, принадлежащие алгебрам $\mathfrak{A}(\mathfrak{D})$, будем называть квантовыми, хотя среди них могут оказаться наблюдаемые, принадлежащие центру алгебры $\mathfrak{A}$.

Первую подсистему будем называть гравитационным полем, вторую подсистему естественно назвать материей. Эти две подсистемы взаимно открыты и взаимодействуют между собой. Основное уравнение ОТО как раз и призвано описать это взаимодействие. Это уравнение выглядит чрезвычайно просто:

$$\hat{G}^{\mu\nu}(x) = \hat{T}^{\mu\nu}(x), \quad (5)$$

где $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$ – тензор 4-импульса материи.

Основное уравнение ОТО, записанное в форме (5), – это уравнение, которое связывает наблюдаемые двух подсистем, которые локализованы в одной области $\mathfrak{D}$. Если обе подсистемы описываются классическим образом, то уравнение (5) внутренне непротиворечиво. Однако оно оказывается противоречивым, если мы хотим описывать материю в терминах квантованных полей, а кривизну пространства-времени в классических терминах.

В квантовой теории поля тензор 4-импульса материи описывается в терминах операторнозначной обобщенной функции. Чтобы учесть этот факт, равенство (5) можно переписать в виде

$$\int dx f(x) \hat{G}^{\mu\nu}(x) = \int dx f(x) \hat{T}^{\mu\nu}(x),$$

где $f(x)$ – произвольная достаточно хорошая (основная) функция. Однако этого недостаточно, так как в этом равенстве оператор приравнивается числу.

Как уже упоминалось в разделе 1, в настоящее время основные надежды на разрешение возникшего противоречия связываются с попытками проквантовать пространство-время, но это требует новой революции в физике с очень неясным исходом. Однако можно попытаться обойтись без таких радикальных изменений.

Вспомним, что современная физика уже имеет опыт описания взаимодействия между квантовыми и классическими системами. Первое, что приходит на ум, – это движение (рассеяние) квантовых частиц в классических полях. Но в этом описании не учитывается обратное воздействие квантовых частиц на классические поля. Между тем, имеется процесс, в котором такое воздействие является основной целью исследования. Таким процессом является взаимодействие квантовых частиц с классическим измерительным прибором. Можно попытаться воспользоваться приобретенным здесь опытом для того, чтобы снять противоречие, которое возникает при

прямом использовании уравнения (5) в случае, когда материя описывается квантовым образом.

Будем рассматривать гравитационное поле, ассоциированное с областью $\mathfrak{D}$, как классический измерительный прибор, предназначенный для измерения значения тензора 4-импульса материи, локализованной в этой области. Соответственно, значение тензора $G^{\mu\nu}$ будем рассматривать как показание этого прибора. В этом случае уравнение (5) можно переписать в виде

$$\int dx f(x) G^{\mu\nu}(x) = \varphi \left(\int dx f(x) \hat{T}^{\mu\nu}(x) \right). \quad (6)$$

В левой части уравнения (5) $G^{\mu\nu}(x)$ следует рассматривать не как классическую наблюдаемую (тензор Эйнштейна–Гильберта), а как значение этой наблюдаемой в точке x . В правой части уравнения (6) стоит значение квантовой наблюдаемой (тензора 4-импульса) в элементарном состоянии φ . Это элементарное состояние, в котором находится рассматриваемая подсистема.

Уравнение (6) не надо путать с уравнением

$$G^{\mu\nu}(x) = \langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle, \quad (7)$$

которое широко используется в так называемой полуклассической теории (см., например, [17]). В этой теории гравитационное поле считается классическим, а материальные поля трактуются квантовым образом. При этом тензор Эйнштейна–Гильберта $G^{\mu\nu}(x)$ связывается со средним значением $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$ тензора энергии-импульса по некоторому квантовому состоянию. Уравнение (7) может быть получено с помощью вариационного принципа из определенного *эффективного действия*. В некоторых случаях такое эффективное действие может быть полезным.

Уравнение (7) пригодно для описания взаимодействия гравитационного поля с материальным объектом, который может рассматриваться как квантовый ансамбль некоторых более элементарных объектов. Для описания последних можно уже использовать квантовую теорию. Однако желательно иметь теорию, в которой материальные поля с самого начала последовательно описываются квантовым образом.

В отличие от уравнения (7), уравнение (6) пригодно для описания *индивидуального* события взаимодействия квантового объекта с гравитационным полем. Примером такого события является рождение нашей Вселенной. Вряд ли можно надеяться набрать статистику по таким событиям.

Имеется еще одно существенное различие уравнений (6) и (7). Индивидуальное событие может произойти здесь и сейчас. Поэтому с помощью уравнения (6) можно описывать локальные события. Для ОТО это очень важно. В случае уравнения (7) речь идет о средних значениях. Чтобы получить средние значения, надо набрать статистику. Для этого можно одновременно делать измерения в разных местах, можно делать измерения в одном месте, но в разные моменты времени. В любом случае мы лишаемся возможности локального описания физической системы.

В отличие от уравнения (5), уравнение (6) не является уравнением движения для наблюдаемых. В уравнении (6) наблюдаемые $\hat{G}^{\mu\nu}(x)$ и $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$ можно считать независимыми. Уравнение (6) – это уравнение на элементарное состояние. Конечно, оно определяет элементарное состояние далеко не однозначно. Этому уравнению

удовлетворяет целый класс эквивалентности в множестве элементарных состояний. Ситуация типична для квантовых систем.

В стандартном подходе к квантовой механике обычно считается, что если в результате взаимодействия квантовой системы с классическим измерительным прибором регистрируется определенный результат для некоторой наблюдаемой, то после такого измерения квантовая система переходит в квантовое состояние, в котором эта наблюдаемая имеет зарегистрированное значение. Это утверждение даже закреплено в проекционном принципе [2]. Строго говоря, это не обязательно так. Измерительный прибор не обязательно одновременно является прибором, приготавливающим квантовое состояние. Однако в рассматриваемом случае это, скорее всего, реализуется.

Будем считать, что классическая подсистема (гравитационное поле) не просто измеряет значение квантовой наблюдаемой $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$, а одновременно приготавливает квантовое состояние с определенным значением этой наблюдаемой. Тогда обратное воздействие классической подсистемы на квантовую приведет к тому, что квантовая подсистема окажется в элементарном состоянии $\varphi = [\varphi_\xi]$, стабильном на наблюдаемой $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$. В этом случае в правой части уравнения (6) в качестве $\varphi(\cdot)$ можно взять функционал $\varphi_\xi(\cdot) \in \varphi$, который является характером любой из коммутативных подалгебр $\mathfrak{Q}_\xi$, содержащей наблюдаемую $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$. Тогда результаты измерения классической наблюдаемой $\hat{G}^{\mu\nu}(x)$ и квантовой наблюдаемой $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$ будут совпадать при использовании любых подходящих измерительных приборов. Это больше соответствует смыслу основного уравнения ОТО.

Если сделанное предположение справедливо, то это означает, что наблюдаемая $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$ является выделенной среди всех других наблюдаемых. Ее значение является физической реальностью, присущей квантовому объекту, и не зависит от прибора, используемого для ее измерения.

Если удастся доказать теорему типа запрещающей теоремы Кохена–Шпекера о противоречии этого факта другим положениям квантовой механики, то остается запасной вариант: можно отказаться от предположения о стабильности реализуемого в природе элементарного состояния φ на наблюдаемой $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$. Но этот вариант представляется менее естественным.

Если действительно значение тензора 4-импульса материи является физической реальностью, присущей квантовому объекту, то от записи основного уравнения ОТО в виде (6) можно перейти (в терминах обобщенных функций) к виду

$$G^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(x), \quad (8)$$

который обычно используется в ОТО. Нужно только иметь в виду, что теперь это уравнение связывает между собой не две наблюдаемые величины, а физически реализуемые численные значения этих величин.

Надо также учитывать, что в квантовом случае мы не можем экспериментально зафиксировать, в каком элементарном состоянии находится рассматриваемая нами квантовая система. Самое большее, что мы можем узнать, – в каком квантовом состоянии она находится. Если это квантовое состояние является собственным состоянием наблюдаемой $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$, то значение $T^{\mu\nu}(x)$ фиксируется однозначно. Именно с этим значением следует решать уравнение (8). Если же зафиксированное квантовое состояние не является собственным для наблюдаемой $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$, то прежде чем

воспользоваться уравнением (8), надо найти вероятность реализации каждого из значений наблюдаемой $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$. После этого мы можем решать уравнение (8) для различных значений. Полученные решения будут описывать физическую реальность с найденными вероятностями.

Если материя описывается классически, то элементарное состояние определяется одним функционалом. Поэтому и в предлагаемом подходе уравнение (5) остается в силе. При этом можно считать, что уравнение (5) связывает две наблюдаемые. Однако это справедливо только тогда, когда мы каждой из наблюдаемых сопоставляем функцию, значения которой совпадают с физически реализуемыми значениями данной наблюдаемой. Другими словами, уравнение (5) остается в силе только в выделенном представлении наблюдаемых. Обычно это считается само собой разумеющимся, но это нельзя автоматически переносить на квантовый случай.

Поучительно подойти к выводу основного уравнения ОТО с другой стороны, воспользовавшись принципом стационарности действия. Будем исходить из следующей формулировки.

Реальная эволюция физической системы происходит так, что значение вариации действия равно нулю.

Обратим внимание на слово *значение*. Его часто опускают. У нас оно будет играть ключевую роль. Стандартным образом (см., например, [15]) будем считать, что действие $\hat{S}$ физической системы складывается из двух частей: материальной части действия

$$\hat{S}_m = \int \Lambda(x) \sqrt{-\hat{g}(x)} dx,$$

где $\hat{g}(x)$ – детерминант метрического тензора, а $\Lambda(x)$ – скалярная функция квантовых наблюдаемых и отображения $\hat{g}_{\mu\nu}$, и гравитационной части

$$\hat{S}_g = \frac{1}{16\pi} \int \hat{R}(x) \sqrt{-\hat{g}(x)} dx.$$

Обозначим через $\hat{q}$ квантовую наблюдаемую, которая играет роль обобщенной координаты. Гравитационное действие от $\hat{q}$ не зависит, поэтому при ее вариации будет изменяться только $\hat{S}_m$. Соответственно, для нахождения значения вариации действия достаточно рассмотреть квантовую подсистему. Тогда из принципа стационарности действия имеем

$$\varphi_\xi(\delta_q \hat{S}) = \varphi_\xi \left(\int \frac{\delta \Lambda(x) \sqrt{-\hat{g}(x)}}{\delta \hat{q}(x)} \delta \hat{q}(x) dx \right) = 0. \quad (9)$$

Будем считать, что $\delta \hat{q}(x)$ не равно нулю только в малой области около некоторой точки y пространства $\mathfrak{M}$ и принадлежит центру алгебры наблюдаемых. Учитывая, что $\varphi_\xi(\cdot)$ – линейный мультипликативный функционал, уравнение (9) можно переписать в виде

$$\varphi_\xi \left[\frac{\partial \Lambda(x) \sqrt{-\hat{g}(x)}}{\partial \hat{q}} - \left(\frac{\partial \Lambda(x) \sqrt{-\hat{g}(x)}}{\partial \hat{q}^{\cdot\mu}} \right)^{\cdot\mu} \right] = 0.$$

Если точка y не фиксирована, то для описания физически реализуемых элементарных состояний квантовой подсистемы допустимы все характеры $\varphi_\xi(\cdot)$, суженные на

подалгебру квантовых наблюдаемых. В силу постулата 4 отсюда следует

$$\frac{\partial \Lambda(x) \sqrt{-g(x)}}{\partial \hat{q}} - \left(\frac{\partial \Lambda(x) \sqrt{-g(x)}}{\partial \hat{q}^{\cdot \mu}} \right)^{\cdot \mu} = 0. \quad (10)$$

Таким образом, из принципа стационарности действия для квантовых наблюдаемых получаются уравнения движения. В этих уравнениях гравитация выступает в роли внешнего классического поля, а гравитационные наблюдаемые представляются в виде их значений в рассматриваемом элементарном состоянии.

Рассмотрим вариацию $\delta \hat{S}_m$ при преобразовании координат $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu$, где ζ^μ – малые величины. Так как $\hat{S}_m$ – скаляр, то вариация должна равняться нулю. Повторяя выкладки монографии [15], получим

$$\hat{T}^{\mu\nu}_{;\nu}(x) = 0, \quad (11)$$

где

$$\hat{T}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\hat{g}}} \left[\left(\frac{\partial \Lambda \sqrt{-\hat{g}}}{\partial \hat{g}_{\mu\nu,\tau}} \right)_{,\tau} - \frac{\partial \Lambda \sqrt{-\hat{g}}}{\partial \hat{g}_{\mu\nu}} \right]$$

– тензор 4-импульса материи.

Аналогичную выкладку можно проделать для вариации $\delta(\hat{S}_m + \hat{S}_g)$ и получить, что тензор полного 4-импульса $\hat{\Theta}^{\mu\nu} = \hat{T}^{\mu\nu} - \hat{G}^{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнению

$$\Theta^{\mu\nu}_{;\nu}(x) = 0. \quad (12)$$

Заметим, что у нас уравнение (11) не является следствием уравнения (6) и тождества Бианки (4). В частности, это связано с тем, что для некоммутирующих наблюдаемых элементарное состояние не обладает свойством линейности.

Рассмотрим вариацию $\delta(\hat{S}_m + \hat{S}_g)$ при варьировании гравитационной наблюдаемой $\hat{g}^{\mu\nu}$. Теперь мы должны пользоваться принципом стационарности действия, т. е. считать, что

$$\varphi(\delta(\hat{S}_m + \hat{S}_g)) = 0 \quad (13)$$

для физически реализуемого элементарного состояния φ .

В отличие от q - и c -чисел, для всех элементов C^* -алгебры определена операция сложения. Поэтому мы опять можем воспользоваться выкладками монографии [15], только надо учесть равенство (13) и тот факт, что тензор $\hat{\Theta}^{\mu\nu}(x)$ является обобщенной функцией. В результате мы придем к уравнению

$$\varphi \left(\int dx f(x) \hat{\Theta}^{\mu\nu}(x) \right) = 0, \quad (14)$$

которое совпадает с уравнением (6). Из этого уравнения следует, что тензор полного 4-импульса каждой области пространства $\mathfrak{M}$ равен нулю. Так выглядит закон сохранения энергии и импульса в нашем подходе. Закон выполняется не только глобально, но и локально.

С другой стороны, если тензор полного 4-импульса определить как сумму тензора $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$ и так называемого псевдотензора 4-импульса $\hat{t}^{\mu\nu}(x)$, то обычно приводимое доказательство сохранения такого полного 4-импульса не проходит в случае,

когда $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$ является квантовой наблюдаемой. Попутно заметим, что в действительности $\hat{t}^{\mu\nu}(x)$ не является псевдотензором в строгом смысле слова. В нашей терминологии его следовало бы назвать паратензором. Вместо сохранения такого тензора можно доказать закон сохранения другого паратензора.

Введем паратензор

$$\hat{Q}^{\mu\nu}(x) = -\hat{t}^{\mu\nu}(x) - \hat{G}^{\mu\nu}(x).$$

Этот тензор состоит только из гравитационных наблюдаемых, поэтому с ним можно обращаться как с классической наблюдаемой. Тогда, повторяя выкладки из монографии [15], в которых тензор $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$ заменен на тензор $\hat{G}^{\mu\nu}(x)$, получим

$$(\hat{g}(x)\hat{Q}^{\mu\nu}(x))_{,\nu} = 0. \quad (15)$$

Это равенство выполняется тождественно, поэтому оно справедливо для любого элементарного состояния. С другой стороны, так как $\hat{g}(x)\hat{Q}^{\mu\nu}(x)$ является паратензором, то его значение не определяется однозначно элементарным состоянием. В нашей терминологии эта наблюдаемая не является стабильной на физически реализуемом элементарном состоянии. Результат ее измерения зависит от используемого измерительного прибора. Примечательно то, что каждый фиксированный прибор не замечает эволюцию этой наблюдаемой во времени. В этом смысле эта наблюдаемая является скрытой (темной энергией?).

Разбиение тензора 4-импульса $-\hat{G}^{\mu\nu}(x)$ гравитационного поля на две части $\hat{Q}^{\mu\nu}(x)$ и $\hat{t}^{\mu\nu}(x)$ неоднозначно. Результат измерения каждой из этих частей не является объективной реальностью, а зависит от типа измерительного прибора. Это очень напоминает разбиение внутренней энергии на теплоту и работу в термодинамике. В нашем случае роль теплоты играет $\hat{Q}^{\mu\nu}(x)$, а роль работы — $\hat{t}^{\mu\nu}(x)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы видим, что алгебраический подход позволяет с единых позиций рассматривать классическую и квантовую физику, а также ОТО. При этом он позволяет обойтись без таких экзотических методов, как квантовая логика, квантовая теория вероятностей, суперсимметрия.

Алгебраический подход оказывается хорошей базой для построения основ теории физических измерений. На отсутствие такой теории обычно списывают все имеющиеся огрехи квантовой механики.

Сила алгебраического подхода состоит в его общности. Это позволяет при его использовании не делать предположений, которые иногда приходится делать в других подходах для достижения желаемого результата. Такие предположения стали настолько привычными, что они кажутся сами собой разумеющимися и перестают восприниматься как предположения, тем более что они часто приводят к результатам, которые хорошо подтверждаются в эксперименте.

Преимущество алгебраического подхода состоит в том, что во многих случаях он позволяет добиться тех же результатов без таких дополнительных предположений.

Список литературы

- [1] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, 1, 2, Наука, М., 1973.

- [2] И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, М., 1964.
- [3] Д. А. Славнов, *ЭЧАЯ*, **38**:2 (2007), 295–359.
- [4] Д. А. Славнов, *ЭЧАЯ*, **41**:1 (2010), 149–173.
- [5] Д. А. Славнов, *ТМФ*, **142**:3 (2005), 510–529.
- [6] Д. А. Славнов, *ТМФ*, **149**:3 (2006), 457–472.
- [7] Д. А. Славнов, *ТМФ*, **155**:2 (2008), 327–343.
- [8] Ж. Диксмье, *C^* -алгебры и их представления*, Наука, М., 1974.
- [9] S. Kochen, E. P. Specker, *J. Math. Mech.*, **17**:1 (1967), 59–87.
- [10] А. Н. Колмогоров, *Основные понятия теории вероятностей*, Наука, М., 1974.
- [11] Ж. Неве, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969.
- [12] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, Наука, М., 1968.
- [13] Ж. Эмх, *Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля*, Мир, М., 1976.
- [14] Э. Картан, *Риманова геометрия в ортогональном репере*, Изд-во МГУ, М., 1960.
- [15] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 2: *Теория поля*, Физматлит, М., 2006.
- [16] П. А. М. Дирак, *Общая теория относительности*, Атомиздат, М., 1978.
- [17] Н. Биррел, П. Девис, *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*, Мир, М., 1984.

Поступила в редакцию 14.04.2011,
после доработки 28.11.2011